

Skriptum zu der Vorlesung

Mathematik 2

- Analysis -

Teil II

AIT

Jürgen Garloff

Hochschule Konstanz für Technik, Wirtschaft und Gestaltung
Fakultät für Informatik

Januar 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGLn)	4
1.1	Grundbegriffe	4
1.1.1	Einführendes Beispiel	4
1.1.2	Definition einer DGL	5
1.1.3	Lösung einer DGL	5
1.1.4	Anfangswertproblem	6
1.2	DGLn 1. Ordnung	7
1.2.1	Richtungsfeld	7
1.2.2	DGL $y' = ky$	9
1.2.3	Separierbare DGLn	10
1.2.4	Auf separierbare DGLn zurückführbare DGLn	11
1.2.5	Lineare DGLn 1. Ordnung	13
1.2.5.1	Lösung der homogenen DGL	13
1.2.5.2	Lösung der inhomogenen DGL	13
1.2.5.3	Lineare DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten	17
1.3	Lineare DGLn 2. und höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	18
1.3.1	Eigenschaften der homogenen DGL	18
1.3.2	Lösung der homogenen DGL	22
1.3.2.1	Lineare DGLn 2. Ordnung	22
1.3.2.2	Lineare DGLen höherer Ordnung	25
1.3.3	Lösung der inhomogenen DGL	27
1.4	Systeme von DGLn	30
2	Reihen	1
2.1	Zahlenreihen	1
2.1.1	Definition und Konvergenz	1
2.1.2	Konvergenzkriterien	4
2.2	Potenzreihen	7
2.2.1	Definition und Konvergenzverhalten	7
2.2.2	Die Taylor-Reihe	10
2.2.3	Rechnen mit Potenzreihen	15
2.2.4	Anwendungen	18
2.2.4.1	Untersuchung von unbestimmten Ausdrücken	18
2.2.4.2	Berechnung nicht-elementarer Integrale	19
2.2.4.3	Eulersche Formel	19

2.3	Fourier-Reihen	20
2.3.1	Trigonometrische Reihen und Fourier-Reihen im 2π -periodischem Fall	20
2.3.2	Beispiele von Fourier-Reihen	25
2.3.3	Fourier-Reihe einer Funktion mit beliebiger Periodenlänge	26
2.3.4	Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe	28
3	Fourier-Transformation	31
3.1	Spektraldichte	31
3.2	Vorbereitungen	35
3.2.1	Einheitssprungfunktion	35
3.2.2	Einheitsimpuls	37
3.2.3	Faltung	40
3.3	Die Fourier-Transformation und ihre Umkehrung	41
3.3.1	Definition und Existenz der Fourier-Transformierten	41
3.3.2	Umkehrformel	43
3.3.3	Darstellungen der Spektraldichte	44
3.4	Eigenschaften der Fourier-Transformation	46
3.5	Weitere Beispiele und Anwendungen	54
3.5.1	Fourier-Transformierte des Einheitsimpulses	54
3.5.2	Fourier-Transformierte der Einheitssprungfunktion	54
3.5.3	Beweis des Integrationsatzes	56
3.5.4	Fourier-Transformierte des Dreieckimpulses	56
3.5.5	Fourier-Transformierte periodischer Funktionen	57
4	Laplace-Transformation	60
4.1	Herleitung aus der Fourier-Transformation	60
4.2	Definitionen und Beispiele	61
4.3	Eigenschaften der Laplace-Transformation	64
4.4	Lösung von linearen DGLen mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe der Laplace-Transformation	69

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGLn)

1.1 Grundbegriffe

1.1.1 Einführendes Beispiel

Betrachtet wird ein nach oben geworfener Körper. Auf diesen wirkt die Anziehungskraft der Erde und bewirkt eine der Wurfrichtung entgegengesetzte Fallbeschleunigung.

Fallbeschleunigung $\ddot{s}(t) = -g$

Gesucht ist das Weg-Zeit-Gesetz $s(t)$.

$\ddot{s}(t) = -g$ ist die Differentialgleichung des freien Falls ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Lösung dieser Differentialgleichung durch Integration

$$\dot{s}(t) = \int \ddot{s}(t) dt = \int -g dt = -gt + C_1$$

$$s(t) = \int \dot{s}(t) dt = \int (-gt + C_1) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ bel.}$$

ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

$t = 0$:

$C_1 = \dot{s}(0)$ ist die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = v(0)$

$C_2 = s(0)$ ist die Anfangshöhe $s_0 = s(0)$

Durch Angabe der Anfangshöhe s_0 und Anfangsgeschwindigkeit v_0 ist die Lösung der Differentialgleichung eindeutig festgelegt

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0.$$

1.1.2 Definition einer DGL

Definition (DGL): Eine Gleichung, in der Ableitungen einer (noch unbekanntes) Funktion auftreten, heißt **Differentialgleichung** (abgekürzt mit DGL). Die Ordnung der in der DGL auftretenden höchsten Ableitung heißt die **Ordnung** der DGL.

Explizite Form einer DGL: $y^{(n)} = f(x; y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Implizite Form einer DGL: $F(x; y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

Beispiele:

- | | |
|--|-------------------------|
| 1. $\ddot{s}(t) = -g$ | 2. Ordnung und explizit |
| 2. $\frac{d^2y}{dx^2} = xy^2 + \frac{dy}{dx} \cos x$ | 2. Ordnung und explizit |
| 3. $x \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)^2 + \cos y = 0$ | 3. Ordnung und implizit |

1.1.3 Lösung einer DGL

Definition: Eine Funktion $y = \varphi(x)$ heißt **Lösung** oder **Integral der Differentialgleichung**

$$F(x; y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad y^{(n)} = f(x; y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

auf dem Intervall I , wenn

- φ auf dem Intervall I n -mal differenzierbar ist und
- $F(x; \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n)}) = 0$
bzw.
 $\varphi^{(n)} = f(x; \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$
für alle $x \in I$ gilt.

Beispiele:

- Gesucht sind sämtliche Funktionen y mit $y' = 2x$.
Lösung: $y = x^2 + C$
- $\ddot{s} = -g$, $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$
Bedingung 1: erfüllt
Bedingung 2: $\dot{s}(t) = -gt + C_1$, $\ddot{s}(t) = -g$

3. $y' + y \tan x = \frac{1}{\cos x}, \quad I = (-\pi/2, \pi/2)$

Behauptung: $y = \sin x + C \cos x$ ist Lösung für alle $C \in \mathbb{R}$.

y und $y' = \cos x - C \sin x$ eingesetzt in die DGL liefert:

$$\cos x - C \sin x + (\sin x + C \cos x) \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

4. **Schwingungsgleichung:**

Harmonische Schwingung $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad \omega > 0$

$$\dot{y}(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{y}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 y(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

Definition (Allgemeine und spezielle Lösung): Die Menge aller Lösungen einer DGL heißt deren **allgemeine Lösung**; sie enthält Konstanten, die als **Integrationskonstanten** bezeichnet werden.

Jede durch eine spezielle Wahl aller Konstanten in der allgemeinen Lösung entstehende Lösung der DGL heißt **spezielle** oder **partikuläre** Lösung.

Anmerkung: Es gibt jedoch DGLn, die keine (reellen) Lösungen besitzen, z.B. $(y')^2 = -1$.

1.1.4 Anfangswertproblem

Definition (Anfangswertproblem): Gegeben sei die Differentialgleichung $y^{(n)} = f(x; y, y', \dots, y^{(n-1)})$, ein Intervall I sowie $x_0 \in I, y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Dann bezeichnet man als **Anfangswertproblem** die Aufgabe, eine Funktion y zu finden, die

1. der Differentialgleichung auf dem Intervall I genügt und
2. die Bedingung

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad (*)$$

erfüllt.

Die Werte $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ heißen **Anfangswerte**, die Bedingungen $(*)$ **Anfangsbedingungen**, x_0 heißt **Anfangspunkt**.

Beispiele:

1. DGL $y' = 2x$, $y(1) = 3$

allgemeine Lösung: $y(x) = x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$

$$3 = y(1) = 1 + C \Rightarrow C = 2$$

gesuchte Lösung: $y(x) = x^2 + 2$

2. Die DGL $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ beschreibt die harmonische Schwingung eines elastischen Federpendels. Gegeben seien die folgenden Anfangsbedingungen:

$y(0) = y_0 > 0$: das Federpendel besitzt zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Auslenkung in positiver Richtung

$\dot{y}(0) = 0$: Bewegung erfolgt aus der Ruhelage heraus.

Allgemeine Lösung der DGL lautet (s. § 1.1.3):

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad A > 0, \varphi \in [0, 2\pi)$$

Amplitude A und Phase φ werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt:

$$y(0) = y_0 \Rightarrow A \sin \varphi = y_0 \Rightarrow \varphi \in (0, \pi), \text{ da } y_0, A > 0$$

$$\dot{y}(0) = A\omega \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2, \text{ da } A, \omega > 0 \text{ und } \varphi \in (0, \pi)$$

$$\Rightarrow A = y_0, \quad \text{da } y(0) = A \sin \varphi = \underbrace{A \sin \pi/2}_1 = y_0$$

Die Lösung lautet $y(t) = y_0 \sin(\omega t + \pi/2) = y_0 \cos(\omega t)$, $t \geq 0$

1.2 DGLn 1. Ordnung

Gegeben sei die DGL $y' = f(x, y)$. (1)

1.2.1 Richtungsfeld

Annahme:

Durch jeden Punkt des Definitionsbereiches von f gehe genau eine Lösungskurve.

Die Steigung der Tangente an die Lösungskurve in $P_0(x_0, y_0)$ lautet $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ mit $y_0 = y(x_0)$.

Durch die DGL (1) wird jedem Punkt P aus dem Definitionsbereich von f ein Richtungs- oder Steigungswert zugeordnet. Er gibt den Anstieg der durch P verlaufenden Lösungskurve an.

Definition (Linienelement): Unter einem **Linienelement** der DGL (1) versteht man ein Zahlentripel (x_0, y_0, y'_0) mit $(x_0, y_0) \in D_f$ und $y'_0 = f(x_0, y_0)$. Die Menge aller Linienelemente bildet das **Richtungsfeld** der DGL.

Alle Kurven, die in jedem Punkt die Richtung des Linienelementes haben, sind Lösungskurven.

Definition (Isokline): Eine **Isokline** ist die Verbindungslinie aller Punkte, deren zugehörige Linienelemente parallel sind.

Die Isoklinen der DGL (1) sind durch die Gleichung $f(x, y) = c$ (c const.) gegeben.

Beispiele:

1. DGL $y' = 2x$ Isoklinengleichung: $2x = c$, d.h. $x = c/2$
2. DGL $y' = 1 - y$; die durch den Ursprung verlaufende Lösungskurve ist zu ermitteln.

Isoklinengleichung: $1 - y = c \Rightarrow y = 1 - c$

Die gesuchte Lösungskurve ist $y(x) = 1 - e^{-x}$.

1.2.2 DGL $y' = ky$

$$\frac{dy}{dx} = ky, \quad \text{Annahme: } y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = k dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int k dx \Rightarrow \ln |y| = kx + C$$

An der Stelle x_0 sei der Anfangswert y_0 vorgegeben; dann gilt

$$\ln |y_0| = kx_0 + C$$

Subtraktion beider Gleichungen gibt

$$\underbrace{\ln |y| - \ln |y_0|}_{\ln \left| \frac{y}{y_0} \right|} = k(x - x_0) \Rightarrow |y| = |y_0| e^{k(x-x_0)} \Rightarrow y(x) = y_0 e^{k(x-x_0)}$$

Beispiel:

An einem Kondensator mit der Kapazität C liege die Spannung $u_c(t)$. Es gelte $u_c(0) = 0$. Er werde für $t > 0$ über einen Ohmschen Widerstand R mit der Gleichspannung U_0 aufgeladen.

Man bestimme den zeitlichen Verlauf der Spannung $u_c(t)$ und des in den Kondensator fließenden Stromes $i_c(t)$.

1.2.3 Separierbare DGLn

Gegeben sei die DGL: $y' = f(x) \cdot g(y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \text{Annahme: } g(y) \neq 0$$

Trennung der Variablen

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

Auflösung nach y

Bemerkung:

Die Trennung der Variablen erfordert $g(y) \neq 0$. Die Lösung der Gleichung $g(y) = 0$ liefert Lösungen von Typ $y = b$ (b const.), falls die Gleichung $g(y) = 0$ überhaupt Lösungen besitzt. (Denn falls $g(b) = 0$, so ist $y = b$ Lösung)

Beispiele:

1.2.4 Auf separierbare DGLn zurückführbare DGLn

- DGLn vom Typ $y' = f(ax + by + c)$
 Subst.: $u = u(x) = ax + by + c$ (*)
 $u' = a + by' = a + bf(u)$

Lösung durch Trennung der Veränderlichen.
 Lösung in (*) einsetzen und nach y auflösen.

Beispiel:

AWP: DGL $y' = (x + y - 1)^2$ mit $|x| < \pi/2, y(0) = 1$
 Subst.: $u = x + y - 1, u' = 1 + y' = 1 + u^2$
 $\frac{du}{1 + u^2} = dx \Rightarrow \int \frac{du}{1 + u^2} = \int 1 dx \Rightarrow \arctan u = x + C$
 $u = \tan(x + c) = x + y - 1 \Rightarrow y = 1 - x + \tan(x + c)$
 (AWP) $0 = 1 - 1 = \tan C \Rightarrow C = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
 die gesuchte partikuläre Lösung lautet: $y(x) = 1 - x + \tan x$

- DGLn vom Typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$
 Subst.: $u = u(x) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$ (**)
 $y' = u'x + u \Rightarrow u' = \frac{y' - u}{x} = \frac{f(u) - u}{x}$
 $u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$ ist eine separierbare DGL
 Lösung durch Trennung der Veränderlichen
 Lösung in (**) einsetzen.

Beispiel:

$y' = \frac{x - y}{x} = 1 - \frac{y}{x}$
 Subst.: $u = \frac{y}{x}, u' = \frac{1 - u - u}{x} = \frac{1 - 2u}{x}$
 Voraussetzung: $u \neq 1/2$
 $\frac{du}{2u - 1} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{2u - 1} = -\int \frac{dx}{x}$
 $\frac{1}{2} \ln |2u - 1| = -\ln |x| + \ln |C_1|, C_1 \neq 0$
 $\ln |2u - 1| = \ln \frac{|c_1|^2}{|x|^2}$

$$|2u - 1| = \frac{|c_1|^2}{x^2} \Rightarrow 2u - 1 = \frac{k}{x^2} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{x^2} + 1 \right) = \frac{y}{x}$$

Allgemeine Lösung der DGL: $y = \frac{1}{2} \left(x + \frac{k}{x} \right)$, $k \in \mathbb{R}$.

1.2.5 Lineare DGLn 1. Ordnung

Definition: Eine DGL 1. Ordnung heißt **linear**, wenn sie in der Form $y' + f(x)y = g(x)$ darstellbar ist.

g heißt **Störfunktion**. Falls $g \equiv 0$ ist, heißt die DGL **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

Beispiele:

$y' = ky$	$f(x) = -k$	linear und homogen
$y' + 3x^2y = 0$	$f(x) = 3x^2$	linear und homogen
$y' + 2x^2y = \sin x$		linear und inhomogen
$y' + 3x^2y^2 = 0$		nichtlinear
$y'y + x = 0$		nichtlinear

1.2.5.1 Lösung der homogenen DGL

$$y' = \frac{dy}{dx} = -f(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -f(x) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int f(x) dx$$

$$\ln |y| = - \int f(x) dx$$

Allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL 1. Ordnung:

$$y(x) = ke^{-\int f(x) dx}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

1.2.5.2 Lösung der inhomogenen DGL

$$y' + f(x)y = g(x) \quad (2)$$

- **Variation der Konstanten**

Lösung der zugehörigen homogenen DGL durch Trennung der Variablen liefert

$$y_0(x) = ke^{-\int f(x) dx}, \quad k \in \mathbb{R};$$

k wird durch eine Funktion $K(x)$ ersetzt.

Lösungsansatz:

$$y(x) = K(x)e^{-\int f(x) dx}$$

$$y'(x) = K'(x)e^{-\int f(x) dx} + K(x)e^{-\int f(x) dx} \cdot (-f(x))$$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$K'(x)e^{-\int f(x) dx} \underbrace{-f(x)K(x)e^{-\int f(x) dx} + f(x)K(x)e^{-\int f(x) dx}}_{=0} = g(x)$$

$$K'(x) = g(x)e^{\int f(x) dx}$$

Integration liefert: $K(x) = \int g(x)e^{\int f(x) dx} dx + C$

Einsetzung in den Lösungsansatz liefert:

Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL (2):

$$y(x) = \left[\int g(x)e^{\int f(x) dx} dx + C \right] \cdot e^{-\int f(x) dx} .$$

Beispiele:

- **Aufsuchen einer partikulären Lösung**

Satz: Die allgemeine Lösung y einer inhomogenen linearen DGL (2) lässt sich darstellen als $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$, wobei y_0 die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen und y_p eine beliebige Lösung der inhomogenen DGL (partikuläre Lösung) ist.

Beweis:

Vorgehensweise zur Lösung einer inhomogenen DGL durch Aufsuchen einer partikulären Lösung:

1. Bestimmung der allgemeinen Lösung y_0 der zugehörigen homogenen DGL,
2. Bestimmung einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen DGL mit Hilfe eines geeigneten Funktionsansatzes,
3. Summation $y = y_0 + y_p$ liefert die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

Beispiel:

$$y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y_0 = kx, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \text{Ansatz für } y_p: y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

$$y'_p - \frac{y_p}{x} = 3ax^2 + 2bx + c - (ax^2 + bx + c) = 2ax^2 + bx = x^2$$

Koeffizientenvergleich liefert: $2a = 1 \Rightarrow a = 1/2$, $b = 0$ und damit $y_p = \frac{x^3}{2}$

Damit lautet die allgemeine Lösung der DGL $y(x) = y_0(x) + y_p(x) = kx + \frac{x^3}{2}$, $k \in \mathbb{R}$.

1.2.5.3 Lineare DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y' + ay = g(x)$$

Die zugehörige homogene DGL $y' + ay = 0$ besitzt die Lösung $y_0(x) = Ce^{-ax}$ (vergl. § 1.2.2).

Bei einer inhomogenen DGL bietet sich an

- Variation der Konstanten
- Aufsuchen einer partikulären Lösung (oft zweckmäßiger)

Störglied g	Lösungsansatz y_p
1. Konstante Funktion	Konstante Funktion $y_p = c_0$
2. Lineare Funktion	Lineare Funktion $y_p = c_1x + c_0$
3. Quadratische Funktion	Quadratische Funktion $y_p = c_2x^2 + c_1x + c_0$
4. Polynom vom Grade n	Polynom vom Maxgrad n $y_p = c_nx^n + \dots + c_1x + c_0$
5. $g(x) = A \cdot \sin(\omega x)$	} $y_p = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$
6. $g(x) = B \cdot \cos(\omega x)$	
7. $g(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	
8. $g(x) = A \cdot e^{bx}$	$y_p = \begin{cases} C \cdot e^{bx} & \text{für } b \neq -a \\ Cx \cdot e^{bx} & \text{für } b = -a \end{cases}$

Tab. Lösungsansätze für DGL vom Typ $y' + ay = g(x)$

Beispiel:

$$y' + 2y = x^2, \quad y_0 = ce^{-2x}$$

Ansatz für y_p : $y_p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (Tabelle, 3. Fall)

Eingesetzt in die DGL liefert dies:

$$2\alpha x + \beta + 2\alpha x^2 + 2\beta x + 2\gamma = x^2$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 1/2, \quad 2(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha = -1/2$$

$$\beta + 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 1/4$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\text{Ergebnis: } y(x) = y_0(x) + y_p(x) = Ce^{-2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

1.3 Lineare DGLn 2. und höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Definition: Eine DGL n -ter Ordnung, die sich auf die Gestalt

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x)$$

bringen lässt, heißt **linear**. Falls $g(x) \equiv 0$, heißt sie **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

Wir betrachten hier nur den Fall, dass die Koeffizientenfunktionen $a_i, i = 0, 1, \dots, n-1$, konstante Funktionen sind:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = g(x). \quad (1)$$

Die DGL (wir lassen wieder das Argument x fort)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (1_h)$$

heißt **die zu (1) zugehörige homogene DGL**. Sie hat stets die **triviale Lösung** $y \equiv 0$.

Satz: Das AWP ist eindeutig lösbar, wenn g stetig ist, d.h. zu jeder Anfangswertvorgabe $x_0, y_i, i = 0, 1, \dots, n-1$, gibt es genau eine Lösung y von (1) mit $y^{(i)}(x_0) = y_i, i = 0, 1, \dots, n-1$.

1.3.1 Eigenschaften der homogenen DGL

Wir betrachten zunächst die homogene DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (2)$$

Satz:

1. Sind y_1, y_2 zwei Lösungen von (2), so ist auch $y = c_1y_1 + c_2y_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, Lösung von (2).
2. Ist y eine komplexwertige Lösung von (2), so sind auch $Re\ y, Im\ y$ (reellwertige) Lösungen von (2).

Beweis:

1. Vorbemerkung: Es gilt $(c_1y_1+c_2y_2)'' = ((c_1y_1+c_2y_2)')' = (c_1y_1'+c_2y_2')' = c_1y_1''+c_2y_2''$,

und durch Induktion erhält man

$$(c_1y_1 + c_2y_2)^{(n)} = c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)}.$$

Sind y_1, y_2 Lösungen von (2), so gilt:

$$\begin{aligned} & (c_1y_1 + c_2y_2)^{(n)} + a_{n-1}(c_1y_1 + c_2y_2)^{(n-1)} + \dots + a_1(c_1y_1 + c_2y_2)' + a_0(c_1y_1 + c_2y_2) = \\ & c_1y_1^{(n)} + a_{n-1}c_1y_1^{(n-1)} + \dots + a_1c_1y_1' + a_0c_1y_1 + c_2y_2^{(n)} + a_{n-1}c_2y_2^{(n-1)} + \dots + a_1c_2y_2' + a_0c_2y_2 \\ & = c_1 \underbrace{[y_1^{(n)} + a_{n-1}y_1^{(n-1)} + \dots + a_1y_1' + a_0y_1]}_{=0, \text{ da } y_1 \text{ Lösg. von (2)}} + c_2 \underbrace{[y_2^{(n)} + a_{n-1}y_2^{(n-1)} + \dots + a_1y_2' + a_0y_2]}_{=0, \text{ da } y_2 \text{ Lösg. von (2)}} \\ & = 0 \end{aligned}$$

2. Es sei y eine komplexwertige Lösung von (2).

Setze $u = \operatorname{Re} y, v = \operatorname{Im} y$. Dann gilt:

$$(u + jv)^{(n)} + a_{n-1}(u + jv)^{(n-1)} + \dots + a_1(u + jv)' + a_0(u + jv) = 0$$

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u + j[v^{(n)} + a_{n-1}v^{(n-1)} + \dots + a_1v' + a_0v] = 0$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn sowohl der Real- als auch der Imaginärteil der linken Seite verschwinden. Damit sind u, v Lösungen von (2).

Bemerkung: Mittels Induktion erhält man, dass die Aussage unter 1. auch für endliche Summen von Lösungen gilt.

Beispiel: (Schwingungsgleichung)

$$y'' + \omega^2y = 0 \tag{3}$$

Lösungen sind $y_1(t) = \sin \omega t, y_2(t) = \cos \omega t$ (vgl. 1.1.3).

Damit ist auch $c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$ Lösung von (3) für alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Auch $y(t) = e^{j\omega t}$ ist Lösung von (3), denn es gilt $y'(t) = j\omega e^{j\omega t}, y''(t) = -\omega^2 e^{j\omega t}$ und damit

$$y'' + \omega^2y = -\omega^2 e^{j\omega t} + \omega^2 e^{j\omega t} = 0.$$

Nach obigen Satz sind dann auch $\operatorname{Re} y = \cos \omega t, \operatorname{Im} y = \sin \omega t$ Lösungen von (3).

Definition: Die Lösungen y_1, y_2, \dots, y_n von (2) heißen **linear unabhängig**, falls aus

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n = 0$$

folgt, dass gilt $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Andernfalls heißen sie **linear abhängig**.

Satz: Es seien y_1, y_2, \dots, y_n Lösungen von (2); dann sind y_1, y_2, \dots, y_n linear unabhängig, wenn die **Wronski-Determinante**

$$W[y_1, \dots, y_n; x] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

an einer beliebigen Stelle x_0 nicht verschwindet.

Beweis durch Widerspruch:

Angenommen, $W[y_1, \dots, y_n; x_0] \neq 0$, aber y_1, \dots, y_n wären linear abhängig. Dann wäre die Gleichung

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0 \quad (*)$$

erfüllt, ohne dass $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, etwa $c_1 \neq 0$.

Dann besitzt das homogene LGS

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) &= 0 \\ \vdots & \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \ddots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= 0 \end{aligned}$$

die nichttriviale Lösung $(c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ ($c_1 \neq 0$!)

$\Rightarrow W[y_1, \dots, y_n; x_0] = 0$, dies steht im Widerspruch zur Annahme.

Beispiel: (Schwingungsgleichung (3))

$y_1(t) = \sin \omega t, y_2(t) = \cos \omega t$ sind Lösungen von (3)

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} \sin \omega t & \cos \omega t \\ \omega \cos \omega t & -\omega \sin \omega t \end{vmatrix} = -\omega \sin^2 \omega t - \omega \cos^2 \omega t = -\omega(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = -\omega \neq 0$$

$\Rightarrow \sin \omega t, \cos \omega t$ sind linear unabhängig.

Satz: (Lösungsgesamtheit einer linearen homogenen DGL)

Jede Lösung y von (2) lässt sich darstellen in der Form $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$, wobei y_1, y_2, \dots, y_n linear unabhängige Lösungen von (2) und $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ sind.

Bemerkung: Man nennt $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ auch **Fundamentalsystem der DGL (2)**.

Beispiel:

Die allgemeine Lösung von (3) lautet: $y = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1.3.2 Lösung der homogenen DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (2)$$

Ansatz zur Lösung von (2): $y(x) = e^{\lambda x}$ Ziel ist es, λ zu bestimmen

$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$, ..., $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ eingesetzt in (2) liefert:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0 \quad | \cdot e^{-\lambda x}$$

bzw. die **charakteristische Gleichung**

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (4)$$

Ist λ_0 Lösung von (4), so ist $e^{\lambda_0 x}$ Lösung von (2).

1.3.2.1 Lineare DGLn 2. Ordnung

Für die homogene DGL 2. Ordnung

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (2a)$$

lautet die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (4a)$$

Diese besitzt die Lösungen $\lambda_{1/2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$;
 $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ sind dann Lösungen von (2a).

Je nach Vorzeichen der Diskriminante $D = a^2 - 4b$ sind drei Fälle zu unterscheiden:

- $D > 0$: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

Also bilden $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ ein Fundamentalsystem der DGL (2a)

Die allgemeine Lösung ergibt sich als $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Beispiel:

- $D = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -a/2$, das ergibt $y_1 = y_2 = e^{-a/2x}$.

Lösungsansatz: $y(x) = K(x)e^{-a/2x}$ Ziel: Bestimmung von $K(x)$

$$y'(x) = K'(x)e^{-a/2x} + K(x)(-a/2)e^{-a/2x} = [K'(x) - a/2 K(x)] \cdot e^{-a/2x}$$

$$y''(x) = [K''(x) - a/2 K'(x)] \cdot e^{-a/2x} + [K'(x) - a/2 K(x)] (-a/2)e^{-a/2x} \\ = [K''(x) - a K'(x) + a^2/4 K(x)] \cdot e^{-a/2x}$$

Einsetzen in (2a) liefert:

$$[K''(x) - a K'(x) + a^2/4 K(x) + aK'(x) - a^2/2 K(x) + bK(x)] \cdot e^{-a/2x} = 0$$

$$[K''(x) - 1/4 \underbrace{(a^2 - 4b)}_{=D=0} K(x)] \cdot e^{-a/2x} = 0 \quad | \cdot e^{a/2x}$$

$$\Rightarrow K''(x) = 0 \Rightarrow K(x) = c_1x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

Damit haben wir zu der Lösung $e^{-a/2x}$ die Lösung $xe^{-a/2x}$ hinzuerhalten.

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{-a/2x} & xe^{-a/2x} \\ -a/2 e^{-a/2x} & e^{-a/2x} - a/2xe^{-a/2x} \end{vmatrix} = e^{-ax} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x \\ -a/2 & 1 - a/2x \end{vmatrix} \\ = e^{-ax} \neq 0$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der DGL: $y(x) = (c_1x + c_2)e^{-a/2x}$, $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Beispiel:

- $D < 0$: Es gibt zwei konjugiert-komplexe Lösungen $\lambda_{1/2} = \alpha \pm \omega j$.

Die Lösungen $\tilde{y}_{1/2} = e^{\lambda_{1/2}x}$ der DGL bilden ein (komplexes) Fundamentalsystem der DGL (Nachweis mit Hilfe der Wronski-Determinante).

Ziel: reelles Fundamentalsystem

$$y(x) = c_1\tilde{y}_1(x) + c_2\tilde{y}_2(x) = c_1e^{(\alpha+\omega j)x} + c_2e^{(\alpha-\omega j)x} = e^{\alpha x} [c_1e^{\omega jx} + c_2e^{-\omega jx}] \\ = e^{\alpha x} [c_1 \cos \omega x + c_1j \sin \omega x + c_2 \cos \omega x - c_2j \sin \omega x] \\ = e^{\alpha x} \left[\underbrace{(c_1 + c_2)}_{=:A_1} \cos \omega x + j \underbrace{(c_1 - c_2)}_{=:A_2} \sin \omega x \right] = e^{\alpha x} [A_1 \cos \omega x + jA_2 \sin \omega x]$$

Satz $\xrightarrow{\text{aus 1.3.1}}$ $y_1(x) = e^{\alpha x} \sin \omega x$, $y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \omega x$

sind (reelle) Lösungen, ja, sie bilden sogar ein (reelles) Fundamentalsystem der DGL (Nachweis mit Hilfe der Wronski-Determinante).

Beispiel:

Zusammenfassung:

DGL: $y'' + ay' + by = 0$

char. Glg.: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Lösungen der char. Gleichung	Fundamentalsystem	allgemeine Lösung ($c_1, c_2 \in \mathbf{R}$)
1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$	$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbf{R}$	$y_1(x) = e^{\lambda x}$ $y_2(x) = x e^{\lambda x}$	$(c_1 x + c_2) e^{\lambda x}$
3. $\lambda_{1/2} = \alpha \pm j\omega$	$y_1(x) = e^{\alpha x} \sin \omega x$ $y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \omega x$	$e^{\alpha x} (c_1 \sin \omega x + c_2 \cos \omega x)$

1.3.2.2 Lineare DGLen höherer Ordnung

Die linke Seite der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{4}$$

bildet das sog. **charakteristische Polynom** $p(\lambda)$.

a) Alle Lösungen von (4) sind reell und verschieden.

Die reellen Zahlen $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, seien die paarweise verschiedenen Lösungen von (4) und $y_i(x) = e^{\lambda_i x}, i = 1, \dots, n$, die zugehörigen Lösungen von (2). Dann ist

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x}$$

ebenfalls Lösung von (2). Um zu zeigen, dass hierdurch die allgemeine Lösung von (2) gegeben ist, ist zu zeigen, dass die Wronski-Determinante von y_1, \dots, y_n nicht verschwindet.

$$\begin{aligned}
 W[y_1, \dots, y_n; x] &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} \\
 &= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \dots e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Die rechts stehende Determinante ist die sog. *Vandermonde-Determinante* (s. Skriptum zur Mathematik1 von Frau Prof. Preissler), die nicht verschwindet, da nach Voraussetzung alle λ_i verschieden sind.

Damit bilden die Funktionen $e^{\lambda_i x}$, $i = 1, \dots, n$, ein Fundamentalsystem der DGL (2).

b) Alle Lösungen von (4) sind verschieden, unter ihnen gibt es komplexe.

In diesem Fall gelten die unter a) angestellten Überlegungen nach wie vor, auch wenn einige der Lösungen komplex sind. Denn für das Verschwinden der Wronski-Determinante haben wir nur von der Verschiedenheit der Lösungen, nicht aber von der Tatsache, dass die Lösungen sämtlich reell sind, Gebrauch gemacht. Ebenso können wir die Konstanten c_i in der Darstellung einer beliebigen Lösung y als komplexe Zahlen ansetzen, ohne dass y den Charakter einer Lösung von (2) verliert. Von den n Lösungen von (4) seien r reell und $2s$ je zu Paaren konjugiert komplex. O.E. seien diese folgendermaßen nummeriert ($r + 2s = n$)

$$\underbrace{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r}_{\in \mathbb{R}}, \mu_1 \pm jv_1, \mu_2 \pm jv_2, \dots, \mu_s \pm jv_s.$$

Die im Fall $D < 0$ im § 1.3.2.1 angestellten Überlegungen liefern die linear unabhängigen Lösungen

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_r x}, \quad e^{\mu_1 x} \cos v_1 x, \dots, e^{\mu_s x} \cos v_s x, \\ e^{\mu_1 x} \sin v_1 x, \dots, e^{\mu_s x} \sin v_s x.$$

c) Unter den Nullstellen des charakteristischen Polynoms gibt es mehrfache Nullstellen.

Es habe λ_1 die Vielfachheit k , d.h.

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^k q(\lambda) \quad \text{mit } q(\lambda_1) \neq 0.$$

Dann sind

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$$

linear unabhängige Lösungen von (2).

Dies liefert den folgenden Beitrag von λ_1 zu der allgemeinen Lösung von (2):

$$\lambda_1 \text{ ist reell: } (c_0 + c_1 x + \dots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{\lambda_1 x}$$

$$\lambda_1 \text{ ist komplex: } \lambda_1 = \mu_1 + jv_1$$

$$(c_0 + c_1 x + \dots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{\mu_1 x} \cos v_1 x + (d_0 + d_1 x + \dots + d_{k-1} x^{k-1}) e^{\mu_1 x} \sin v_1 x.$$

Bezüglich der formal etwas aufwendigen Beweise wird auf die entsprechende Literatur verwiesen.

1.3.3 Lösung der inhomogenen DGL

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = g(x) \quad (1)$$

Satz: Die allgemeine Lösung y von (1) lässt sich darstellen als $y = y_0 + y_p$, wobei y_0 die allgemeine Lösung von (1_h) und y_p eine partikuläre Lösung von (1) ist.

Beweis: Wortwörtlich wie in § 1.2.5

Lösungsansätze für die partikuläre Lösung

Fall 1:

g ist ein Polynom vom Grad m

$$m = 2: y'' + ay' + by = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

Fall $b \neq 0$: Ansatz: $y_p(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$

Ziel: c_0, c_1, c_2 zu bestimmen

$$y'_p = 2c_2x + c_1, \quad y''_p = 2c_2,$$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$2c_2 + a(2c_2x + c_1) + b(c_2x^2 + c_1x + c_0) = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$bc_2 = b_2 \Rightarrow c_2 = b_2/b$$

$$2ac_2 + bc_1 = b_1 \Rightarrow c_1 = (b_1 - 2ac_2)/b$$

$$2c_2 + ac_1 + bc_0 = b_0 \Rightarrow c_0 = (b_0 - 2c_2 - ac_1)/b$$

Da $b \neq 0$ gilt, sind die Gleichungen eindeutig nach c_0, c_1, c_2 auflösbar.

Fall $b = 0, a \neq 0$: Ansatz: $y_p = c_2x^3 + c_1x^2 + c_0x$

$$y'_p = 3c_2x^2 + 2c_1x + c_0, \quad y''_p = 6c_2x + 2c_1$$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$6c_2x + 2c_1 + a(3c_2x^2 + 2c_1x + c_0) = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$3ac_2 = b_2 \Rightarrow c_2 = b_2/(3a)$$

$$6c_2 + 2ac_1 = b_1 \Rightarrow c_1 = (b_1 - 6c_2)/(2a)$$

$$2c_1 + ac_0 = b_0 \Rightarrow c_0 = (b_0 - 2c_1)/a$$

Da $a \neq 0$ gilt, sind die Gleichungen eindeutig nach c_0, c_1, c_2 auflösbar.

1 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGLn)

Störfunktion g	Lösungsansatz y_p
1. Polynom vom Grade m	$y_p = \begin{cases} Q_m(x) & \text{für } b \neq 0 \\ x \cdot Q_m(x) & \text{für } a \neq 0, b = 0 \end{cases}$ Q_m : Polynom vom Maxgrad m Parameter: Koeffizienten des Polynoms Q_m
2. Exponentialfunktion $g(x) = e^{cx}$	(1) c ist <i>keine</i> Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot e^{cx}$ (2) c ist eine <i>einfache</i> Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = Ax \cdot e^{cx}$ (3) c ist eine <i>doppelte</i> Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = Ax^2 \cdot e^{cx}$ Parameter jeweils: A
3. Sinusfunktion $g(x) = \sin \beta x$ oder Kosinusfunktion $g(x) = \cos \beta x$	(1) $j\beta$ ist <i>keine</i> Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot \sin \beta x + B \cdot \cos \beta x$ (2) $j\beta$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = x(A \cdot \sin \beta x + B \cdot \cos \beta x)$ Parameter jeweils: A, B
4. $g(x) = P_m(x) \cdot e^{cx} \cdot \sin \beta x$ oder $g(x) = P_m(x) \cdot e^{cx} \cdot \cos \beta x$	(1) $c + j\beta$ ist <i>keine</i> Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = e^{cx}(Q_m(x) \cdot \sin \beta x + R_m(x) \cdot \cos \beta x)$ (2) $c + j\beta$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = xe^{cx}(Q_m(x) \cdot \sin \beta x + R_m(x) \cdot \cos \beta x)$ Q_m, R_m : Polynome vom Maxgrad m Parameter: Koeffizienten der Polynome Q_m und R_m

Tab. Lösungsansätze für DGL $y'' + ay' + by = g(x)$

Bemerkung zu den Lösungsansätzen:

Setzt sich die Störfunktion additiv aus mehreren Gliedern zusammen, so erhält man den Lösungsansatz für y_p als Summe der Lösungsansätze für die einzelnen Störglieder.

Es gilt nämlich der folgende

Satz: Ist u bzw. v Lösung von

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = g_1(x)$$

bzw.

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = g_2(x),$$

so ist $u + v$ Lösung von

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = g_1(x) + g_2(x).$$

Beweis:

$u^{(n)}$	$+ a_{n-1}u^{(n-1)}$	$+ \dots$	$+ a_1u'$	$+ a_0u$	$= g_1$	
$v^{(n)}$	$+ a_{n-1}v^{(n-1)}$	$+ \dots$	$+ a_1v'$	$+ a_0v$	$= g_2$	$+$
$u^{(n)} + v^{(n)}$	$+ a_{n-1}(u^{(n-1)} + v^{(n-1)})$	$+ \dots$	$+ a_1(u' + v')$	$+ a_0(u + v)$	$= g_1 + g_2$	
$(u + v)^{(n)}$	$+ a_{n-1}(u + v)^{(n-1)}$	$+ \dots$	$+ a_1(u + v)'$	$+ a_0(u + v)$	$= g_1 + g_2$	

1.4 Systeme von Differentialgleichungen

Die folgenden Gleichungen bilden ein System von n DGLn 1. Ordnung für die Funktionen y_1, y_2, \dots, y_n

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \\ y_2' &= f_2(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)). \end{aligned}$$

Eine DGL n -ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

lässt sich darstellen als ein System von n DGLn 1. Ordnung:

Die Substitutionen

$$\begin{aligned} y_1(x) &:= y(x) \\ y_2(x) &:= y'(x) = y_1'(x) \\ y_3(x) &:= y''(x) = y_2'(x) \\ &\vdots \\ y_{n-1}(x) &:= y^{(n-2)}(x) = y_{n-2}'(x) \\ y_n(x) &:= y^{(n-1)}(x) = y_{n-1}'(x) \end{aligned}$$

sowie $y_n'(x) = y^{(n)}(x) = f(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$

liefern das folgende System von DGLn für die Funktionen y_1 bis y_n

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_3(x) \\ &\vdots \\ y_{n-2}'(x) &= y_{n-1}(x) \\ y_{n-1}'(x) &= y_n(x) \\ y_n'(x) &= f(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)). \end{aligned}$$

2 Reihen

2.1 Zahlenreihen

2.1.1 Definition und Konvergenz

Gegeben sei eine Folge reeller Zahlen $\{a_k\}$. Setze

$$s_1 := a_1$$

$$s_2 := a_1 + a_2$$

$$s_3 := a_1 + a_2 + a_3$$

\vdots

$$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

\vdots

Die Folge $\{s_n\}$, die Folge der **Partialsommen**, bezeichnen wir als **Reihe** (der a_k), die einzelnen a_k auch als **Summanden**.

Beispiele:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \dots$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \quad (\text{harmonische Reihe})$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (\text{alternierende harmonische Reihe})$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots \quad (\text{geometrische Reihe})$$

Definition (Konvergenz einer Reihe):

Ist $\{s_n\}$ konvergent (mit dem Grenzwert s), dann nennen wir die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent (mit dem Grenzwert s) und notieren dies als

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent bzw. } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$$

Andernfalls heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **divergent**. Ist $\{s_n\}$ bestimmt divergent, dann notieren wir dies auch als

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty \text{ bzw. } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty.$$

Bemerkung: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet

- eine **Folge**, nämlich die Folge von Partialsummen, unabhängig davon, ob diese Folge konvergiert;
- einen **Grenzwert** einer Folge und hat dann nur einen Sinn, wenn dieser Grenzwert existiert.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ bedeutet, die Reihe konvergiert und der Reihenwert ist s .

Beispiele:

- 1.

2. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ (geometrische Reihe)

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \sum_{k=1}^n q^{k-1}$$

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

$$qs_n = q + q^2 + \dots + q^n$$

$$\Rightarrow s_n - qs_n = 1 - q^n$$

$$s_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1$$

1. Fall: $|q| < 1$ Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} q^k = 0$ ist die Reihe konvergent mit $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$.

2. Fall: $|q| > 1$ Da $\{q^k\}$ divergiert, divergiert auch $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$.

3. Fall: $q = 1$ Wegen $s_n = n$ ist die Reihe (bestimmt) divergent.

4. Fall: $q = -1$ $s_n = 1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

Damit ist die Reihe (unbestimmt) divergent.

Satz:

Die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ seien konvergent.

1. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$),

$$\text{und es ist } \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

2. Ist $a_k \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$, so gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Beweis: Setze $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$, $t_n := \sum_{k=1}^n b_k$, $u_n := \sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k)$.

Somit ist $u_n = \lambda s_n + \mu t_n$, woraus sich für $n \rightarrow \infty$ unter Verwendung der Grenzwertsätze für Zahlenfolgen die Behauptung unter 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ ergibt.

Aus $a_k \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$ folgt $s_n \leq t_n \forall n \in \mathbb{N}$ und die Aussage unter 2. □

Folgerung:

Aus der Konvergenz der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ folgt die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}.$$

2.1.2 Konvergenzkriterien

Satz (Notwendige Bedingung für Konvergenz):

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so muss die Folge $\{a_k\}$ eine Nullfolge sein.

Beweis: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent, d.h. $\{s_n\}$ ist konvergent.

Nach dem Konvergenzkriterium von Cauchy folgt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(s_n - s_{n-1})}_{=a_n} = 0$. □

Die Umkehrung gilt **nicht!**

Beispiel:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (\text{harmonische Reihe}) \\ s_{2^l} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> 2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> 4 \cdot \frac{1}{8}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{> 8 \cdot \frac{1}{16}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{l-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^l}\right)}_{> 2^{l-1} \cdot \frac{1}{2^l}} \\ &> 1 + l \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

d.h. die harmonische Reihe ist divergent!

Beispiel:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots \quad (\text{alternierende harmonische Reihe}) \\ |s_n - s_{n-1}| &= \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad s_{2n} < s < s_{2n+1}, \quad n \in \mathbf{N} \end{aligned}$$

$$|s - s_n| < \frac{1}{n+1}$$

Definition: (Alternierende Reihe)

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **alternierend**, falls $a_k a_{k+1} < 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Satz: (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)

Eine alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent, falls $\{|a_k|\}$ eine monoton fallende Nullfolge bildet. Für den Reihenwert s gilt:
 $|s - s_n| \leq |a_{n+1}|, \operatorname{sgn}(s - s_n) = \operatorname{sgn}(a_{n+1})$.

Definition: (absolute Konvergenz)

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz: Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.
Die Umkehrung gilt nicht! (Siehe alternierende harmonische Reihe)

Satz: (Quotienten- und Wurzelkriterium)

Es sei $\{a_k\}$ eine Folge mit $a_k > 0$ für $k \geq n_0$ und es existiere

$$q_Q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \quad \text{bzw.} \quad q_W = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}.$$

In beiden Fällen gilt:

$q < 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent

$q > 1$: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist divergent

$q = 1$: Kriterium macht keine Aussage.

Beispiele:

Mit einem anderen Konvergenzkriterium lässt sich der folgende Satz beweisen.

Satz:

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ ist **konvergent** für $a > 1$ und **divergent** für $a \leq 1$.

2.2 Potenzreihen

2.2.1 Definition und Konvergenzverhalten

Definition: (Potenzreihe)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

heißt **Potenzreihe** (mit dem **Entwicklungspunkt** x_0). Die Faktoren a_k heißen die **Koeffizienten** der Potenzreihe.

Für $x_0 = 0$ vereinfacht sich die Reihe zu:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Beispiel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots \quad (\text{geometrische Reihe})$$

$$a_k = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad x_0 = 0$$

Diese Reihe konvergiert für $\forall x \in (-1, 1)$, und es gilt für diese x : $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$.

Die Beziehung bedeutet, dass die Funktion $\frac{1}{1-x}$ auf dem Intervall $(-1, 1)$ beliebig genau durch Polynome approximiert werden kann.

Approximation von $\frac{1}{1-x}$ durch Polynome:

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = 1+x, \quad p_2(x) = 1+x+x^2, \quad p_3(x) = 1+x+x^2+x^3, \quad \dots$$

Satz: (Konvergenz von Potenzreihen)

Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ ist absolut konvergent in dem Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ mit

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{bzw.} \quad r = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

falls diese Grenzwerte existieren;

r heißt der **Konvergenzradius**, $(x_0 - r, x_0 + r)$ heißt das **Konvergenzintervall**.

Bemerkungen:

1. Die Konvergenz in den Randpunkten $x_0 \pm r$ muss getrennt untersucht werden.
2. Für $r = 0$ konvergiert die Potenzreihe nur für den Entwicklungspunkt x_0 , für $r = \infty$ konvergiert sie für alle $x \in \mathbb{R}$.
3. Durch die Potenzreihe wird jedem Punkt $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ eine Zahl zugeordnet. Damit ist eine auf $(x_0 - r, x_0 + r)$ definierte Funktion f (die durch die Potenzreihe dargestellte Funktion) gegeben:

$$f : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k,$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

Beweis: (nur für $r = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$ und $x_0 = 0$)

1. Fall: $q := \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ existiert.

Es ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} |x| = |x| \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x| \cdot q$.

- a) Ist $q = 0$, so ist auch $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ und nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut.
- b) Ist $q > 0$, so ist $|x|q < 1$, falls $|x| < \frac{1}{q}$, d.h. für alle x mit $|x| < \frac{1}{q}$ konvergiert die Potenzreihe absolut.
Ist $|x| > \frac{1}{q}$, so ist $|x|q > 1$ und damit die Reihe divergent.

2. Fall: Ist $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$ divergent, so ist für $x \neq 0$ auch die Folge $\{\sqrt[k]{|a_k x^k|}\}$ divergent, woraus die Divergenz für $x \neq 0$ folgt.

Beispiele:

2.2.2 Die Taylor-Reihe

Frage: Wie und unter welchen Voraussetzungen erhält man zu einer gegebenen Funktion die zugehörige Potenzreihe?

O.B.d.A.: $x_0 = 0$

$$\text{Ansatz: } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots \Rightarrow f(0) = a_0$$

Annahme: Es darf gliedweise differenziert werden.

Dann folgt:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + k a_k x^{k-1} + \dots \Rightarrow f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + k(k-1)a_k x^{k-2} + \dots \Rightarrow f''(0) = 2a_2$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4 x + \dots + k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} + \dots \Rightarrow f'''(0) = 6a_3$$

$$f^{(k)}(x) = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot a_k + x(\dots) \Rightarrow f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Für die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ erhält man entsprechend

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

a_k heißt k -ter **Taylor-Koeffizient**.

Satz von Taylor:

Die Funktion f sei in der Umgebung der Stelle x_0 $(n+1)$ -mal differenzierbar; dann gilt die **Taylor-Entwicklung**:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x);$$

dabei gibt es eine Stelle u zwischen x_0 und x , so dass sich das **Restglied** R_n darstellen lässt in der Form

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Im Sonderfall $x_0 = 0$ liefert die Taylor-Entwicklung

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x)$$

mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{mit } 0 \leq \vartheta \leq 1.$$

$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ heißt n -tes **Taylor-Polynom**;

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ heißt **Restglied** der Taylor-Entwicklung von f um x_0 .

Art der Annäherung:

$n = 0$: $P_0(x) = f(x_0)$ durch die Gerade $y = f(x_0)$

$n = 1$: $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ durch die Kurventangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$

$n = 2$: $P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2$ durch die durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ verlaufende Parabel, die dort die gleiche Tangente und Krümmung hat wie f .

Beispiele:

Ist die Funktion f in (a, b) mit $x_0 \in (a, b)$ beliebig oft differenzierbar, so erhält man für $n \rightarrow \infty$ die **Taylor-Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Beispiele:

Gesucht ist die Taylor-Reihe der folgenden Funktionen um $x_0 = 0$:

1. $f(x) = e^x$; es ist $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = e^0 = 1 \forall k \in \mathbb{N}_0$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ist damit die Taylor-Reihe zu e^x .

- 2.

Nicht jede beliebig oft differenzierbare Funktion wird durch ihre Taylor-Reihe dargestellt. Es gilt jedoch:

Satz: Es sei f auf (a, b) beliebig oft differenzierbar mit $x_0 \in (a, b)$. Dann konvergiert die Taylor-Reihe zu f gegen f , wenn gilt:

$$\forall x \in (a, b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = 0.$$

Bemerkungen:

1. Ist $0 < r < \infty$ der Konvergenzradius der Taylor-Reihe von f , so wird f höchstens auf $[x_0 - r, x_0 + r]$ durch die Taylor-Reihe dargestellt.
2. Die Darstellung einer Funktion durch ihre Taylor-Reihe ist dasselbe wie die Darstellung als Potenzreihe.
Sofern es möglich ist, verwende man bekannte Potenzreihenentwicklungen, um die Taylor-Reihe einer bestimmten Funktion anzugeben.

Beispiele:

Binomische Reihe

Die Taylor-Reihe zu $(1+x)^a$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k$ ($a \in \mathbb{R}$)

1. Fall: $a \in \mathbb{N}$; wegen $\binom{a}{k} = 0$ für $k > a$ bricht die Taylor-Reihe nach dem Term mit x^a ab. Die Taylor-Reihe liefert die binomische Entwicklung.
2. Fall: Für $a \notin \mathbb{N}$ gilt $\binom{a}{k} \neq 0 \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $r = 1$, d.h. die Reihe ist konvergent für $\forall x \in (-1, 1)$, ja, es gilt sogar, dass auf diesem Intervall die Funktion $(1+x)^a$ durch ihre Taylor-Reihe dargestellt wird.

2.2.3 Rechnen mit Potenzreihen

O.B.d.A. sei im folgenden $x_0 = 0$ gewählt.

Bemerkung: Alle nachstehenden Sätze übertragen sich sinngemäß auf Potenzreihen mit beliebigen Entwicklungspunkten.

Satz: (Differentiation und Integration von Potenzreihen)

Jede Potenzreihe ist in ihrem Konvergenzintervall beliebig oft (gliedweise) differenzierbar und integrierbar. Die Potenzreihen der Ableitungen und der Stammfunktionen haben denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.

Insbesondere gilt:

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Reihe mit dem Konvergenzradius $r > 0$. Dann ist die durch glied-

weise Differentiation entstehende Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$ und es gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots, \quad x \in (-r, r)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)'' = 2a_2 + 6a_3 x + \dots, \quad x \in (-r, r),$$

...

Ferner gilt:

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}, \quad x \in (-r, r);$$

denn: Ist F gegeben durch $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$, dann gilt:

$$F'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Beispiele:

Satz: (Identitätssatz für Potenzreihen)

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1, r_2 > 0$

mit $r := \min(r_1, r_2)$ und gilt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad \forall x \in (-r, r)$, so folgt $a_k = b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

Aus $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ folgt für $x = 0$: $a_0 = b_0$,

aus $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k x^{k-1}$ folgt für $x = 0$: $a_1 = b_1$

usw.

Satz: (Addition und Multiplikation von Potenzreihen)

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1, r_2 > 0$.

Dann gilt für alle x , $x \in (-r, r)$, wobei $r := \min(r_1, r_2)$,

- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$
- $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \right) \cdot x^k$

Beispiele:

Division von Potenzreihen

Den Quotienten $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ zweier Potenzreihen mit nichtverschwindenden Konvergenzradien $u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ und $v(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$ erhält man nach dem folgenden Schema:

Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

Multiplikation der Potenzreihen von f und v und anschließender Koeffizientenvergleich der Potenzreihen $f(x) \cdot v(x)$ und $u(x)$ ergibt die Koeffizienten c_k .

Beispiele zur Substitution bei Potenzreihen:

2.2.4 Anwendungen

2.2.4.1 Untersuchung von unbestimmten Ausdrücken

2.2.4.2 Berechnung nicht-elementarer Integrale

Die in der Statistik oft verwendete Funktion

$$G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{Gaußsches Fehlerintegral}$$

lässt sich nicht mit elementaren Funktionen darstellen, daher ist man auf Näherungswerte angewiesen.

Mögliche Vorgehensweise:

1. Reihenentwicklung des Integranden
2. gliedweise Integration der Reihe

2.2.4.3 Eulersche Formel

$$\begin{aligned} e^{jy} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jy)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + j \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos y + j \sin y \end{aligned}$$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \underbrace{\frac{z_1^l}{l!} \frac{z_2^{k-l}}{(k-l)!}}_{\binom{k}{l} z_1^l z_2^{k-l}} k! = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} = e^{z_1 + z_2}$$

Hieraus folgt: $e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x (\cos y + j \sin y)$.

2.3 Fourier-Reihen

2.3.1 Trigonometrische Reihen und Fourier-Reihen im 2π -periodischem Fall

Gegeben seien zwei Folgen reeller Zahlen $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.
Dann nennt man

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x$$

eine **trigonometrische Reihe**.

Bemerkung: Ist $a_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}_0$ (bzw. $b_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}$), so spricht man von einer reinen Sinus- (bzw. Cosinus-) Reihe.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die gegebene Funktion f die Periodenlänge 2π besitzt; in § 2.3.3 wird dann der Fall einer beliebigen Periodenlänge behandelt werden.

Es sei f integrierbar über $[-\pi, \pi]$ und es gelte für alle $x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx .$$

Integration über $[-\pi, \pi]$ liefert

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) dx$$

(es darf gliedweise integriert werden)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx}_{\frac{\sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx}_{=0}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad | \cdot \cos mx, m \geq 1, \int_{-\pi}^{\pi} \dots dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \cos mx + b_k \sin kx \cos mx \right) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx dx}_{\text{Integral verschwindet}} \end{aligned}$$

Da gilt, dass $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$, folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx = \frac{1}{2} \left[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos((k+m)x) dx}_{=0} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((k-m)x) dx \right] = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq m \\ \pi, & \text{falls } k = m \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx$$

Analog zeigt man, dass $b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx$ gilt.

Definition:

Es sei f über dem Intervall $[-\pi, \pi]$ integrierbar.
 Dann heißen die Zahlen a_k, b_k mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}$$

die **Fourier-Koeffizienten** der Funktion f . Die Reihe

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

heißt die zu f gehörende **Fourier-Reihe**.

Schreibweise: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

Die obige Entwicklung heißt **harmonische** oder **Fourier-Zerlegung**.

Bemerkung: Ist f 2π -periodisch, so sind die Integranden 2π -periodisch und jedes Intervall der Länge 2π kann als Integrationsintervall verwendet werden.

Spezialfälle:

1. Ist f gerade, so gilt $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0$ und $b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

2. Ist f ungerade, dann gilt $a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ und $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}$.

3. Gilt $f(x) = f(x + \pi) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, so gilt

$$a_{2k+1} = b_{2k+1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$a_{2k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos 2kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_{2k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin 2kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

4. Gilt $f(x) = -f(x + \pi)$ für $\forall x \in \mathbb{R}$, so gilt

$$a_0 = 0, \quad a_{2k} = b_{2k} = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$a_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(2k+1)x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(2k+1)x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis zu 3.:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 f(x) \cos kx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \right]$$

$$\int_{-\pi}^0 f(x) \cos kx \, dx = (-1)^k \int_{-\pi}^0 f(x + \pi) \cos k(x + \pi) \, dx = (-1)^k \int_0^{\pi} f(u) \cos ku \, du;$$

hier wurde $\cos k(x + \pi) = \underbrace{\cos kx}_{=(-1)^k} - \underbrace{\sin kx \sin k\pi}_{=0}$ verwendet und anschließend $u =$

$x + \pi$ substituiert.

Damit folgt:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[(-1)^k \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \right] = \begin{cases} 0 & k \text{ ungerade} \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx & k \text{ gerade} \end{cases}$$

Analoge Vorgehensweise für die b_k 's. Ebenso für 4.

Beispiel:

Vorbemerkung: Konvergiert die Fourier-Reihe einer Funktion für alle $x \in [-\pi, \pi]$, so konvergiert sie auch für alle $x \in \mathbb{R}$, da sie 2π -periodisch ist. Insofern ist es zweckmäßig, eine auf $[-\pi, \pi]$ definierte Funktion, deren Fourier-Reihe ermittelt werden soll, 2π -periodisch auf \mathbb{R} fortzusetzen.

Satz: Die Funktion f genüge den **Dirichlet-Bedingungen**, d.h.

- f sei mit Ausnahme endlich vieler Stellen in $[-\pi, \pi)$ definiert und durch $f(x) = f(x + 2\pi)$ 2π -periodisch auf \mathbb{R} fortgesetzt;
- f besitze in $[-\pi, \pi)$ nur endlich viele Unstetigkeitsstellen und für alle $x_0 \in [-\pi, \pi)$ existiere $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$;
- f' sei bis auf endlich viele Stellen in $[-\pi, \pi)$ stetig.

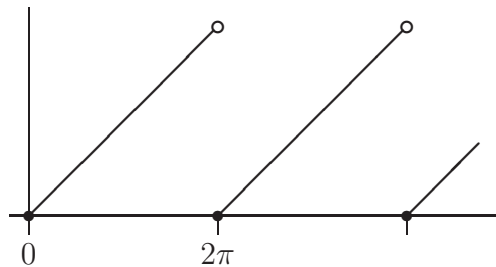
Dann konvergiert die Fourier-Reihe s zu f auf \mathbb{R} und es gilt

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} : \quad s(x_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right).$$

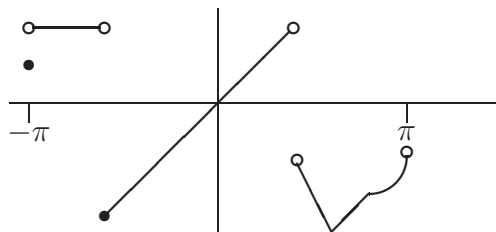
Bemerkungen:

1. Beispiele von Funktionen, die den Dirichlet-Bedingungen genügen:

a) Sägezahnkurve:



b)



2. Ist f an der Stelle x_0 stetig, so gilt $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ und damit $s(x_0) = f(x_0)$.
3. Falls f den Voraussetzungen des Satzes genügt, gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ (c sei eine Konstante)
 $|a_k|, |b_k| \leq \begin{cases} \frac{c}{k} & \text{falls es Stellen } x_0 \text{ gibt mit } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \\ \frac{c}{k^2} & \text{falls es keine solchen Stellen } x_0 \text{ gibt.} \end{cases}$

2.3.2 Beispiele von Fourier-Reihen

2.3.3 Fourier-Reihe einer Funktion mit beliebiger Periodenlänge

Es sei f eine $2p$ -periodische Funktion, dann ist g mit $g(x) = f(\frac{p}{\pi}x)$ 2π -periodisch, denn es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$g(x + 2\pi) = f(\frac{p}{\pi}(x + 2\pi)) = f(\frac{p}{\pi}x + 2p) = f(\frac{p}{\pi}x) = g(x)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cdot \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{p}{\pi}x) \cdot \cos kx \, dx$$

$$\text{Subst.: } u = \frac{p}{\pi}x, \quad x = \frac{\pi}{p}u$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{\pi}{p}, \quad dx = \frac{\pi}{p} \, du$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(u) \cdot \cos(k\frac{\pi}{p}u) \, du$$

Damit können wir unsere zunächst für den 2π -periodischen Fall gewonnenen Ergebnisse auf den Fall einer beliebigen Periodenlänge verallgemeinern:

Definition:

Es sei f über dem Intervall $[-p, p]$ integrierbar.
Dann heißen die Zahlen a_k, b_k mit

$$a_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos k\frac{\pi}{p}x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin k\frac{\pi}{p}x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}$$

die **Fourier-Koeffizienten** der Funktion f . Die Reihe

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\frac{\pi}{p}x + b_k \sin k\frac{\pi}{p}x$$

heißt die zu f gehörende **Fourier-Reihe**.

Bemerkung: Ist f $2p$ -periodisch, so sind die Integranden $2p$ -periodisch und jedes Intervall der Länge $2p$ kann als Integrationsintervall verwendet werden.

Spezialfälle:

1. Ist f gerade, so gilt $a_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos k \frac{\pi}{p} x \, dx$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $b_k = 0 \, \forall k \in \mathbb{N}$.

2. Ist f ungerade, dann gilt $a_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$ und $b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin k \frac{\pi}{p} x \, dx$, $k \in \mathbb{N}$.

3. Gilt $f(x) = f(x+p) \, \forall x \in \mathbb{R}$, so gilt

$$a_{2k+1} = b_{2k+1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$a_{2k} = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos 2k \frac{\pi}{p} x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_{2k} = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin 2k \frac{\pi}{p} x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

4. Gilt $f(x) = -f(x+p) \, \forall x \in \mathbb{R}$, so gilt

$$a_0 = 0, \quad a_{2k} = b_{2k} = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$a_{2k+1} = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos(2k+1) \frac{\pi}{p} x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_{2k+1} = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin(2k+1) \frac{\pi}{p} x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Satz: Die Funktion f genüge den **Dirichlet-Bedingungen**, d.h.

- f sei mit Ausnahme endlich vieler Stellen in $[-p, p)$ definiert und durch $f(x) = f(x+2p)$ $2p$ -periodisch auf \mathbb{R} fortgesetzt;
- f besitze in $[-p, p)$ nur endlich viele Unstetigkeitsstellen und für alle $x_0 \in [-p, p)$ existiere $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$;
- f' sei bis auf endlich viele Stellen in $[-p, p)$ stetig.

Dann konvergiert die Fourier-Reihe s zu f auf \mathbb{R} und es gilt

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} : \quad s(x_0) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right).$$

Die Vorbemerkung und die Bemerkungen zu dem entsprechenden Satz in § 2.3.1 gelten sinngemäß auch im Fall einer beliebigen Periodenlänge.

Alternative Darstellungen der Fourier-Reihe:

In Anwendungen bedeutet häufig $x = t$ die Zeit und $\frac{\pi}{p} = \omega = \frac{2\pi}{T}$ die Kreisfrequenz. Damit lautet die Fourier-Reihe zu f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$$

mit

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t \, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t \, dt$$

Eine weitere Darstellung ergibt sich aus der Beziehung

$$a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t = A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

Begründung für diese Beziehung:

$$A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) = \underbrace{A_k \sin \varphi_k}_{a_k} \cos k\omega t + \underbrace{A_k \cos \varphi_k}_{b_k} \sin k\omega t$$

umgekehrt:

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{A_k^2 \sin^2 \varphi_k + A_k^2 \cos^2 \varphi_k} = A_k \sqrt{\cos^2 \varphi_k + \sin^2 \varphi_k} = A_k$$

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{A_k \sin \varphi_k}{A_k \cos \varphi_k} = \tan \varphi_k \quad (\text{im Fall } b_k = 0 \text{ ist } \varphi_k = \text{sgn}(a_k) \frac{\pi}{2}).$$

Damit lässt sich die Fourier-Reihe zu f auch schreiben als

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k);$$

A_k ist die Amplitude der k -ten Teilschwingung,

φ_k ist die Phase der k -ten Teilschwingung.

2.3.4 Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe

Wir betrachten zunächst wieder den 2π -periodischen Fall.

Bricht eine Fourier-Reihe ab, so erhält man ein trigonometrisches Polynom

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx .$$

Mit Hilfe der Eulerschen Formel $e^{jx} = \cos x + j \sin x$ und $e^{-jx} = \cos x - j \sin x$ ergibt sich $\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$ und $\sin x = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})$; eingesetzt in das obige Polynom liefert dies:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2} (e^{jkx} + e^{-jkx}) - \frac{j}{2} b_k (e^{jkx} - e^{-jkx}) &= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{c_0} + \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{a_k - jb_k}{2}}_{c_k} e^{jkx} + \underbrace{\frac{a_k + jb_k}{2}}_{c_{-k}} e^{-jkx} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^n c_k e^{jkx} + \sum_{k=1}^n c_{-k} e^{-jkx} = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k e^{jkx} + \sum_{k=-n}^{-1} c_k e^{jkx} = \sum_{k=-n}^n c_k e^{jkx} \end{aligned}$$

Durch den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ erhalten wir, dass eine trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

durch die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkx} \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{C}$$

dargestellt werden kann, wobei die Konvergenz der komplexen Reihe bedeutet, dass der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{jkx}$ in \mathbb{C} existiert.

Für die Koeffizienten c_k gilt:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - jb_k) & \text{für } k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + jb_{-k}) & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

Folgerung: Wenn f gerade ist, so folgt $c_k \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{Z}$.

Ist f ungerade, dann sind die c_k 's rein imaginär oder verschwinden.

Umgekehrt gilt:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_k &= c_k + c_{-k} = 2 \operatorname{Re}(c_k) & k \in \mathbb{N} \\ b_k &= j(c_k - c_{-k}) = -2 \operatorname{Im}(c_k) & k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Ferner gilt $c_k^* = c_{-k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Für die Amplituden A_k gilt:

$$\begin{aligned} A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{4(\operatorname{Re}(c_k))^2 + 4(\operatorname{Im}(c_k))^2} = 2\sqrt{(\operatorname{Re}(c_k))^2 + (\operatorname{Im}(c_k))^2} \\ &= 2|c_k| = 2|c_{-k}| \end{aligned}$$

Direkte Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Für $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx - \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{jkx} + e^{-jkx})dx - \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{jkx} - e^{-jkx})dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jkx} dx \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{jkx} dx .$$

Damit gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jkx} dx .$$

Beispiel:

Komplexe Form der Fourier-Reihe einer Funktion mit bel. Periodenlänge

Ist f eine $2p$ -periodische Funktion, so lautet die komplexe Darstellung der Fourier-Reihe zu f

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{\pi}{p}x} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x)e^{-jk\frac{\pi}{p}x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

3 Fourier-Transformation

Diese Einführung basiert auf

G. Glatz, H. Grieb, E. Hohloch, H. Kümmerer, R. Mohr

Fourier-Analyse

Brücken zur Mathematik, Bd. 7

Cornelsen Verlag, Berlin, 1996

3.1 Spektraldichte

Es sei f periodisch mit der Periode T und $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$. Es gelte $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$ mit

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Annahme: $c_k \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$\Delta\omega := \omega_0$$

$$\omega_k := k\omega_0 = k\Delta\omega.$$

$$\text{Dann gilt } \omega_0 = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{und damit } \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}.$$

Wir betrachten das sog. „normierte Spektrum“

$$c_k T = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_k t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k T) e^{j\omega_k t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k T) e^{j\omega_k t} \Delta\omega$$

Idee: Ausgehend von einer periodischen Funktion mit der Periode T , erhält man durch den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$, d.h. $\Delta\omega \rightarrow 0$, den Übergang zu der Spektraldarstellung einer nicht-periodischen Funktion.

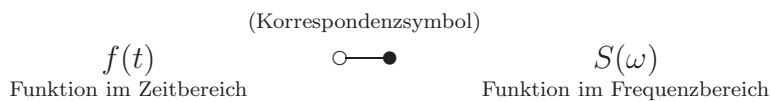
$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_k t} dt}_{c_k T} & \xrightarrow{T \rightarrow \infty} & \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt}_{\text{(Spektraldichte)} S(\omega)} \\
 \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k T) e^{j\omega_k t} \Delta\omega}_{s(t)} & \longrightarrow & \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega}_{\substack{=f(t) \\ \text{„Umkehrformel“}}}
 \end{array}$$

Definition:

Zu einer gegebenen Zeitfunktion f heißt

$$S(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

Spektraldichte der Funktion f ; das auftretende Integral heißt **Fourier-Integral**.



Die Zuordnung $f \mapsto S$ heißt **Fourier-Transformation**.

Analogie:

- periodische Funktion \leftrightarrow diskretes Spektrum $\{A_k, \varphi_k\}$ bzw. $\{c_k\}$
- aperiodische Funktion \leftrightarrow kontinuierliches Spektrum $S(\omega)$

Beispiel (Spektrum eines Rechteckimpulses):

Impulsdauer $T_i = 2T_1$

Periode $T = 2T_0$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq T_1 \\ 0 & \text{für } T_1 < |t| \leq T_0 \end{cases}$$

$$f(t + T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{T_0}$$

Fourier-Koeffizienten:

$$c_0 = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_1}^{T_1} f(t) dt = \frac{2T_1}{2T_0} = \frac{T_1}{T_0}$$

$$c_k = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2T_0} \left\{ \int_{-T_1}^{T_1} \cos k\omega_0 t dt - j \overbrace{\int_{-T_1}^{T_1} \sin k\omega_0 t dt}^{=0} \right\}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_1} \cos k\omega_0 t dt = \frac{1}{T_0 k \omega_0} \sin k\omega_0 T_1 = \frac{1}{T_0 k \frac{\pi}{T_0}} \sin k \frac{T_1}{T_0} \pi = \frac{1}{k\pi} \sin k \frac{T_1}{T_0} \pi$$

Spektrum für verschiedene Quotienten $n = \frac{T}{T_i} = \frac{T_0}{T_1}$:

Im Folgenden sei T_1 fest und T variiert.

$$c_0 = \frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{n}; \quad c_k = \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi \frac{1}{n})$$

normiertes Spektrum: Mit $\omega_k = k\omega_0$ und $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ erhält man für $k \neq 0$

$$c_k T = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{k\pi} \sin(\omega_k T_1) = 2 \frac{\sin(\omega_k T_1)}{\omega_k} = 2T_1 \frac{\sin(\omega_k T_1)}{\omega_k T_1}$$

Setzt man $u = \omega_k T_1$, so besitzen alle Spektrallinien die Hüllkurve $\tilde{F}(u) = 2T_1 \frac{\sin u}{u}$ mit den Nullstellen $u = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$

$$\{c_k T\} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \tilde{F}(u) = 2T_1 \frac{\sin u}{u}$$

$S(\omega) = \tilde{F}(\omega T_1)$ ist die Spektraldichte (des Rechteckimpulses).

Berechnung der Spektraldichte des Rechteckimpulses mit Hilfe der Definition:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq T_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $\omega \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{-e^{-j\omega t}}{j\omega} \right|_{-T_1}^{T_1} \\ &= -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}) = \frac{2}{\omega} \underbrace{\frac{e^{j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}}{2j}}_{\sin \omega T_1} \\ &= 2T_1 \frac{\sin \omega T_1}{\omega T_1}. \end{aligned}$$

Sinus cardinalis

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{für } t \neq 0 \\ 1 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

Achtung! Zuweilen findet man auch die Definition $\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$.

3.2 Vorbereitungen

Bemerkung: Die graphischen Veranschaulichungen sind vom Leser einzutragen.

3.2.1 Einheitssprungfunktion

Definition (Einheitssprungfunktion, Heaviside-Funktion):

$$\sigma(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

Beispiel 1:

Rechteckimpuls:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -T \leq t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(t) = \sigma(t + T) - \sigma(t - T)$$

$$t + T \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -T$$

$$t - T \geq 0 \Leftrightarrow t \geq T$$

Beispiel 2:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -T \leq t < 0 \\ -1 & \text{für } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(t) = \sigma(t + T) - 2\sigma(t) + \sigma(t - T)$$

Beispiel 3:

$$f(t) = \begin{cases} m(t - a) & \text{für } a \leq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(t) = m(t - a)\sigma(t - a)$$

3.2.2 Einheitsimpuls

$$d_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} [\sigma(t) - \sigma(t - \varepsilon)]$$

$$\text{Es gilt: } \int_{-\infty}^{\infty} d_\varepsilon(t) dt = 1.$$

Definition (Einheitsimpuls, Dirac-Impuls, Dirac-Stoß):

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\sigma(t) - \sigma(t - \varepsilon)]$$

δ ist eine verallgemeinerte Funktion (Distribution)

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{falls } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$\delta(t)$ wird durch einen nach oben gerichteten Pfeil der Länge 1 dargestellt.

Der Einheitsimpuls an der Stelle t_0 wird beschrieben durch $\delta(t-t_0)$.

Eigenschaften von δ :

Es gilt $\delta(-t) = \delta(t)$, d.h. δ ist gerade.

Ausblendeigenschaft: $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$

Insbesondere gilt für $t_0 = 0$: $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

Beispiel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos t \delta(t + \frac{\pi}{2})dt = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$$

Zusammenhang zwischen σ und δ :

Definition:

Die Einheitssprungfunktion σ lässt sich approximieren durch die Rampenfunktion s_ε .

$$s_\varepsilon(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{t}{\varepsilon} & \text{für } 0 \leq t < \varepsilon \\ 1 & \text{für } \varepsilon \leq t \end{cases}$$

Damit gilt:

$$\delta(t) = \dot{\sigma}(t)$$

Beispiel (Dreieckimpuls):

$$u(t) = \left(1 + \frac{t}{T}\right) [\sigma(t+T) - \sigma(t)] + \left(1 - \frac{t}{T}\right) [\sigma(t) - \sigma(t-T)]$$

Formales Differenzieren liefert:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \frac{du}{dt} = \frac{1}{T} [\sigma(t+T) - \sigma(t)] + \left(1 + \frac{t}{T}\right) [\delta(t+T) - \delta(t)] \\ &\quad - \frac{1}{T} [\sigma(t) - \sigma(t-T)] + \left(1 - \frac{t}{T}\right) [\delta(t) - \delta(t-T)] \\ &= \frac{1}{T} [\sigma(t+T) - 2\sigma(t) + \sigma(t-T)] + \delta(t+T) - \delta(t-T) \\ &\quad + \frac{1}{T} \left[\underbrace{t\delta(t+T)}_{-T\delta(t+T)} - \underbrace{2t\delta(t)}_{=0\delta(t)} + \underbrace{t\delta(t-T)}_{T\delta(t-T)} \right] \\ &\quad \text{(Ausblendeigenschaft)} \\ \dot{u}(t) &= \frac{1}{T} [\sigma(t+T) - 2\sigma(t) + \sigma(t-T)] \end{aligned}$$

siehe Beispiel 2 in § 3.2.1. Ferner gilt

$$\ddot{u}(t) = \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{T} [\delta(t+T) - 2\delta(t) + \delta(t-T)].$$

3.2.3 Faltung

Definition:

Unter der Faltung der beiden Funktionen f_1, f_2 versteht man die Operation $f_1 * f_2$ definiert durch

$$f_1 * f_2(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$$

Satz:

Das Faltungsprodukt ist kommutativ, d.h. es gilt

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f_2 * f_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(u) f_1(t - u) du \stackrel{\text{Subst: } \tau=t-u}{\underset{du=-d\tau}{=}} - \int_{\infty}^{-\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = f_1 * f_2(t) \end{aligned}$$

□

Satz (o.B.):

Die Faltung ist assoziativ und distributiv bezüglich der Addition, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} f_1 * (f_2 * f_3) &= (f_1 * f_2) * f_3 \\ f * (g_1 + g_2) &= f * g_1 + f * g_2 \end{aligned}$$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} f_1(t) = f_2(t) = f(t) &= e^{-t} \cdot \sigma(t) \\ f * f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \sigma(\tau) e^{-(t-\tau)} \sigma(t - \tau) d\tau \\ &= \sigma(t) \int_0^t e^{-\tau} e^{-(t-\tau)} d\tau = \sigma(t) e^{-t} \int_0^t 1 d\tau = t e^{-t} \sigma(t) \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned}
 f_1(t) &= e^{-t}\sigma(t), \quad f_2 = \sigma(t) - \sigma(t - T) \\
 f_2 * f_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\sigma(\tau) - \sigma(\tau - T)] e^{-(t-\tau)} \sigma(t - \tau) d\tau \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \int_0^t e^{-t}\sigma(\tau) d\tau & \text{für } 0 \leq t < T \\ \int_0^T e^{-t}\sigma(\tau) d\tau & \text{für } T \leq t \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{für } 0 \leq t < T \\ e^{-t} (e^T - 1) & \text{für } T \leq t \end{cases}
 \end{aligned}$$

Nebenrechnung: $\int_0^t e^{-t}\sigma(\tau) d\tau = e^{-t} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau = e^{-t} e^{\tau} \Big|_0^t = e^{-t} (e^t - 1)$

3.3 Die Fourier-Transformation und ihre Umkehrung

3.3.1 Definition und Existenz der Fourier-Transformierten

aus § 3.1: $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$

Umkehrformel: $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

Übliche Bezeichnungen:

Frequenzvariable:	Statt der Kreisfrequenz ω wird als Frequenz f mit $\omega = 2\pi f$ verwendet.
Zeitfunktion:	$s(t)$ (statt $f(t)$)
Frequenzfunktion:	$S(f)$ (statt $S(\omega)$)

Definition (Fourier-Transformation):

Es sei s eine auf \mathbb{R} definierte reellwertige Funktion. Existiert das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt$ für alle $f \in \mathbb{R}$, so wird hierdurch auf \mathbb{R} eine Funktion S mit

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

definiert. S heißt die **Fourier-Transformierte** zu s . Die hierdurch gegebene Zuordnung $s(t) \rightarrow S(f)$ heißt **Fourier-Transformation**.

Bemerkungen:

1. Die Fourier-Transformation ist nicht eindeutig, denn sind s_1 und s_2 auf \mathbb{R} definierte reellwertige Funktionen, deren Funktionswerte sich nur an endlich vielen Stellen voneinander unterscheiden, so besitzen doch beide die gleiche Fourier-Transformierte, da sich der Wert eines Integrals nicht ändert, wenn man den Integranden an endlich vielen Stellen abändert.
2. Nicht für jede auf \mathbb{R} definierte Funktion existiert das Fourier-Integral. Als Beispiel wählen wir $s(t) = 1 \forall t \in \mathbb{R}$. Um die Frage der Konvergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{zu entscheiden, betrachten wir}$$

$$\int_0^a e^{-j2\pi ft} dt = -\frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_0^a.$$

Der Grenzwert für $a \rightarrow \infty$ existiert nicht, da $e^{-j2\pi fa} = \cos 2\pi fa - j \sin 2\pi fa$ für $a \rightarrow \infty$ unbestimmt divergent ist.

Satz:

Ist die Funktion $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *absolut integrierbar*, d.h. gilt $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$, dann besitzt s eine Fourier-Transformierte, welche überdies beschränkt ist.

Beweis: Für alle $f \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)e^{-j2\pi ft}| dt \underbrace{=}_{\substack{= \\ \forall t \in \mathbb{R}}} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$$

□

3.3.2 Umkehrformel

Satz (o.B.):

Die Funktion $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei absolut integrierbar mit der Eigenschaft, dass auf jedem beschränkten Intervall sowohl s als auch s' bis auf endlich viele Sprungstellen stetig sind.

Es gelte für alle $t_0 \in \mathbb{R}$: $s(t_0) = \frac{1}{2}(\lim_{t \rightarrow t_0^-} s(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^+} s(t))$.

Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft} df.$$

Bemerkung: Das Integral in der Umkehrformel ist als der sogenannte *Cauchysche Hauptwert* zu verstehen:

$\int_{-\infty}^{\infty} \dots df = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \dots df$, d.h. die Grenzübergänge gegen $\pm\infty$ sind in der gleiche Weise vorzunehmen.

Definition:

Die Zeitfunktion $s(t)$ und die Frequenzfunktion $S(f)$ bilden ein

Fourier-Transformationspaar, wenn sie den folgenden Gleichungen genügen:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft} df.$$

Bezeichnung: $s(t) \circ \bullet S(f)$
 s heißt *Original-/Oberfunktion*
 S heißt *Bild-/Unterfunktion*

3.3.3 Darstellungen der Spektraldichte

Aufspalten in Real- und Imaginärteil:

Mit $e^{-j2\pi ft} = \cos 2\pi ft - j \sin 2\pi ft$ folgt

$$\begin{aligned}
 S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) [\cos 2\pi ft - j \sin 2\pi ft] dt \\
 &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos 2\pi ft dt}_{R(f)} + j \underbrace{\left(- \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin 2\pi ft dt \right)}_{I(f)} \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{Fourier-Cosinus-Transformation} \qquad\qquad\qquad \text{Fourier-Sinus-Transformation}
 \end{aligned}$$

Kartesische Darstellung: $S(f) = R(f) + jI(f)$

$R(f), I(f)$ sind reellwertig

R ist gerade: $R(-f) = R(f)$

I ist ungerade: $I(-f) = -I(f)$

Ferner gilt:

$$s(t) \text{ gerade} \Rightarrow S(f) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos 2\pi ft dt$$

$$s(t) \text{ ungerade} \Rightarrow S(f) = -2j \int_0^{\infty} s(t) \sin 2\pi ft dt$$

Darstellung in der Exponentialform

$$S(f) = |S(f)| e^{j\varphi(f)}$$

$$|S(f)| = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)}$$

Betrag (Amplitude)

$$\varphi(f) = \arctan \frac{I(f)}{R(f)}$$

Argument (Phase)

$|S(f)|$ und $\varphi(f)$ sind reellwertig

$|S(f)|$ ist gerade

$\varphi(f)$ ist ungerade

Beispiel:

$$s(t) = e^{-\alpha t} \cdot \sigma(t), \quad 0 < \alpha$$

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} dt = -\frac{1}{\alpha + j2\pi f} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{-e^{-\alpha t}}{\alpha + j2\pi f} [\cos 2\pi f t - j \sin 2\pi f t] \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{-1}{\alpha + j2\pi f} \left[\underbrace{\lim_{u \rightarrow \infty} \{ e^{-\alpha u} [\cos 2\pi f u - j \sin 2\pi f u] \}}_{=0} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \cdot \frac{\alpha - j2\pi f}{\alpha - j2\pi f} = \underbrace{\frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}_{R(f)} + j \underbrace{\frac{-2\pi f}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}_{I(f)} \end{aligned}$$

$$e^{-\alpha t} \sigma(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{\alpha - j2\pi f}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

$$|S(f)| = \sqrt{\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)^2} + \frac{4\pi^2 f^2}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

$$\varphi(f) = \arctan \left(-\frac{2\pi f}{\alpha} \right) = -\arctan \frac{2\pi f}{\alpha}$$

3.4 Eigenschaften der Fourier-Transformation

Satz (Additionssatz):

$$\mathcal{F}\{\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2\} = \alpha_1 \mathcal{F}\{s_1\} + \alpha_2 \mathcal{F}\{s_2\} \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: Gilt für $\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i$ entsprechend; \mathcal{F}^{-1} ist ebenfalls linear.

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j2\pi ft} dt + \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \alpha_1 \mathcal{F}\{s_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{F}\{s_2(t)\}. \end{aligned}$$

□

Satz (Vertauschungssatz):

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} \quad \Rightarrow \quad s(-f) = \mathcal{F}\{S(t)\}$$

Beispiel (vgl. Beispiel in § 3.1):

$$r(t) = \sigma(t+T) - \sigma(t-T) \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \begin{cases} 2T \frac{\sin 2\pi f T}{2\pi f T} & f \neq 0 \\ 2T & f = 0 \end{cases}$$

$$R(t) = \begin{cases} 2T \frac{\sin(2\pi t T)}{2\pi t T} & \text{falls } t \neq 0 \\ 2T & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\{R(t)\} = r(-f) = \sigma(-f+T) - \sigma(-f-T)$$

Satz:

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} \Rightarrow S(-f) = \mathcal{F}\{s(-t)\}$$

Beweis: $\int_{-\infty}^{\infty} s(-t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(u)e^{-j2\pi(-f)u} du = S(-f)$ Substitution:
 $u = -t \Rightarrow du = -dt$ □

Beispiel (Fortsetzung): $s(t) = e^{-\alpha t}\sigma(t)$

$$s(-t) = e^{\alpha t}\sigma(-t) \quad \mathcal{F}\{s(-t)\} = S(-f) = \frac{1}{\alpha - j2\pi f} = \frac{\alpha + j2\pi f}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

$$e^{-\alpha|t|} = \begin{cases} e^{-\alpha t}\sigma(t) + e^{\alpha t}\sigma(-t) & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\{e^{-\alpha|t|}\} = \mathcal{F}\{e^{-\alpha t}\sigma(t)\} + \mathcal{F}\{e^{\alpha t}\sigma(-t)\}$$

$$= \frac{1}{\alpha + j2\pi f} + \frac{1}{\alpha - j2\pi f} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

Satz (Zeitverschiebungssatz):

$$\mathcal{F}\{s(t - t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} \mathcal{F}\{s(t)\}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{s(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt \stackrel{\substack{\text{Subst: } u=t-t_0 \\ t=u+t_0 \\ dt=du}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} s(u) e^{-j2\pi f(u+t_0)} du \\ &= e^{-j2\pi f t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(u) e^{-j2\pi f u} du}_{\mathcal{F}\{s(t)\}} \end{aligned}$$

□

Beispiel:

$$\begin{aligned} s(t) &= e^{-\alpha t} \sigma(t), & S(f) &= \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \quad (\text{vgl. § 3.3.3}) \\ \mathcal{F}\{e^{\alpha(t-t_0)} \sigma(t - t_0)\} &= \frac{e^{-j2\pi f t_0}}{\alpha + j2\pi f}. \end{aligned}$$

Satz (Frequenzverschiebungssatz):

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} \quad \Rightarrow \quad S(f - f_0) = \mathcal{F}\{s(t) e^{j2\pi f_0 t}\}$$

Beweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = S(f - f_0).$$

□

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 r(t) = \sigma(t+T) - \sigma(t-T) & \quad \circ \text{---} \bullet \quad \begin{cases} 2T \frac{\sin 2\pi f T}{2\pi f T} & f \neq 0 \\ 2T & f = 0 \end{cases} \\
 r(t)e^{j2\pi f_0 t} & \quad \circ \text{---} \bullet \quad \begin{cases} 2T \frac{\sin 2\pi(f-f_0)T}{2\pi(f-f_0)T} & \text{falls } f \neq f_0 \\ 2T & \text{falls } f = f_0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Anwendung:

$$\begin{aligned}
 S(f-f_0) &= \mathcal{F} \{s(t)e^{j2\pi f_0 t}\} \\
 S(f+f_0) &= \mathcal{F} \{s(t)e^{-j2\pi f_0 t}\} \\
 S(f-f_0) + S(f+f_0) &= \mathcal{F} \left\{ s(t) \underbrace{(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})}_{2 \cos 2\pi f_0 t} \right\}
 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$S(f) = \mathcal{F} \{s(t)\} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(S(f-f_0) + S(f+f_0)) = \mathcal{F} \{s(t) \cos 2\pi f_0 t\}.$$

Satz (Ähnlichkeitssatz):

$$S(f) = \mathcal{F} \{s(t)\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} \{s(at)\} = \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right) \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Beweis: Siehe Übung. □

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 r(t) = \sigma(t+T) - \sigma(t-T) & \quad \circ \text{---} \bullet \quad \begin{cases} 2T \frac{\sin(2\pi f T)}{2\pi f T} & f \neq 0 \\ 2T & f = 0 \end{cases} \\
 a = \frac{1}{2} : \quad r\left(\frac{t}{2}\right) = \sigma\left(\frac{t}{2} + T\right) - \sigma\left(\frac{t}{2} - T\right) & \quad \circ \text{---} \bullet \quad \begin{cases} 4T \frac{\sin(4\pi f T)}{4\pi f T} & f \neq 0 \\ 4T & f = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Satz (Differentiation im Zeitbereich):

$$\underbrace{s(t) \circ \bullet S(f)}_{\text{Fourier-Transformationspaar}} \Rightarrow \frac{d^n s}{dt^n} \circ \bullet (j2\pi f)^n S(f)$$

Beweis: Aufgrund der Umkehrformel gilt

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df$$

$$\dot{s}(t) = \frac{ds}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) j2\pi f e^{j2\pi f t} df \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Umkehrformel}} \dot{s}(t) \circ \bullet j2\pi f S(f)$$

Für die höheren Ableitungen analog. □

Satz (Differentiation im Frequenzbereich):

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} \Rightarrow \frac{d^n S}{df^n} = \mathcal{F}\{(-j2\pi t)^n s(t)\}$$

Beweis: Durch Differentiation der Definitionsgleichung. □

Folgerung (Multiplikationssatz):

$$\left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n S}{df^n} = \mathcal{F}\{t^n s(t)\}$$

Beispiel:

$$r(t) = \sigma(t+T) - \sigma(t-T) \circ \bullet \begin{cases} 2T \frac{\sin 2\pi f T}{2\pi f T} & f \neq 0 \\ 2T & f = 0 \end{cases}$$

$$tr(t) \circ \bullet \begin{cases} \frac{j}{2\pi^2 f^2} [2\pi f T \cos 2\pi f T - \sin 2\pi f T] & f \neq 0 \\ 0 & f = 0 \end{cases}$$

Satz (1. Faltungssatz):

$$S_i(f) = \mathcal{F}\{s_i(t)\}, \quad i = 1, 2 \quad \Rightarrow \quad S_1 \cdot S_2 = \mathcal{F}\{s_1 * s_2\}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{s_1 * s_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt \\ &\stackrel{\substack{\text{Vertauschen der} \\ \text{Integrationsreihenfolge} \\ \text{ist erlaubt}}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} s_2(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt \right) d\tau \\ &\stackrel{*}{=} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) e^{-j2\pi f\tau} S_2(f) d\tau \\ &= S_2(f) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau}_{S_1(f)} = S_1(f) \cdot S_2(f) \end{aligned}$$

* Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} s_2(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt \\ &\stackrel{\substack{\text{Subst: } u=t-\tau \\ \Rightarrow t=u+\tau \\ du=dt}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} s_2(u) e^{-j2\pi f(u+\tau)} du = e^{-j2\pi f\tau} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_2(u) e^{-j2\pi fu} du}_{S_2(f)} \end{aligned}$$

□

Beispiel:

$$s_1(t) = s_2(t) = e^{-\alpha t} \sigma(t)$$

Dann gilt (vgl. § 3.3.3) $\mathcal{F}\{s(t)\} = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$

und (vgl. § 3.2.3) $s * s(t) = te^{-\alpha t} \sigma(t)$

und damit $\mathcal{F}\{te^{-\alpha t} \sigma(t)\} = \frac{1}{(\alpha + j2\pi f)^2}$

Satz (2.Faltungssatz):

$$S_i(f) = \mathcal{F}\{s_i(t)\}, \quad i = 1, 2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{s_1 \cdot s_2\} = S_1 * S_2$$

Beweis: Analog zum 1. Faltungssatz. □

Satz (Integrationsatz):

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j2\pi f} S(f) + \frac{1}{2} S(0) \cdot \delta(f)$$

Beweis: Folgt in § 3.5.3 □

Satz (Parsevalsche Gleichung):

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

Beweis: Wir wählen im 2. Faltungssatz $s_1 = s_2 =: s$, dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) S(f_0 - f) df$$

Speziell für $f_0 = 0$ ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot S(-f) df$$

Nun gilt (vgl. § 3.3.3):

$$\begin{aligned} S(f) &= R(f) + jI(f) \\ S(-f) &= R(-f) + jI(-f) = R(f) - jI(f) = S^*(f) \\ \Rightarrow S(f) \cdot S(-f) &= R^2(f) + I^2(f) = |S(f)|^2 \end{aligned}$$

□

Folgerung:

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 d\omega = \frac{\pi}{2}$$

Beweis:

Wir wählen $r(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$; dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} r^2(t) dt = \int_{-1}^1 1 dt = 2$$

Anwendung der Parsevalschen Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R^2(f) df &= \int_{-\infty}^{\infty} r^2(t) dt = 2 \\ &\parallel \\ 4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin 2\pi f}{2\pi f} \right)^2 df &= \frac{4}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 d\omega \end{aligned}$$

Substitution:
 $\omega = 2\pi f; \frac{d\omega}{df} = 2\pi$

Beachtet man, dass der Integrand gerade ist, so folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 d\omega$$

und damit

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 d\omega = \frac{2 \cdot 2\pi}{4 \cdot 2} = \frac{\pi}{2}.$$

□

3.5 Weitere Beispiele und Anwendungen

3.5.1 Fourier-Transformierte des Einheitsimpulses

Mittels der Ausblendeigenschaft des Einheitsimpulses erhält man

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi 0f} = 1 \quad \boxed{\delta(t) \circ\text{---}\bullet 1}$$

Mittels Vertauschungssatz folgt: $\boxed{1 \circ\text{---}\bullet \delta(-f) = \delta(f)}$

3.5.2 Fourier-Transformierte der Einheitssprungfunktion

Konstruktion der Spektraldichte von $\sigma(t)$ über die Spektraldichte \tilde{S} der Signum-Funktion $\text{sgn}(t)$:

$$\text{sgn}(t) = \sigma(t) - \sigma(-t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad \tilde{S}(f)$$

Verallgemeinerte Ableitung (vgl. § 3.2.2)

$$\frac{d}{dt} \text{sgn}(t) = \delta(t) - (-\delta(-t)) = 2\delta(t)$$

$$\frac{d}{dt} \text{sgn}(t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad 2;$$

andererseits liefert der Differentiationsatz:

$$\frac{d}{dt} \text{sgn}(t) \quad \circ\text{---}\bullet \quad j2\pi f \tilde{S}(f)$$

Der Vergleich der rechten Seiten ergibt

$$\tilde{S}(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

Die Einheitssprungfunktion σ lässt sich mit Hilfe der Signum-Funktion darstellen:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) + \frac{1}{2} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

Damit folgt:

$$\sigma(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(t)$$

3.5.3 Beweis des Integrationsatzes

Faltung der Zeitfunktion $s(t)$ mit der Einheitssprungfunktion liefert

$$(s * \sigma)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\sigma(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^t s(\tau)d\tau.$$

Anwendung des 1. Faltungssatzes ergibt

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t s(\tau)d\tau \right\} \stackrel{3.5.2}{=} S(f) \left(\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f) \right)$$

$$\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Ausblendeigenschaft} \\ \text{von } \delta(f)}}{=} \frac{1}{j2\pi f} S(f) + \frac{1}{2} S(0)\delta(f).$$

3.5.4 Fourier-Transformierte des Dreieckimpulses

Für die 2. Ableitung von s gilt nach § 3.2.2

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{1}{T} [\delta(t + T) - 2\delta(t) + \delta(t - T)] \quad \overset{\substack{\text{(Zeitverschie-} \\ \text{bungssatz)}}}{\circ \bullet} \frac{1}{T} [e^{j2\pi fT} - 2 + e^{-j2\pi fT}]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{T} [e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}]^2 \\
 &= \frac{1}{T} [2j \sin \pi fT]^2 = -\frac{4}{T} \sin^2(\pi fT)
 \end{aligned}$$

Andererseits gilt nach dem Differentiationssatz

$$\frac{d^2 s}{dt^2} \quad \circ \text{---} \bullet \quad (j2\pi f)^2 S(f) = -4\pi^2 f^2 \cdot S(f)$$

Durch Vergleich der beiden Bildfunktionen erhält man:

$$S(f) = \begin{cases} T \left(\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} \right)^2 & \text{für } f \neq 0 \\ T & \text{für } f = 0 \end{cases} .$$

3.5.5 Fourier-Transformierte periodischer Funktionen

Mit $\delta(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad 1$ und $s(t) \equiv 1 \quad \circ \text{---} \bullet \quad S(f) = \delta(f)$ folgt unter Verwendung des Frequenzverschiebungssatzes:

$$\begin{aligned}
 S(f - f_0) = \delta(f - f_0) & \bullet \text{---} \circ \quad s(t)e^{j2\pi f_0 t} = e^{j2\pi f_0 t} \\
 e^{j2\pi f_0 t} & \circ \text{---} \bullet \quad \delta(f - f_0)
 \end{aligned}$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad S(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - k f_0)$$

Fourier-Reihe der periodischen Funktion s mit der Periode $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f_0}$

Die Fourier-Transformierte einer Fourier-Reihe besteht aus Einheitsimpulsen der Intensität c_k an den Stellen $k \cdot f_0$.

Zusammenhang zwischen der Spektraldichte eines Einzelimpulses und den komplexen Fourierkoeffizienten der zugehörigen periodischen Impulsfunktion:

Wir betrachten den Einzelimpuls $s_0(t)$

$$s_0(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad S_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_0(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Für die komplexen Fourierkoeffizienten der durch periodische Fortsetzung entstehenden Funktion $s(t)$ gilt

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad \text{mit} \quad T = \frac{1}{f_0}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0.$$

Der Vergleich der beiden Darstellungen liefert

$$c_k = \frac{1}{T} S_0(k f_0), \quad k \in \mathbb{Z}$$

d.h. die normierten komplexen Fourierkoeffizienten $\{c_k T\}$ sind die Funktionswerte der Spektraldichte des zugrundeliegenden Einzelimpulses s_0 an den Stellen $k f_0$. Damit erhält man für die Fourier-Transformierte der periodischen Impulsfunktion $s(t)$ die Darstellung

$$S(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_0(k f_0) \delta(f - k f_0).$$

Beispiel:

$$s_0(t) = \begin{cases} t, & -\pi \leq t < \pi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt (vgl. Beispiel in § 3.4)

$$S_0(f) = \frac{j}{2\pi^2 f^2} [2\pi^2 f \cos(2\pi^2 f) - \sin(2\pi^2 f)].$$

Mit $T = 2\pi$, d.h. $kf_0 = \frac{k}{2\pi}$, folgt

$$\begin{aligned} S_0(kf_0) &= \frac{2j}{k^2} \left[\underbrace{k\pi \cos(k\pi)}_{(-1)^k} - \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} \right] \\ &= (-1)^k \frac{2\pi j}{k} \\ c_k &= \frac{1}{T} S_0(kf_0) = (-1)^k \cdot \frac{j}{k}. \end{aligned}$$

4 Laplace-Transformation

4.1 Herleitung aus der Fourier-Transformation

Um die Laplace-Transformierte aus der Fouriertransformierten herzuleiten, multiplizieren wir die gegebene Zeitfunktion $s(t)$ mit dem konvergenzerzeugenden Faktor $e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$ hinreichend groß gewählt:

$$\tilde{s}(t) = \begin{cases} s(t)e^{-\alpha t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\{\tilde{s}(t)\} = \int_0^{\infty} s(t)e^{-\alpha t} e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} s(t)e^{-(\alpha+j2\pi f)t} dt.$$

Mit $\omega = 2\pi f$ und $p = \alpha + j\omega$ folgt

$$\mathcal{F}\{\tilde{s}(t)\} = \int_0^{\infty} s(t)e^{-pt} dt = S(p), \quad p \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Wendet man auf $S(p) = S(\alpha + j\omega)$ die Fourier-Rücktransformation an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha + j\omega) e^{j2\pi ft} df && \left(\frac{d\omega}{df} = 2\pi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha + j\omega) e^{j\omega t} d\omega && \left| * e^{\alpha t} \right. \\ s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha + j\omega) e^{(\alpha+j\omega)t} d\omega && \begin{array}{l} \text{Subst.: } p=\alpha+j\omega \Rightarrow \frac{dp}{d\omega}=j \\ \omega \rightarrow \pm\infty \Rightarrow p \rightarrow \alpha \pm j\infty \end{array} \\ s(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} S(p) e^{pt} dp && (2) \end{aligned}$$

Die Integration erfolgt dabei in der komplexen Ebene längs einer Parallelen zur imaginären Achse.

In der Praxis führt man die Transformationen (1), (2) mit Hilfe bekannter Korrespondenzen (s. Tabelle) und der Eigenschaften der Laplace-Transformation (s. § 4.3) durch.

4.2 Definitionen und Beispiele

Wir werden die Frequenzvariable fortan mit s statt mit p bezeichnen (wie auch in anderen Vorlesungen üblich).

Die Transformationsgleichungen (1) und (2) führen zu folgender Definition:

Definition:

Die Zeitfunktion $f(t)$ mit $f(t) = 0$ für $t < 0$ und die Frequenzfunktion $F(s)$ bilden ein **Laplace-Transformationspaar**, wenn sie den folgenden Gleichungen genügen:

$$F(s) = \mathcal{L} \{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s)e^{st} ds.$$

Bezeichnung: $f(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(s)$

Die Funktion $f(t)$ heißt **Original-/Oberfunktion** und $F(s)$ **Bild-/Unterfunktion**.

Grundsätzlich gilt $s \in \mathbb{C}$; wir beschränken uns hier auf $s \in \mathbb{R}$.

Zu einer gegebenen Funktion $f(t)$ existiert die **Laplace-Transformierte**

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

nur unter gewissen Voraussetzungen:

Gilt beispielsweise

- 1) In jedem endlichen Intervall besitzt f nur endlich viele Sprungstellen,
- 2) $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ für alle $0 \leq t$ (M, α seien Konstanten);

dann existiert

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

für

$$s > \alpha$$

Beispiele:

4.3 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Satz (Linearität der Laplace-Transformation):

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

Anmerkung: Gilt auch für

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$$

entsprechend; \mathcal{L}^{-1} ist ebenfalls linear.

Beweis: Wie beim Additionssatz der Fourier-Transformation (s. § 3.4).

Ähnlichkeitssatz:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0.$$

Beweis: Wie beim Ähnlichkeitssatz der Fourier-Transformation (s. § 3.4).

1. Verschiebungssatz (Verschiebung nach rechts):

$$\mathcal{L}\{f(t-T)\sigma(t-T)\} = e^{-sT} F(s) \quad , T > 0.$$

Beweis: Mittels der Substitution $u = t - T$ ähnlich wie beim Zeitverschiebungssatz der Fourier-Transformation (s. § 3.4).

2. Verschiebungssatz (Verschiebung nach links):

$$\mathcal{L}\{f(t+T)\sigma(t+T)\} = e^{sT} \left(F(s) - \int_0^T f(t) e^{-st} dt \right).$$

Beweis: Mittels der Substitution $u = t + T$ ähnlich wie beim Zeitverschiebungssatz der Fourier-Transformation (s. § 3.4).

Dämpfungssatz:

$$\mathcal{L}\{f(t) e^{-at}\} = F(s+a).$$

1. Differentiationsatz (Differentiation im Zeitbereich):

Die Funktion f sei hinreichend oft differenzierbar und es gelte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-st} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) e^{-st} = 0, \dots \quad (*)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= s F(s) - f(0), \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s^2 F(s) - f(0)s - f'(0), \\ &\vdots \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n F(s) - f(0) s^{n-1} - f'(0) s^{n-2} - \dots - f^{(n-2)}(0) s - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Bemerkung: Hat $f^{(k)}$ eine Sprungstelle bei $t = 0$, so ist für $f^{(k)}(0)$ jeweils der rechte Grenzwert einzusetzen.

2. Differentiationsatz (Differentiation im Frequenzbereich):

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

Faltungssatz: Es gelte $f_i(t) = 0$ für $t < 0$ und $\mathcal{L}\{f_i(t)\} = F_i(s)$, $i = 1, 2$.
Dann ist

$$\mathcal{L}\{f_1 * f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s).$$

Bemerkung: Nach § 3.2.3 gilt

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \sigma(t) \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

Integrationsatz:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s).$$

Satz (Laplace-Transformierte periodischer Funktionen):
Es sei f periodisch mit der Periode T . Dann gilt

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt.$$

4.4 Lösung von linearen DGLen mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe der Laplace-Transformation

Gegeben sei eine lineare DGL (mit konstanten Koeffizienten)

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = g(t). \quad (1)$$

Unter Anwendung der Linearität der Laplace-Transformation und des 1. Differentialsatzes ergibt sich

$$\begin{aligned} & s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0) \\ & + a_{n-1} [s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - s^{n-3}y'(0) - \dots - y^{(n-2)}(0)] \\ & + \dots + a_1 [sY(s) - y(0)] + a_0Y(s) = G(s) \end{aligned}$$

und damit

$$\underbrace{[s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0]}_{= p(s) \text{ (charakteristisches Polynom der DGL)}} Y(s) = G(s) + \left. \begin{aligned} & + [s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_1] y(0) \\ & + [s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \dots + a_2] y'(0) \\ & + \dots + [s + a_{n-1}] y^{(n-2)}(0) + y^{(n-1)}(0) \end{aligned} \right\} =: z(s)$$

und schließlich die Bildfunktion zu der Lösung von (1) zu

$$Y(s) = \frac{G(s)}{p(s)} + \frac{z(s)}{p(s)}.$$

Diese Bildfunktion ist dann unter Verwendung von Eigenschaften der Laplace-Transformation und bekannter Korrespondenzen in den Zeitbereich zurückzutransformieren. Der Quotient $\frac{z(s)}{p(s)}$ in der Darstellung der Bildfunktion ist echt gebrochenrational. Ist $G(s)$ gebrochenrational, so ist auch $\frac{G(s)}{p(s)}$ und damit $Y(s)$ gebrochenrational. Bei der Rücktransformation in den Zeitbereich ist häufig die Partialbruchdarstellung des bzw. der Quotienten nützlich.

Löst man das Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation, so werden Anfangsbedingungen an der Stelle 0 bei der Anwendung des Differentialsatzes sofort berücksichtigt. Damit ist diese Methode häufig schneller als die Methode, die in Kap. 1 dargestellt ist. Bei dieser wird zuerst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen

DGL ermittelt und zu dieser eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL addiert, die man mit Hilfe von bekannten Lösungsansätzen gewonnen hat.

Anschließend werden dann aus den Anfangsbedingungen die Integrationskonstanten ermittelt.

Möchte man mit Hilfe der Laplace-Transformation die allgemeine Lösung der DGL bestimmen, so lässt man die Funktionswerte der Lösung und deren Ableitungen an der Stelle 0 in der Darstellung der Lösung stehen.

Sind Anfangsbedingungen an einer Stelle $t_0 \neq 0$ gegeben, so bestimmt man zunächst die allgemeine Lösung der DGL, in der die Anfangswerte an der Stelle 0 die Rolle von Integrationskonstanten spielen. Aus den Anfangsbedingungen an der Stelle t_0 erhält man Gleichungen, mit deren Hilfe die Anfangswerte an der Stelle 0 und damit die spezielle Lösung des Anfangswertproblems bestimmt werden können.

Vorteilhaft ist die Methode der Laplace-Transformation bei DGLn mit stückweise definierter Störfunktion.

Beispiel:

$$y' + 2y = 4, \quad y(0) = 4$$

1. Schritt: Transformation der Differentialgleichung in den Bildbereich

$$\mathcal{L}\{y' + 2y\} = \mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{4\} = 4\mathcal{L}\{1\}$$

Der Differentiationssatz liefert für $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{4}{s} \quad \boxed{1 \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s}}$$

$$(s + 2)Y(s) - 4 = \frac{4}{s}$$

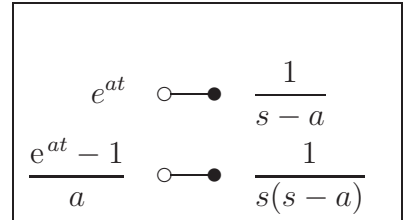
2. Schritt: Lösung der algebraischen Gleichung

$$Y(s) = \frac{\frac{4}{s} + 4}{s + 2} = \frac{4}{s(s + 2)} + \frac{4}{s + 2}$$

3. Schritt: Rücktransformation

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{Y(s)\}$$

$$= 4\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+2)} \right\} + 4\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\}$$



$$= 4 \left(\frac{e^{-2t}-1}{-2} + e^{-2t} \right) = 2e^{-2t} + 2 = 2(e^{-2t} + 1)$$