Übungen zur Mathematik 1 **Garloff**

Blatt 10

1) Welchen Rang haben die folgenden Matrizen A für $a,b,c \in \mathbf{R}$?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & 1-a \\ 1 & b & b & 1-b \\ 1 & a & a & 1-a \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2c & 3a & c & 2a \\ c^2 & 0 & c^3 & a^2 \\ c & 0 & c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2c & 0 \end{pmatrix}$

2) Zeigen Sie, dass die Äquivalenz von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf $K^{m,n}$ bildet.
Hinweis: Verwenden Sie zum Nachweis der Symmetrie die Darstellung der elementaren Operationen mit Hilfe geeigneter Matrizen (s. Vorlesung).

3) Berechnen Sie

a) $\begin{vmatrix} 17 & -4 \\ -15 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} 2 & 178 & -65 & 13 \\ 0 & 4 & 99 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & -9 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Hinweis zu e): Versuchen Sie zunächst, unter Anwendung elementarer Umformungen möglichst viele Nullen in der zugrundeliegenden Matrix zu erzeugen.

4) Berechnen Sie für beliebige reelle Zahlen a und b die Werte der folgenden Determinanten unter Anwendung elementarer Umformungen

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & a^3 & a^4 & a^5 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b+1 \end{vmatrix}$,

5) Berechnen Sie die Determinante der Matrix aus Aufgabe 9-6.

6) Zugrunde gelegt wird die Basis des $\mathbf{R}^3$ aus Aufgabe 9-1 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

Zeigen Sie, dass die drei Vektoren tatsächlich linear unabhängig sind.