Übungen zur Mathematik 2/AIT **Garloff**

Blatt 7

1. Stellen Sie die folgenden Funktionen s mit Hilfe der Einheitssprungfunktion dar

a) $s(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ -1 & \text{für} \quad 0 \le t < 1 \\ 2 & \text{für} \quad 1 \le t \ ; \end{cases}$

b) $s(t) = \begin{cases} \sin t & \text{für} \left| t - \frac{5}{2}\pi \right| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \ ; \end{cases}$

c) $s(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < 0 \\ c & \text{für} \quad 2nT \le t < (2n+1)T \\ -c & \text{für} \quad (2n+1)T \le t < 2(n+1)T \end{cases}$

(c, T sind positive Konstanten, $n \in \mathbf{N}_0$).

2. Weisen Sie für die Faltung $s_1 * s_2$ der nachstehenden Funktionen s_1 und s_2 die angegebenen Darstellungen nach (ohne Verwendung der Laplace-Transformation).

a) $\begin{cases} s_1(t) = \sin t \cdot \sigma(t) \\ s_2(t) = \cos t \cdot \sigma(t) \end{cases}$, $\qquad s_1 * s_2(t) = \frac{t}{2} \sin t \cdot \sigma(t);$

b) $\begin{cases} s_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } \pi \le t < 3\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ s_2(t) = \sin t \cdot \sigma(t) \end{cases}$, $\qquad s_1 * s_2(t) = (1 + \cos t) \cdot [\sigma(t - \pi) - \sigma(t - 3\pi)].$

3. a) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten der nachstehend definierten Funktion s („Sägezahnfunktion“).
Es gelte $s(t) = \frac{2}{\pi} t$ für $|t| \le \frac{\pi}{2}$, s sei symmetrisch bzgl. $\frac{\pi}{2}$, d.h.
$s(\frac{\pi}{2} - t) = s(\frac{\pi}{2} + t)$ für alle $t \in \mathbf{R}$, und auf $\mathbf{R}$ 2π-periodisch fortgesetzt.

b) Wie lautet die Fourier-Reihe zu s in reeller Gestalt?

c) Zeichnen Sie das komplexe Spektrum $\{c_k\}$ und das Amplitudenspektrum $\{A_k\}$ von s .

d) Betrachtet werde der Einzelimpuls $\tilde{s}$ zu s, d. h.

$$\tilde{s}(t) := s(t)[\sigma(t+\pi) - \sigma(t-\pi)], t \in \mathbf{R}.$$

Zeigen Sie, dass seine Spektraldichte gegeben ist durch

$$S(f) = -j\frac{2\sin(\pi^2 f) - \sin(2\pi^2 f)}{\pi^3 f^2}.$$

4. a) Zeigen Sie, dass die Spektraldichte des Dreieckimpulses über dem Intervall [-T, T]

$$s(t) = (1+\frac{t}{T})[\sigma(t+T) - \sigma(t)] + (1-\frac{t}{T})[\sigma(t) - \sigma(t-T)]$$

gegeben ist durch

$$S(f) = \begin{cases} T\left(\dfrac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right)^2, & \text{falls } f \neq 0, \\ T, & \text{falls } f = 0. \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie die Spektraldichte der Funktion aus obiger ÜA 3d) mit Hilfe der Spektraldichte des Dreieckimpulses (über dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$!) und des Zeitverschiebungssatzes.

Hinweis für beide Teilaufgaben: Halbwinkelformel $2\sin^2(t/2) = 1 - \cos t$.

5. Beweisen Sie den Ähnlichkeitssatz der Fourier-Transformation.

6. Zeigen Sie mit Hilfe des Multiplikationssatzes, dass für die Spektraldichte der Funktion $s(t) = te^{-\alpha t}\sigma(t), 0 < \alpha,$ gilt

$$S(f) = \frac{1}{(\alpha + j2\pi f)^2}.$$

7. Gegeben ist die Funktion $s(t) = e^{-\alpha t}$ für $0 \le t < T$, wobei α eine positive Konstante ist; s werde T-periodisch auf $\mathbf{R}$ fortgesetzt.

a) Zeigen Sie, dass die Fourier-Reihe zu s in komplexer Form lautet

$$(1-e^{-\alpha T})\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{e^{j2\pi kt/T}}{\alpha T + j2\pi k}.$$

b) Ermitteln Sie die Fourier-Transformierte dieser Fourier-Reihe.