Übungen zur Mathematik 1 Garloff

Blatt 9

1) Gegeben sind die Basen $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ des $\mathbf{R}^3$ und $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\}$ des $\mathbf{R}^2$.

   Bestimmen Sie für die lineare Abbildung $\phi:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, definiert durch $\phi(x,y,z)=(x+y,2z)$, die Darstellungsmatrix bezüglich dieser beiden Basen.

2) Zugrunde gelegt wird Übungsaufgabe 8-2.

   a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\{w^{(i)}, i=1,2,3\}$ eine Basis des $\mathbf{R}^3$ bilden. Nutzen Sie diesen Sachverhalt aus, um auf einfache Weise den Kern von ϕ zu bestimmen.

   b) Ermitteln Sie für die Abbildung ϕ die Darstellungsmatrizen bzgl. der Basen $\{e^{(j)}, j=1,2,3,4\}$ des $\mathbf{R}^4$ und $\{w^{(i)}, i=1,2,3\}$ bzw. $\{e^{(i)}, i=1,2,3\}$ des $\mathbf{R}^3$.

3) Welche 3×3-Matrix skaliert um ½ in der $e^{(1)}$-Richtung, skaliert um 3 in der $e^{(2)}$-Richtung, skaliert um 4 in der $e^{(3)}$-Richtung und kehrt die $e^{(3)}$-Richtung zusätzlich um? Welches Volumen besitzt das resultierende Parallelepiped, wenn Sie den Einheitswürfel dieser Abbildung unterwerfen?

4) Zeigen Sie, dass gilt $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$.

   Was bedeutet dieser Sachverhalt geometrisch?

5) Rotieren Sie mit dem Winkel $\alpha = 90°$ die beiden Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ um den Vektor $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Norm des Bildvektors zu $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

6) Welche Matrix A bewirkt eine Rotation um 45° um den Vektor $m=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$?

   Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie $A\cdot m$ bilden.