Übungen zur Mathematik 1 **Garloff**

Blatt 5

1. Auf der Menge $G = \{a, b, c, d, e, f\}$ sei eine binäre Verknüpfung $\circ$ erklärt gemäß folgender Verknüpfungstafel

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a	a	b	c	d	e	f
b	b	c	a	e	f	d
c	c	a	b	f	d	e
d	d	f	e	a	c	b
e	e	d	f	b	a	c
f	f	e	d	c	b	a

   a) Überprüfen Sie die Gültigkeit des Assoziativgesetzes anhand von einigen Wahlen von Elementen aus G.

   b) Wie lautet das neutrale Element?

   c) Zu welchen Elementen von G existieren inverse Elemente und wie lauten diese?

2. Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden algebraischen Gebilde (abelsche) Gruppen sind.

   a) $([0,\infty), *)$ mit $a * b := \sqrt[3]{a^3 + b^3}$ für $0 \le a, b$;

   b) die Menge **I** der abgeschlossenen, nichtleeren reellen Intervalle $[\underline{a}, \overline{a}]$, $\underline{a} \le \overline{a}$, mit $\underline{a}, \overline{a} \in \mathbf{R}$, mit der Addition erklärt durch

   für alle $[\underline{a}, \overline{a}], [\underline{b}, \overline{b}] \in \mathbf{I}$: $[\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{b}, \overline{b}] := [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]$;

   c) die Potenzmenge $P(M)$ einer beliebigen Menge M mit der Operation Δ erklärt durch
   $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ für $A, B \in P(M)$;

   d) die Menge $\mathbf{S}_n$ der Permutationen auf $\{1, 2, \dots, n\}$ und $\circ$ die Operation der Verkettung.

3. Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie:

   a) Für $a, b, c \in G$ folgt aus $b \circ a = c \circ a$, dass $b = c$ ist.

   b) Zu zwei beliebigen Elementen $a, b \in G$ gibt es genau ein Element $y \in G$ mit $y \circ a = b$.

4. Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und n ihr neutrales Element. Außerdem gelte für alle $a \in G$

   $$a \circ a = n.$$

   Beweisen Sie, dass die Operation $\circ$ kommutativ ist.

5. Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass durch

   $$gRh \;:\Leftrightarrow\; \exists x \in G : h = \overline{x} \circ g \circ x, \quad \forall g, h \in G,$$

   eine Äquivalenzrelation auf $G \times G$ erklärt ist.