Übungen zur Mathematik 1 **Garloff**

Blatt 3

1) Es seien A und B Mengen und $M_1, M_2 \subseteq A$ und $N_1, N_2 \subseteq B$. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f: A \to B$ gilt:

   a) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$

   b) $f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2)$

   c) $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$

   d) $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$.

   Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass in b) i. allg. nicht die Gleichheit gilt. Was ist der Grund hierfür?

2) Zeigen oder widerlegen Sie, dass für beliebige Mengen A, B, Teilmengen $M \subseteq A$ und Funktionen $f: A \to B$ die folgende Gleichung gilt:

   $f(\overline{M}) = \overline{f(M)}$.

3) Die Funktion $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ sei definiert durch

$$f(n) := \begin{cases} n-1, \text{ falls } n \text{ gerade} \\ n+1, \text{ falls } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

   Ist f injektiv, surjektiv oder bijektiv? Geben Sie gegebenenfalls die Umkehrabbildung an.

4) Betrachtet wird die Abbildung $f\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N_0}$ definiert durch $f(n) := n^3 - n$, $n \in \mathbf{N}$.

   a) Weisen Sie nach, dass f injektiv ist. Bleibt die Injektivität erhalten, wenn der Definitionsbereich von f von $\mathbf{N}$ auf $\mathbf{N_0}$ erweitert wird?

   Hinweis: Es gibt sehr verschiedene Lösungswege. Sie können beispielsweise von der folgenden Beziehung Gebrauch machen

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2), \quad x, y \in \mathbf{R}.$$

   b) Zeigen Sie, dass für die Wertemenge von f gilt $f(\mathbf{N}) \subseteq \{6m \mid m \in \mathbf{N_0}\} =: 6\,\mathbf{N_0}$.

   Hinweis: Faktorisieren Sie f.

   Ist $f\colon \mathbf{N} \to 6\,\mathbf{N_0}$ auch surjektiv?

5) Zeigen Sie, dass die Verkettung zweier injektiver Funktionen injektiv ist. Wie lautet die Umkehrabbildung der Verkettung? Begründen Sie Ihr Ergebnis!