Übungen zur Mathematik 1 Garloff

Blatt 7

1) Zeigen Sie, dass die drei Vektoren $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\in \mathbf{R}^3$ linear abhängig sind, und stellen Sie einen dieser Vektoren als Linearkombination der übrigen dar.

2) Es sei $(V,+,\cdot)$ ein Vektorraum und $a,b \in V$. Zeigen Sie, dass die drei Vektoren a, $a + b$, $a - b$ linear abhängig sind.

3) Es sei $\{a_1, \ldots, a_r\}$ eine Basis eines Vektorraumes V. Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $a \in V$ die Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ in der Darstellung

$$a = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i$$

eindeutig bestimmt sind.

4) Gegeben seien die Vektoren $a = \begin{pmatrix}2\\-3\\-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $\in \mathbf{R}^4$.

Berechnen Sie (a,b), $\|a\|, \|b\|$ sowie den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

5) Berechnen Sie die Seitenlängen und Winkel des Dreiecks mit den Eckpunkten

$A(1, 5, 7)$, $B(-1, 3, 6)$, $C(0, 4, 5)$.

6) Der Punkt $P_0(1,-2,3)$ liegt in einer Ebene, die senkrecht steht zum Vektor $n = (2,-2,1)$. Wie lautet die Gleichung der Ebene? Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P_1(3,1,2)$ von dieser Ebene.

7) Es seien a und b Vektoren des $\mathbf{R}^n$ mit den Eigenschaften

$$\|a\| = \|b\| = 1 \text{ und } (a+b, a-2b) = -1.$$

a) Welchen Winkel schließen a und b ein?

b) Welche Norm besitzt der Vektor $a - 2b$?