

Blatt 5

1. Bestimmen Sie das Konvergenzintervall folgender Potenzreihen

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} x^k$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k+1}} x^k$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k} (x-1)^k$.

2. Bestimmen Sie den maximalen Konvergenzbereich nachstehender Potenzreihen

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} k! x^k$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k^2}$.

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \sin(k\pi + 2)x^k$.

3. Ermitteln Sie zu nachstehenden Funktionen das Taylor-Polynom vom Maximalgrad vier mit dem jeweils angegebenen Entwicklungspunkt

a) $\sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$

b) \sqrt{x} , $x_0 = 1$

c) $\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

4. Wie lautet die Potenzreihenentwicklung um $x_0 = 0$ der folgenden Funktionen? Geben Sie den k -ten Koeffizienten und den Konvergenzradius der Entwicklung an (ohne zu differenzieren!)

a) $\frac{x}{x+2}$

b) $\sin x + \cos x$

c) $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

d) $(e^{-x})^2$

e) $\frac{x}{x^2 - x - 2}$.

5. Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklungen um $x_0 = 0$ bis zur Potenz x^6 (Teilaufgaben a) und b)) bzw. x^4 (Teilaufgabe c)) der nachstehenden Funktionen (ohne zu differenzieren)

a) $\sin x \cdot \cos x$

b) $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

c) $f(x) := \frac{4-2x}{1+\cos x}$

Warum kann der Konvergenzradius der Potenzreihe nicht größer als π sein?