Übungen zur Mathematik 1 **Garloff**

Blatt 6

1) Es sei $(R,+,*)$ ein Ring. Zeigen Sie, dass für alle $a,b \in R$ gilt $(-a)*b = -(a*b)$.

2) Es sei $R = \{a,b,c,d\}$; auf R werde eine Addition und Multiplikation erklärt vermöge

$+$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$*$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	a	c
d	a	d	c	b

Zeigen Sie, dass $(R,+,*)$ einen kommutativen Ring mit Einselement bildet, der Nullteiler enthält. Dabei genügt es, dass Sie die Gültigkeit der Assoziativ- und Distributivgesetze anhand von einigen wenigen Wahlen von Elementen aus R überprüfen.

3) Es sei K eine Menge, die nur aus den Elementen 0 und 1 besteht. Auf K werde eine Addition und Multiplikation erklärt durch

$$0+0 := 1+1 := 0\,, \quad 0+1 := 1+0 := 1\,,$$
$$0*0 := 0*1 := 1*0 := 0\,, \quad 1*1 := 1\,.$$

Zeigen Sie, dass $(K,+,*)$ einen Körper bildet.

4) Zeigen Sie, dass die Menge aller Linearkombinationen eines festen Systems von endlich vielen Vektoren eines Vektorraumes einen Unterraum dieses Vektorraumes bildet.

5) Es sei $(V,+,\cdot)$ ein K-Vektorraum. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(a) Die Vektoren $a_1, \ldots, a_m \in V$ sind linear abhängig.

(b) Mindestens ein Vektor a_j ist Linearkombination der anderen: $a_j = \sum_{i=1, i\neq j}^{m} \mu_i a_i$.