Übungen zur Mathematik 2 **Garloff**

Blatt 5

1. Berechnen Sie die Summe s_4 der ersten vier Glieder von

   a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} - 1$

   und schätzen Sie den absoluten Fehler $|s - s_4|$ ab. Geben Sie ferner untere und obere Schranken für s an.

2. Bestimmen Sie das Konvergenzintervall folgender Potenzreihen

   a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} x^k$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k+1}} x^k$

   c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k} (x-1)^k$

3. Bestimmen Sie den maximalen Konvergenzbereich nachstehender Potenzreihen

   a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} k!\, x^k$

   c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k^2}$. d) $\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k\pi + 2) x^k$.

4. Ermitteln Sie zu nachstehenden Funktionen das Taylor-Polynom vom Maximalgrad vier mit dem jeweils angegebenen Entwicklungspunkt

   a) $\sqrt{1+x}, \quad x_0 = 0$ b) $\sqrt{x}, \quad x_0 = 1$

   c) $\cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$.

5. Wie lautet die Potenzreihenentwicklung um $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen? Geben Sie den k-ten Koeffizienten und den Konvergenzradius der Entwicklung an (ohne zu differenzieren!)

   a) $\frac{x}{x+2}$ b) $\sin x + \cos x$

   c) $\sin(\frac{x}{2})$ d) $(e^{-x})^2$.

6. Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklungen um $x_0 = 0$ bis zur Potenz x^6 (Teilaufgaben a) und b)) bzw. x^4 (Teilaufgabe c)) der nachstehenden Funktionen (ohne zu differenzieren)

   a) $\sin x \cdot \cos x$ b) $\ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

   c) $f(x) := \dfrac{4-2x}{1+\cos x}$

   Warum kann der Konvergenzradius der Potenzreihe nicht größer als π sein?

7. Mit Hilfe der Taylor-Reihe um $x_0 = 0$ der sin-Funktion soll $\sin 20°$ auf sechs Stellen genau berechnet werden. Schätzen Sie ab, wie viele Glieder dieser Reihe mindestens berücksichtigt werden müssen. Verwenden Sie dazu die Abschätzung

   Für $3 \le n$ gilt für alle $n \in \mathbf{N}: 2^{n-1} < n!$

8. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe von Potenzreihenentwicklungen

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \ln(1+x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x - 2 + x^2}{x^2 \sin^2 x}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2(5x)}$.