Skriptum zu der Vorlesung

Mathematik 2

- Analysis -

Teil II

AIN

Jürgen Garloff
Hochschule Konstanz für Technik, Wirtschaft und Gestaltung
Fakultät für Informatik

September 2011

Inhaltsverzeichnis

1 Reihen

1.1 Zahlenreihen

1.1.1 Definition und Konvergenz

Gegeben sei eine Folgen reeller Zahlen $\{a_k\}$. Setze

$$\begin{aligned}
s_1 &:= a_1 \\
s_2 &:= a_1 + a_2 \\
s_3 &:= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\vdots \\
s_n &:= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die Folge $\{s_n\}$, die Folge der **Partialsummen**, bezeichnen wir als **Reihe** (der a_k), die einzelnen a_k auch als **Summanden**.

Beispiele:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \dots$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ (harmonische Reihe)
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$ (alternierende harmonische Reihe)
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$ (geometrische Reihe)

Definition (Konvergenz einer Reihe)**:**
Ist $\{s_n\}$ konvergent (mit dem Grenzwert s), dann nennen wir die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent (mit dem Grenzwert s) und notieren dies als

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent bzw. } \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$$

Andernfalls heißt die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **divergent**. Ist $\{s_n\}$ bestimmt divergent, dann notieren wir dies auch als

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty.$$

Bemerkung: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet

- eine **Folge**, nämlich die Folge von Partialsummen, unabhängig davon, ob diese Folge konvergiert;
- einen **Grenzwert** einer Folge und hat dann nur einen Sinn, wenn dieser Grenzwert existiert.
  $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$ bedeutet, die Reihe konvergiert und der Reihenwert ist s.

Beispiele:

1.

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ (geometrische Reihe)

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} \\ s_n &= 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} \\ qs_n &= q + q^2 + \cdots + q^n \\ &\Rightarrow \; s_n - qs_n = 1 - q^n \\ s_n &= \frac{1-q^n}{1-q} \quad , \quad q \neq 1 \end{aligned}$$

1. Fall: $|q| < 1$ Wegen $\lim\limits_{k\to\infty} q^k = 0$ ist die Reihe konvergent mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q}$.

2. Fall: $|q| > 1$ Da $\{q^k\}$ divergiert, divergiert auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$.

3. Fall: $q = 1$ Wegen $s_n = n$ ist die Reihe (bestimmt) divergent.

4. Fall: $q = -1$ $s_n = 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

Damit ist die Reihe (unbestimmt) divergent.

Satz:
Die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ seien konvergent.

1. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) \quad (\lambda,\, \mu \in \mathbb{R})$,

   und es ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

2. Ist $a_k \leq b_k \; \forall k \in \mathbb{N}$, so gilt: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Beweis: Setze $s_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k, \qquad t_n := \sum\limits_{k=1}^{n} b_k, \qquad u_n := \sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k)$.
Somit ist $u_n = \lambda s_n + \mu t_n$, woraus sich für $n \to \infty$ unter Verwendung der Grenzwertsätze für Zahlenfolgen die Behauptung unter 1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} s_n + \mu \lim\limits_{n\to\infty} t_n$ ergibt.

Aus $a_k \leq b_k \; \forall k \in \mathbb{N}$ folgt $s_n \leq t_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ und die Aussage unter 2. $\square$

Folgerung:
Aus der Konvergenz der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ folgt die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}.$$

1.1.2 Konvergenzkriterien

Satz (Notwendige Bedingung für Konvergenz)**:**
Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so muss die Folge $\{a_k\}$ eine Nullfolge sein.

Beweis: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent, d.h. $\{s_n\}$ ist konvergent.
Nach dem Konvergenzkriterium von Cauchy folgt dann $\lim_{n\to\infty} \underbrace{(s_n - s_{n-1})}_{=a_n} = 0.$ $\square$

Die Umkehrung gilt **nicht**!
Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad \text{(harmonische Reihe)}$$

$$s_{2^l} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{(\frac{1}{3} + \frac{1}{4})}_{>2\cdot\frac{1}{4}} + \underbrace{(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8})}_{>4\cdot\frac{1}{8}} + \underbrace{(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16})}_{>8\cdot\frac{1}{16}} + \cdots + \underbrace{(\frac{1}{2^{l-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^l})}_{>2^{l-1}\cdot\frac{1}{2^l}}$$

$$> 1 + l \cdot \frac{1}{2} \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

d.h. die harmonische Reihe ist divergent!

Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots \qquad \text{(alternierende harmonische Reihe)}$$

$$|s_n - s_{n-1}| = \frac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ s_{2n} < s < s_{2n+1},\ n \in \boldsymbol{N}$$

$$|s - s_n| < \frac{1}{n+1}$$

Definition: (Alternierende Reihe)

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **alternierend**, falls $a_k a_{k+1} < 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Satz: (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)

Eine alternierende Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent, falls $\{|a_k|\}$ eine monoton fallende Nullfolge bildet. Für den Reihenwert s gilt:
$|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$, $\operatorname{sgn}(s - s_n) = \operatorname{sgn}(a_{n+1})$.

Definition: (absolute Konvergenz)

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz: Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.
Die Umkehrung gilt nicht! (Siehe alternierende harmonische Reihe)

Satz: (Quotienten- und Wurzelkriterium)

Es sei $\{a_k\}$ eine Folge mit $a_k > 0$ für $k \geq n_0$ und es existiere

$$q_Q = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \qquad \text{bzw.} \qquad q_W = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}.$$

In beiden Fällen gilt:

$q < 1:$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent

$q > 1:$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist divergent

$q = 1:$ Kriterium macht keine Aussage.

Beispiele:

Mit einem anderen Konvergenzkriterium lässt sich der folgende Satz beweisen.

Satz:

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ ist **konvergent** für $a > 1$ und **divergent** für $a \leq 1$.

Bemerkung zu den Übungsaufgaben

Zahldarstellung im Rechner (hier dezimal):
$\pm 0.\underbrace{d_1 d_2 \dots d_k}_{\text{Mantisse}} \times 10^n, \quad n$: Exponent,
normalisiert $1 \leq d_1 \leq 9,\ d_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\},\ i = 2, 3, \dots, k$
$y = 0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^n$:
Abschneiden (chopping): $\mathrm{ch}(y) = 0.d_1 d_2 \dots d_k \times 10^n$
Runden (rounding): $\quad \mathrm{rd}(y) = \mathrm{ch}(y + 5 \times 10^{-(k+1)})$

Beispiel:

Gegeben sei $p \in \mathbb{R}$ und die Näherung p^* für p.
Dann ist der absolute Fehler gegeben durch $|p - p^*|$
und der relative Fehler durch $\frac{|p - p^*|}{|p|}$, falls $p \neq 0$.

Abschätzen des relativen Fehlers beim Abschneiden

$y = 0.d_1 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^n$ mit $d_1 \geq 1$

$$\left| \frac{y - \mathrm{ch}(y)}{y} \right| = \frac{0.d_1 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^n - 0.d_1 \dots d_k \times 10^n}{0.d_1 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^n}$$

$$= \frac{0.d_{k+1} d_{k+2} \dots \times 10^{n-k}}{0.d_1 \dots \times 10^n} < \frac{1 \times 10^{-k}}{0.1} = 10^{-k+1}$$

Abschätzen des relativen Fehlers beim Runden

1. Fall $d_{k+1} < 5$: $\left|\frac{y - \mathrm{rd}(y)}{y}\right| = \frac{0.d_{k+1}\dots}{0.d_1\dots} \times 10^{-k} < \frac{0.5}{0.1} \times 10^{-k} = 0.5 \times 10^{-k+1}$
2. Fall $d_{k+1} \geq 5$: $\mathrm{rd}(y) = 0.d_1 \dots d_k \times 10^n + 10^{n-k}$

   $\left|\frac{y - \mathrm{rd}(y)}{y}\right| < \frac{0.5}{0.1} \times 10^{-k} = 0.5 \times 10^{-k+1}$, denn:

   $|y - \mathrm{rd}(y)| \leq (0.d_1 \dots d_k + 1 - 0.d_1 d_2 \dots d_k 5) \times 10^n \leq 0.5 \times 10^{n-k}$

Definition: Die Näherung p^* **stimmt mit p auf t Ziffern überein**, falls t die größte nichtnegative ganze Zahl ist, für die gilt

$$\frac{|p - p^*|}{|p|} < 5 \times 10^{-t}.$$

Beispiel:

1.2 Potenzreihen

1.2.1 Definition und Konvergenzverhalten

Definition: (Potenzreihe)

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$
heißt **Potenzreihe** (mit dem **Entwicklungspunkt** x_0). Die Faktoren a_k heißen die **Koeffizienten** der Potenzreihe.
Für $x_0 = 0$ vereinfacht sich die Reihe zu:
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \quad .$

Beispiel:

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots \qquad \text{(geometrische Reihe)}$
$a_k = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,\ x_0 = 0$
Diese Reihe konvergiert für $\forall x \in (-1,\, 1)$, und es gilt für diese x: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.
Die Beziehung bedeutet, dass die Funktion $\frac{1}{1-x}$ auf dem Intervall $(-1,\, 1)$ beliebig genau durch Polynome approximiert werden kann.
Approximation von $\frac{1}{1-x}$ durch Polynome:
$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = 1{+}x, \quad p_2(x) = 1{+}x{+}x^2, \quad p_3(x) = 1{+}x{+}x^2{+}x^3, \quad \ldots$

Satz: (Konvergenz von Potenzreihen)

Die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ ist absolut konvergent in dem Intervall $(x_0 - r,\, x_0 + r)$ mit

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \qquad \text{bzw.} \qquad r = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}\ ,$$

falls diese Grenzwerte existieren;
r heißt der **Konvergenzradius**, (x_0-r, x_0+r) heißt das **Konvergenzintervall**.

Bemerkungen:

1. Die Konvergenz in den Randpunkten $x_0 \pm r$ muss getrennt untersucht werden.
2. Für $r = 0$ konvergiert die Potenzreihe nur für den Entwicklungspunkt x_0,
   für $r = \infty$ konvergiert sie für alle $x \in \mathbb{R}$.
3. Durch die Potenzreihe wird jedem Punkt $x \in (x_0 - r,\, x_0 + r)$ eine Zahl zugeordnet. Damit ist eine auf $(x_0 - r, x_0 + r)$ definierte Funktion f (die durch die Potenzreihe dargestellte Funktion) gegeben:
   $f:\ x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k,$
   $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \quad \forall x \in (x_0 - r,\, x_0 + r).$

Beweis: (nur für $r = \dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$ und $x_0 = 0$)

1. Fall: $q := \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existiert.

Es ist $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k||x|^k} = |x| \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x| \cdot q.$

a) Ist $q = 0$, so ist auch $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ und nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut.

b) Ist $q > 0$, so ist $|x|q < 1$, falls $|x| < \frac{1}{q}$, d.h. für alle x mit $|x| < \frac{1}{q}$ konvergiert die Potenzreihe absolut.
Ist $|x| > \frac{1}{q}$, so ist $|x|q > 1$ und damit die Reihe divergent.

2. Fall: Ist $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ divergent, so ist für $x \neq 0$ auch die Folge $\{\sqrt[k]{|a_k x^k|}\}$ divergent, woraus die Divergenz für $x \neq 0$ folgt.

Beispiele:

1.2.2 Die Taylor-Reihe

Frage: Wie und unter welchen Voraussetzungen erhält man zu einer gegebenen Funktion die zugehörige Potenzreihe?

O.B.d.A.: $x_0 = 0$

Ansatz: $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots \Rightarrow f(0) = a_0$

Annahme: Es darf gliedweise differenziert werden.
Dann folgt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + \dots + k a_k x^{k-1} + \dots && \Rightarrow f'(0) = a_1 \\
f''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + \dots + k(k-1) a_k x^{k-2} + \dots && \Rightarrow f''(0) = 2a_2 \\
f'''(x) &= 6a_3 + 24 a_4 x + \dots + k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3} + \dots && \Rightarrow f'''(0) = 6a_3 \\
f^{(k)}(x) &= k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot a_k + x(\dots) && \Rightarrow f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k
\end{aligned}$$

$a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

Für die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ erhält man entsprechend

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

a_k heißt k-ter **Taylor-Koeffizient**.

Satz von Taylor:

Die Funktion f sei in der Umgebung der Stelle x_0 $(n+1)$-mal differenzierbar; dann gilt die **Taylor-Entwicklung**:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x);$$

dabei gibt es eine Stelle u zwischen x_0 und x, so dass sich das **Restglied** R_n darstellen lässt in der Form

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Im Sonderfall $x_0 = 0$ liefert die Taylor-Entwicklung

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad mit \quad 0 \leq \vartheta \leq 1.$$

$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ heißt n-tes **Taylor-Polynom**;
$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ heißt **Restglied** der Taylor-Entwicklung von f um x_0.

Art der Annäherung:

$n = 0$:	$P_0(x) = f(x_0)$ durch die Gerade $y = f(x_0)$
$n = 1$:	$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ durch die Kurventangente im Punkt $(x_0,\ f(x_0))$
$n = 2$:	$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$ durch die durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ verlaufende Parabel, die dort die gleiche Tangente und Krümmung hat wie f.

Beispiele:

Ist die Funktion f in (a,b) mit $x_0 \in (a,b)$ beliebig oft differenzierbar, so erhält man für $n \to \infty$ die **Taylor-Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Beispiele:

Gesucht ist die Taylor-Reihe der folgenden Funktionen um $x_0 = 0$:

1. $f(x) = \mathrm{e}^x$; es ist $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x,\ f^{(k)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1\ \forall k \in \mathbb{N}_0$
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ist damit die Taylor-Reihe zu e^x.
2.

Nicht jede beliebig oft differenzierbare Funktion wird durch ihre Taylor-Reihe dargestellt. Es gilt jedoch:

Satz: Es sei f auf (a,b) beliebig oft differenzierbar mit $x_0 \in (a,b)$. Dann konvergiert die Taylor-Reihe zu f gegen f, wenn gilt:

$$\forall x \in (a,b) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0.$$

Bemerkungen:

1. Ist $0 < r < \infty$ der Konvergenzradius der Taylor-Reihe von f, so wird f höchstens auf $[x_0 - r, x_0 + r]$ durch die Taylor-Reihe dargestellt.
2. Die Darstellung einer Funktion durch ihre Taylor-Reihe ist dasselbe wie die Darstellung als Potenzreihe.
   Sofern es möglich ist, verwende man bekannte Potenzreihenentwicklungen, um die Taylor-Reihe einer bestimmten Funktion anzugeben.

Beispiele:

Binomische Reihe

Die Taylor-Reihe zu $(1+x)^a$ ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \quad (a \in \mathbb{R})$

1. Fall: $a \in \mathbb{N}$; wegen $\binom{a}{k} = 0$ für $k > a$ bricht die Taylor-Reihe nach dem Term mit x^a ab. Die Taylor-Reihe liefert die binomische Entwicklung.
2. Fall: Für $a \notin \mathbb{N}$ gilt $\binom{a}{k} \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $r = 1$, d.h. die Reihe ist konvergent für $\forall x \in (-1, 1)$, ja, es gilt sogar, dass auf diesem Intervall die Funktion $(1+x)^a$ durch ihre Taylor-Reihe dargestellt wird.

1.2.3 Rechnen mit Potenzreihen

O.B.d.A. sei im folgenden $x_0 = 0$ gewählt.

Bemerkung: Alle nachstehenden Sätze übertragen sich sinngemäß auf Potenzreihen mit beliebigen Entwicklungspunkten.

Satz: (Differentiation und Integration von Potenzreihen)

Jede Potenzreihe ist in ihrem Konvergenzintervall beliebig oft (gliedweise) differenzier- und integrierbar. Die Potenzreihen der Ableitungen und der Stammfunktionen haben denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.

Insbesondere gilt:
Es sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Reihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist die durch gliedweise Differentiation entstehende Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ und es gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \quad , x \in (-r, r)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)'' = 2a_2 + 6a_3 x + \dots \quad , x \in (-r, r),$$

$\dots$

Ferner gilt:

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int x^k \, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} \quad , x \in (-r, r) \;;$$

denn: Ist F gegeben durch $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$, dann gilt:

$$F'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Beispiele:

Satz: (Identitätssatz für Potenzreihen)

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1, r_2 > 0$ mit $r := \min(r_1, r_2)$ und gilt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad \forall x \in (-r, r)$, so folgt $a_k = b_k \ \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

Aus $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ folgt für $x = 0$: $a_0 = b_0$,
aus $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k x^{k-1}$ folgt für $x = 0$: $a_1 = b_1$
usw.

Satz: (Addition und Multiplikation von Potenzreihen)

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1, r_2 > 0$. Dann gilt für alle x, $x \in (-r, r)$, wobei $r := \min(r_1, r_2)$,

- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$
- $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} \right) \cdot x^k$

Beispiele:

Division von Potenzreihen

Den Quotienten $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ zweier Potenzreihen mit nichtverschwindenden Konvergenzradien $u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ und $v(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$ erhält man nach dem folgenden Schema:
Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten

$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$

Multiplikation der Potenzreihen von f und v und anschließender Koeffizientenvergleich der Potenzreihen $f(x) \cdot v(x)$ und $u(x)$ ergibt die Koeffizienten c_k.

Beispiele zur Substitution bei Potenzreihen:

1.2.4 Anwendungen

1.2.4.1 Untersuchung von unbestimmten Ausdrücken

1.2.4.2 Berechnung nicht-elementarer Integrale

Die in der Statistik oft verwendete Funktion

$$G(x) = \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,dt \qquad \text{Gaußsches Fehlerintegral}$$

lässt sich nicht mit elementaren Funktionen darstellen, daher ist man auf Näherungswerte angewiesen.
Mögliche Vorgehensweise:

1. Reihenentwicklung des Integranden
2. gliedweise Integration der Reihe

2 Funktionen mehrerer Veränderlicher

2.1 Funktionen mehrerer Veränderlicher und ihre Darstellung

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$
Betrachtet werden Funktionen $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$
W_f bezeichnet den Wertebereich von f.
Speziell $n = 2 : \quad z = f(x, y)$
$n = 3 : \quad w = f(x, y, z)$

Beispiele:

1. Ohmsches Gesetz $u = u(R, i) = R \cdot i$
2. Der Gesamtwiderstand R eines Stromkreises mit Einzelwiderständen R_1, R_2, R_3 betrage $R = R(R_1, R_2, R_3) = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$. Er wird beschrieben durch die Funktion $f(x, y, z) = x + \frac{y \cdot z}{y+z}$ mit dem Defintionsbreich
$D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x, y, z \geq 0, y + z > 0\} = [0, \infty)^3 \setminus \{(x, 0, 0) | x \in \mathbb{R}\}$.

Im Fall $n = 2$ wird durch die Funktionsgleichung $z = f(x, y)$ jedem Zahlenpaar $(x_0, y_0) \in D_f$ genau ein Funktionswert $z_0 = f(x_0, y_0)$ zugeordnet. Wir fassen das Zahlentripel (x_0, y_0, z_0) als kartesische Koordinaten eines Punktes P_0 im dreidimensionalen Anschauungsraum auf. Der Funktionswert z_0 besitzt dabei die geometrische Bedeutung einer Höhenkoordinate. $P(x_0, y_0, z_0)$ liegt im Abstand $|z_0|$ ober- oder unterhalb der x, y-Ebene, je nachdem, ob $z_0 > 0$ oder $z_0 < 0$ ist. Liegt $P(x_0, y_0, z_0)$ in der x, y-Ebene, so ist $z_0 = 0$. Ordnet man auf diese Weise jedem Zahlenpaar $(x, y) \in D_f$ einen Raumpunkt $P(x, y, z)$ mit $z = f(x, y)$ zu, so erhält man eine über dem Definitionsbereich von f liegende Fläche.

Beispiel: Ebenen im Raum

Allgemeine Form der Ebenengleichung im Fall $n = 3$: $ax + by + cz + d = 0$
Spezialfall: Koordinatenebenen

x, y-Ebene: $z = 0$
y, z-Ebene: $x = 0$
x, z-Ebene: $y = 0$
Parallelebenen zu den Koordinatenebenen
z.B. $z = a, \quad a$ konst.

Die perspektivische Darstellung räumlicher Flächenstücke ist oft aufwändig. Man begnügt sich daher häufig mit einer partiellen Darstellung der Funktion f, indem man Schnitte durch die Fläche von f parallel zu den Koordinatenebenen legt. Dies geschieht, indem man eine der Variablen konstant hält. Die dabei entstehenden ebenen Schnittkurven werden dann in der entsprechenden Parallelebene dargestellt.

Beispiel: $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$
Schnitte parallel zur x, y-Ebene: $z = c,\ 4 - x^2 - y^2 = c \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 - c$
Dies ergibt eine Schar konzentrischer Ursprungskreise von Radius $\sqrt{4 - c}$.
Schnitte parallel zur y, z-Ebene: $x = c,\ z = \underbrace{4 - c^2}_{=:k} - y^2 = k - y^2$ und Schnitte parallel zur x, z-Ebene: $y = c,\ z = 4 - x^2 - c^2 = k - x^2$ ergeben jeweils eine einparametrige Parabelschar.

2.2 Grenzwert und Stetigkeit

Im $\mathbb{R}^1$ kann man sich einer Stelle x_0 von zwei Seiten her nähern, während man sich im $\mathbb{R}^2$ einer Stelle (x_0, y_0) auf beliebigen Wegen nähern kann.

Definition (n =2): Es seien $\{x_k\}, \{y_k\}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Dann heißt $\{(x_k, y_k)\}$ **Punktfolge** im $\mathbb{R}^2$.
Falls $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$ und $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = b$, so heißt die Punktfolge $\{(x_k, y_k)\}$ **konvergent gegen** (a, b).
Schreibweise: $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k, y_k) = (a, b)$ bzw. $(x_k, y_k) \to (a, b)$ $(k \to \infty)$
Die Funktion f heißt **stetig** an der Stelle (x_0, y_0), wenn für **jede** gegen (x_0, y_0) konvergente Punktfolge $\{(x_k, y_k)\}$ aus dem Definitionsbereich von f gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = f(x_0, y_0).$$

Die Definition für $n > 2$ erfolgt entsprechend.

2.3 Differentialrechnung

2.3.1 Partielle Ableitung

Schnitt der Fläche mit der Ebene $\boldsymbol{y = y_0}$

Flächenkurve $k_1: \; z = f(x, y_0) =: g(x)$

$$m_x = \tan\alpha = g'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Existiert dieser Grenzwert, so heißt f **partiell differenzierbar nach $\boldsymbol{x}$** an der Stelle (x_0, y_0) und dieser Grenzwert heißt die **partielle Ableitung** von $z = f(x, y)$ **nach $\boldsymbol{x}$** an der Stelle (x_0, y_0).

Bezeichnung:

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{oder} \quad z_x(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Schnitt der Fläche mit der Ebene $\boldsymbol{x = x_0}$

Flächenkurve $k_2: \; z = f(x_0, y) =: h(y)$

$$m_y = \tan\beta = h'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{h(y_0 + \Delta y) - h(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Existiert dieser Grenzwert, so heißt f **partiell differenzierbar nach $\boldsymbol{y}$** an der Stelle (x_0, y_0) und dieser Grenzwert heißt die **partielle Ableitung von** $z = f(x, y)$ **nach $\boldsymbol{y}$** an der Stelle (x_0, y_0).

Bezeichnung:

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{oder} \quad z_y(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Besitzt f in jedem Punkt aus einer Teilmenge ihres Definitionsbereiches eine partielle Ableitung nach x, so heißt f in dieser Menge partiell differenzierbar nach x und die partielle Ableitung nach x ist selbst wieder eine Funktion von x und y.
Analog gilt dies auch für die partielle Ableitung nach y.

Entsprechend gilt für $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:
$\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bezeichnet die partielle Ableitung von f nach x_i.

Beispiel: $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x(x,y) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \cdot (-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y(x,y) = -\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

Definition (Gradient): Ist die Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ an der Stelle $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in D$ partiell differenzierbar nach $x_1, \ldots, x_n$, so heißt der Vektor

$$\nabla f(\xi) = \mathrm{grad} f(\xi) := (f_{x_1}(\xi), f_{x_2}(\xi), \ldots, f_{x_n}(\xi))^T$$

der **Gradient** von f an der Stelle ξ. (∇ wird geprochen als „Nabla“)

Beispiel: $f(x,y,z) = x + \dfrac{yz}{y+z}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{z^2}{(y+z)^2}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{y^2}{(y+z)^2}$

$\nabla f(\xi) = \mathrm{grad} f(\xi) = (1, \dfrac{\xi_3^2}{(\xi_2+\xi_3)^2}, \dfrac{\xi_2^2}{(\xi_2+\xi_3)^2})^T$

Diskussion: Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit

Beispiel: $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } xy = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$
f ist im Ursprung unstetig, aber dort partiell differenzierbar nach x und y.

Satz: Wenn f_x und f_y in einer Umgebung von (x_0, y_0) existieren und in diesem Punkt stetig sind, dann ist die Funktion f in (x_0, y_0) stetig.

2.3.2 Tangentialebene und totales Differential

$n = 1:$ Gleichung der Tangente $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$
$n = 2:$ $z = f(x, y)$
Die **Tangentialebene** der Funktion $z = f(x, y)$ im Flächenpunkt $P(x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ enthält sämtliche Tangenten, die im Punkt P an die Fläche gelegt werden können.

Herleitung der Gleichung der Tangentialebene $z = ax + by + c$
Übereinstimmung der Anstiege von Ebene und Fläche im Punkt P

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b$$

P liegt sowohl auf der Fläche als auch in der Ebene, d.h.
$z_0 = ax_0 + by_0 + c \Rightarrow c = z_0 - ax_0 - by_0 = z_0 - f_x(x_0, y_0)x_0 - f_y(x_0, y_0)y_0$.
Damit lautet die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Flächenpunkt $P(x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0 = \left(\nabla f(x_0, y_0)\,, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right) + z_0$$

Beispiel: Es sei $f(x, y) = x\cos(x + y) + (y - 1)^2 \mathrm{e}^{-x^2}$.
Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene im Ursprung?
$z_0 = f(0, 0) = 1$
$f_x(x, y) = \cos(x + y) - x\sin(x + y) + (y - 1)^2 \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2x), \quad f_x(0, 0) = 1$
$f_y(x, y) = -x\sin(x + y) + \mathrm{e}^{-x^2} \cdot 2(y - 1), \quad f_y(0, 0) = -2$
$z = 1(x - 0) + (-2)(y - 0) + 1 = x - 2y + 1$

Totales Differential $P(x_0, y_0, z_0)$ mit $z_0 = f(x_0, y_0)$ sei ein Punkt auf der Fläche der Funktion $z = f(x, y)$. Welche Änderung erfährt der Funktionswert, d.h. die Höhenkoordinate z_0 des Flächenpunktes, bei seiner Verschiebung

1. auf der Fläche selbst
2. auf der Tangentialebene in P?

1. Verschiebung auf der Fläche:
   Die Koordinatenänderungen werden bezeichnet mit $\Delta x, \Delta y, \Delta z$
   $P(x_0, y_0, z_0) \to Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$
   $x_0 \to x_0 + \Delta x, \quad y_0 \to y_0 + \Delta y, \quad \Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$
2. Verschiebung auf der Tangentialebene:
   Koordinatenänderungen werden bezeichnet mit dx, dy, dz, wobei $dx = \Delta x, dy = \Delta y$
   $P(x_0, y_0, z_0) \to Q'(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$
   $dx = x - x_0, \quad dy = y - y_0, \quad dz = z - z_0$
   Aus der Gleichung der Tangentialebene ergibt sich
   $dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$

Für kleine Werte von $dx = \Delta x$ und $dy = \Delta y$ ergibt sich näherungsweise $\Delta z \approx dz = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$, d.h. die Fläche $z = f(x, y)$ darf in unmittelbarer Umgebung der Punktes P näherungsweise durch die Tangentialebene ersetzt werden („Linearisierung“).

Definition: (Totales Differential) $dz = f_x(x_0, y_0)\, dx + f_y(x_0, y_0)\, dy$ heißt das **totale (vollständige) Differential** der Funktion $z = f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0).

Die Variable x und y mögen von dem Parameter t abhängen,

$$z = z(t) = f(x(t), y(t)) \ .$$

Formales Dividieren des totalen Differentials dz durch dt liefert die **Kettenregel für Funktionen zweier Veränderlicher**.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Übertragen auf Funktionen mit n Variablen $z = f(x_1, \dots, x_n)$, erhalten wir das totale Differential

$$dz = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \big(\nabla f(x), dx\big), \text{ wobei } dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix},$$

Kettenregel für Funktionen $z(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}\,.$$

Nachfolgend leiten wir eine wichtige Eigenschaft des Gradienten im Fall $n = 2$ her. Die Herleitung für $n > 2$ erfolgt entsprechend.

Gegeben sei die Funktion $z = f(x, y)$. Der Gradient von f an der Stelle $(x_0, y_0) \in D_f$ lässt sich schreiben als

$$\nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathrm{e}^{(1)} + f_y(x_0, y_0)\mathrm{e}^{(2)}$$

und das Differential von f an der Stelle (x_0, y_0) infolgendessen als

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy = \Big(\nabla f(x_0, y_0), dx\mathrm{e}^{(1)} + dy\mathrm{e}^{(2)}\Big) .$$

Es bezeichne $\varphi = \angle\Big(\nabla f(x_0, y_0), dx\mathrm{e}^{(1)} + dy\mathrm{e}^{(2)}\Big)$.
Dann gilt (vgl. Diskrete Mathematik, § 4.5)

$$dz = ||dx\mathrm{e}^{(1)} + dy\mathrm{e}^{(2)}||\;||\nabla f(x_0, y_0)|| \cos\varphi .$$

Wir betrachten nun nur Ortszuwächse $dx\mathrm{e}^{(1)} + dy\mathrm{e}^{(2)}$, deren Endpunkte auf einem Kreis vom kleinen Radius r liegen.
Dann ist $dz = r||\nabla f|| \cos\varphi$ allein abhängig vom Winkel φ.
Unter der Annahme $\nabla f \neq 0$ nimmt dz seinen größten Wert für $\varphi = 0$ an.
Da das Differential näherungsweise die Änderung der Funktion in Abhängigkeit vom Argumentzuwachs beschreibt, nimmt die Funktion f am stärksten in der Richtung zu, die durch den Gradienten gekennzeichnet ist.
Entfernt man sich vom Flächenpunkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, in einer zum Gradienten senkrecht verlaufenden Richtung, so ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, was $dz = 0$ ergibt. Das zeigt, dass die Funktion f in dieser Richtung (näherungsweise) stationär ist.

Ergebnis: Der Gradient einer Funktion f gibt die Richtung des größten Wachstums der Funktion an. Seine Norm ist ein Maß für das Anwachsen in dieser Richtung. Der Gradient steht senkrecht auf der durch den entsprechenden Flächenpunkt verlaufenden Höhenlinie.

2.3.3 Höhere partielle Ableitungen

Gegeben sei $z = f(x, y)$

$$\begin{array}{ccc} & f(x,y) & \\ \swarrow & & \searrow \\ f_x(x,y) & & f_y(x,y) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \swarrow & \searrow & & & \swarrow & \searrow & \\
 & f_{xx} & f_{xy} & & & f_{yx} & f_{yy} & \\
\swarrow & \downarrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \downarrow & \searrow \\
f_{xxx} & f_{xxy} & f_{xyx} & f_{xyy} & f_{yxx} & f_{yxy} & f_{yyx} & f_{yyy}
\end{array}$$

Schreibweisen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f_x)_x = f_{xx}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f_x)_y = f_{xy}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f_y)_x = f_{yx}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (f_y)_y = f_{yy}$$

$w = f(x,y,z):$ $\qquad ((f_x)_y)_z = f_{xyz} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ usw.

Beispiel: $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\cos y, \qquad f_x = -\mathrm{e}^{-x}\cos y, \qquad f_y = -\mathrm{e}^{-x}\sin y$
$f_{xx} = \mathrm{e}^{-x}\cos y, \qquad f_{xy} = \mathrm{e}^{-x}\sin y, \qquad f_{yx} = \mathrm{e}^{-x}\sin y, \qquad f_{yy} = -\mathrm{e}^{-x}\cos y$

Satz von Schwarz: Falls die gemischten Ableitungen stetig sind, dürfen die einzelnen Differentiationsschritte vertauscht werden.

Beispiel: $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$

Im Fall $n = 2$ reduziert sich dann die Anzahl der zu berechnenden partiellen Ableitungen 2. und 3. Ordnung von 4 auf 3 bzw. von 8 auf 4.

2.4 Relative Extrema

2.4.1 Definitionen und Beispiele

Definitionen: Es sei $M \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \to \mathbb{R}$. f besitzt an der Stelle $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in D$ ein **relatives Maximum** (bzw. **relatives Minimum**), wenn in einer Umgebung von ξ gilt

$$f(x) < f(\xi) \quad (\text{bzw. } f(\xi) < f(x)) \quad \forall x \neq \xi;$$

f besitzt an der Stelle $\xi \in M$ sein **absolutes (globales) Maximum** (bzw. **Minimum**) **auf** M, falls gilt

$$f(x) \leq f(\xi) \quad (\text{bzw. } f(\xi) \leq f(x)) \quad \forall x \in M$$

Ist $M = D$, so lässt man häufig den Zusatz „auf M“ fort.

Beispiele:

2.4.2 Notwendige und hinreichende Bedingungen für ein relatives Extremum

Satz: (Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines relativen Extremums) Die Bedingung $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$ ist notwendig für die Existenz eines relativen Extremums an der Stelle (x_0, y_0) einer Funktion f, deren partielle Ableitungen an dieser Stelle existieren.

Beispiel: $z = f(x, y) = x^2 - y^2, \quad x_0 = y_0 = 0$
$f_x = 2x, \quad f_x(0,0) = 0, \quad f_y = -2y, \quad f_y(0,0) = 0$
d.h. die notwendige Bedingung ist erfüllt.
Schnitt der Fläche mit der x, z-Ebene $(y = 0)$ $z = x^2$
Schnitt der Fläche mit der y, z-Ebene $(x = 0)$ $z = -y^2$
$\Rightarrow f(x, y)$ besitzt im Ursprung kein relatives Extremum.
Der Flächenpunkt $(0, 0, 0)$ ist ein sogenannter **Sattelpunkt**.

Verallgemeinerung auf Funktionen von n Veränderlichen: Notwendig für das Vorliegen eines relativen Extremums an der Stelle ξ einer Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$, deren sämtliche partiellen Ableitungen dort existieren, ist das Verschwinden dieser Ableitungen an der Stelle ξ, d.h.

$$\nabla f(\xi) = \mathrm{grad} f(\xi) = 0.$$

Eine solche Stelle ξ heißt **stationäre Stelle** von f.

Dies ist jedoch nur ein notwendiges Kriterium und kein hinreichendes!

Satz: (Hinreichende Bedingung für ein relatives Extremum)
Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}^n$ besitze stetige erste und zweite partielle Ableitungen. Dann hat f an der Stelle (x_0, y_0) ein relatives Extremum, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1. $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$
2. Es gilt die Ungleichung

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$$

Ist ferner $f_{xx}(x_0, y_0) \begin{Bmatrix} < 0 \\ > 0 \end{Bmatrix}$ (bzw. $f_{yy}(x_0, y_0) \begin{Bmatrix} < 0 \\ > 0 \end{Bmatrix}$), so liegt ein relatives $\begin{Bmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{Bmatrix}$ vor.

Bemerkung:
Gilt $\Delta(x_0, y_0) < 0$, so liegt ein Sattelpunkt vor.
Im Falle $\Delta(x_0, y_0) = 0$ macht das Kriterium keine Aussage.

Vorgehensweise zum Auffinden relativer Extrema:

1. Ermittlung aller stationären Stellen.
2. Für sämtliche dieser Stellen wird das Vorzeichen von Δ ermittelt.
3. Untersuchung der verbleibenden Punkte, in denen $\Delta = 0$ ist oder f nicht hinreichend oft differenzierbar ist.

Falls die absoluten Extrema von f auf $M \subseteq D_f$ zu bestimmen sind und M Randpunkte enthält, sind ferner noch die Randextremwerte zu ermitteln und mit den relativen Extrema zu vergleichen.

Beispiel: Man bestimme die absoluten Extremwerte der Funktion
$z = f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$ im Bereich $-1 \leq x, y \leq 1$.

Bestimmung und Untersuchung der stationären Stellen

$f_x = -2x(y-2x^2) + (y-x^2)(-4x) = -2xy + 4x^3 - 4xy + 4x^3 = -2x(-4x^2+3y)$
$f_y = y - 2x^2 + y - x^2 = 2y - 3x^2$
$f_x = 0$ und $f_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x = 0$ oder $4x^2 = 3y$
$\Rightarrow \quad x^2 = 3/4y$ und $3x^2 = 2y \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2/3y,$
Dies ist nur möglich, wenn $x = y = 0$ ist; also ist $(0,0)$ die einzige stationäre Stelle.
$f_{xx} = -6y + 24x^2, \quad f_{xy} = -6x, \quad f_{yy} = 2$
$\Delta(0,0) = 0$, d.h. das Kriterium macht keine Aussage!

Untersuchung von f in der Nähe des Ursprungs:
$f(0,y) = y^2$

$f(x,0) = 2x^4$

Für $y = ax$ folgt $f(x,ax) = (ax - x^2)(ax - 2x^2) = x^2(a-x)(a-2x)$
Man könnte nun glauben, dass bei $(0,0)$ ein relatives Minimum vorliegt,
aber
$f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = x^2 \;\vee\; y = 2x^2$
$f(x,y) > 0 \Leftrightarrow [(y - x^2 > 0 \wedge y - 2x^2 > 0)] \vee [(y - x^2 < 0 \wedge y - 2x^2 < 0)]$
$\Leftrightarrow y > 2x^2 \vee y < x^2$

$f(x,y) < 0 \Leftrightarrow [(y - x^2 < 0 \wedge y - 2x^2 > 0)] \vee [(y - x^2 > 0 \wedge y - 2x^2 < 0)]$
$\Leftrightarrow x^2 < y < 2x^2$

In jeder noch so kleinen Umgebung um den Ursprung nimmt die Funktion f sowohl positive als auch negative Werte an. Daher liegt im Ursprung **kein** relatives Extremum vor.

Untersuchung des Randes:
$f(\pm 1, y) = (y-1)(y-2) = y^2 - 3y + 2 =: h(y)$
$h'(y) = 2y - 3, \quad h'(y) = 0 \Rightarrow y = 3/2 > 1$
$f(x,1) = (1-x^2)(1-2x^2) = 2x^4 - 3x^2 + 1 =: g(x)$
$g'(x) = 8x^3 - 6x = 2x(4x^2-3), \quad g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$f(x,-1) = (1+x^2)(1+2x^2)$ wird minimal für $x = 0$

Als Randextremwerte kommen mithin in Frage:
$(0,1), (\frac{1}{2}\sqrt{3},1), (-\frac{1}{2}\sqrt{3},1), (0,-1)$
sowie die 4 Randpunkte $(\pm 1, \pm 1)$
$f(\pm 1,-1) = 6, \quad f(0,\pm 1) = 1, \quad f(\pm 1, 1) = 0, \quad f(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3},1) = -1/8.$

Ergebnis: Das absolute Maximum von f wird angenommen an der Stelle $(\pm 1,-1)$ und das absolute Minimum bei $(\pm\frac{1}{2}\sqrt{3},1)$.