

# **Skriptum zu der Vorlesung**

## **Mathematik 2**

### **- Analysis -**

## **Teil II**

Jürgen Garloff

Hochschule Konstanz für Technik, Wirtschaft und Gestaltung  
Fakultät für Informatik

September 2011

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Reihen</b>	<b>1</b>
1.1	Zahlenreihen . . . . .	1
1.1.1	Definition und Konvergenz . . . . .	1
1.1.2	Konvergenzkriterien . . . . .	4
1.2	Potenzreihen . . . . .	9
1.2.1	Definition und Konvergenzverhalten . . . . .	9
1.2.2	Die Taylor-Reihe . . . . .	12
1.2.3	Rechnen mit Potenzreihen . . . . .	17
1.2.4	Anwendungen . . . . .	20
1.2.4.1	Untersuchung von unbestimmten Ausdrücken . . . . .	20
1.2.4.2	Berechnung nicht-elementarer Integrale . . . . .	21
1.2.4.3	Eulersche Formel . . . . .	21
1.3	Fourier-Reihen . . . . .	22
1.3.1	Trigonometrische Reihen und Fourier-Reihen im $2\pi$ -periodischem Fall . . . . .	22
1.3.2	Beispiele von Fourier-Reihen . . . . .	27
1.3.3	Fourier-Reihe einer Funktion mit beliebiger Periodenlänge . . . . .	28
1.3.4	Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe . . . . .	30
1.3.5	Numerische Fourier-Analyse . . . . .	33
1.3.5.1	Trigonometrische Approximation . . . . .	33
1.3.5.2	Trigonometrische Interpolation . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Funktionen mehrerer Veränderlicher</b>	<b>36</b>
2.1	Funktionen mehrerer Veränderlicher und ihre Darstellung . . . . .	36
2.2	Grenzwert und Stetigkeit . . . . .	38
2.3	Differentialrechnung . . . . .	39
2.3.1	Partielle Ableitung . . . . .	39
2.3.2	Tangentialebene und totales Differential . . . . .	41
2.3.3	Höhere partielle Ableitungen . . . . .	45
2.4	Relative Extrema . . . . .	47
2.4.1	Definitionen und Beispiele . . . . .	47
2.4.2	Notwendige und hinreichende Bedingungen für ein relatives Extremum . . . . .	48
2.4.3	Verfahren des steilsten Abstiegs (*) . . . . .	52

<b>3</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGLn)</b>	<b>55</b>
3.1	Grundbegriffe . . . . .	55
3.1.1	Einführendes Beispiel . . . . .	55
3.1.2	Definition einer DGL . . . . .	56
3.1.3	Lösung einer DGL . . . . .	56
3.1.4	Anfangswertproblem . . . . .	57
3.2	DGLn 1. Ordnung . . . . .	58
3.2.1	Richtungsfeld . . . . .	58
3.2.2	DGL $y' = ky$ . . . . .	60
3.2.3	Separierbare DGLn . . . . .	61
3.2.4	Auf separierbare DGLn zurückführbare DGLn . . . . .	62
3.2.5	Lineare DGLn 1. Ordnung . . . . .	64
3.2.5.1	Lösung der homogenen DGL . . . . .	64
3.2.5.2	Lösung der inhomogenen DGL . . . . .	64
3.2.5.3	Lineare DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	68
3.3	Lineare DGLn 2. und höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	69
3.3.1	Eigenschaften der homogenen DGL . . . . .	69
3.3.2	Lösung der homogenen DGL . . . . .	73
3.3.2.1	Lineare DGLn 2. Ordnung . . . . .	73
3.3.2.2	Lineare DGLen höherer Ordnung . . . . .	76
3.3.3	Lösung der inhomogenen DGL . . . . .	78
3.4	Systeme von DGLn . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Fourier-Transformation</b>	<b>82</b>
4.1	Spektraldichte . . . . .	82
4.2	Vorbereitungen . . . . .	86
4.2.1	Einheitssprungfunktion . . . . .	86
4.2.2	Einheitsimpuls . . . . .	88
4.2.3	Faltung . . . . .	91
4.3	Die Fourier-Transformation und ihre Umkehrung . . . . .	92
4.3.1	Definition und Existenz der Fourier-Transformierten . . . . .	92
4.3.2	Umkehrformel . . . . .	94
4.3.3	Darstellungen der Spektraldichte . . . . .	95
4.4	Eigenschaften der Fourier-Transformation . . . . .	97
4.5	Weitere Beispiele und Anwendungen . . . . .	105
4.5.1	Fourier-Transformierte des Einheitsimpulses . . . . .	105
4.5.2	Fourier-Transformierte der Einheitssprungfunktion . . . . .	105
4.5.3	Beweis des Integrationsatzes . . . . .	107
4.5.4	Fourier-Transformierte des Dreieckimpulses . . . . .	107
4.5.5	Fourier-Transformierte periodischer Funktionen . . . . .	108

<b>5</b>	<b>Laplace-Transformation</b>	<b>111</b>
5.1	Herleitung aus der Fourier-Transformation . . . . .	111
5.2	Definitionen und Beispiele . . . . .	112
5.3	Eigenschaften der Laplace-Transformation . . . . .	114
5.4	Lösung von linearen DGLen mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe der Laplace-Transformation . . . . .	119
<b>6</b>	<b>Differentialgeometrie ebener Kurven (*)</b>	<b>122</b>
6.1	Darstellungsformen ebener Kurven . . . . .	122
6.2	Vektorielle Darstellung von Kurven . . . . .	123
6.3	Ebene Kurven in Parameterdarstellung . . . . .	124
6.3.1	Steigung und Krümmung . . . . .	124
6.3.2	Untersuchung von Kurven in Parameterdarstellung . . . . .	125
6.4	Ebene Kurven in Polarkoordinaten . . . . .	125
6.5	Integration von Kurven . . . . .	127
6.5.1	Flächenberechnung . . . . .	127
6.5.2	Bogenlängenberechnung . . . . .	129

# 1 Reihen

## 1.1 Zahlenreihen

### 1.1.1 Definition und Konvergenz

Gegeben sei eine Folge reeller Zahlen  $\{a_k\}$ . Setze

$$\begin{aligned} s_1 &:= a_1 \\ s_2 &:= a_1 + a_2 \\ s_3 &:= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &:= a_1 + a_2 + \dots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

Die Folge  $\{s_n\}$ , die Folge der **Partialsommen**, bezeichnen wir als **Reihe** (der  $a_k$ ), die einzelnen  $a_k$  auch als **Summanden**.

**Beispiele:**

1.  $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \dots$
2.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  (harmonische Reihe)
3.  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  (alternierende harmonische Reihe)
4.  $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$  (geometrische Reihe)

**Definition** (Konvergenz einer Reihe):

Ist  $\{s_n\}$  konvergent (mit dem Grenzwert  $s$ ), dann nennen wir die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent (mit dem Grenzwert  $s$ ) und notieren dies als

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent bzw. } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = s.$$

Andernfalls heißt die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  **divergent**. Ist  $\{s_n\}$  bestimmt divergent, dann notieren wir dies auch als

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty.$$

**Bemerkung:**  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  bezeichnet

- eine **Folge**, nämlich die Folge von Partialsummen, unabhängig davon, ob diese Folge konvergiert;
- einen **Grenzwert** einer Folge und hat dann nur einen Sinn, wenn dieser Grenzwert existiert.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$  bedeutet, die Reihe konvergiert und der Reihenwert ist  $s$ .

**Beispiele:**

1.

2.  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$  (geometrische Reihe)

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \sum_{k=1}^n q^{k-1} \\ s_n &= 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} \\ qs_n &= q + q^2 + \dots + q^n \\ \Rightarrow s_n - qs_n &= 1 - q^n \\ s_n &= \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1 \end{aligned}$$

1. Fall:  $|q| < 1$  Wegen  $\lim_{k \rightarrow \infty} q^k = 0$  ist die Reihe konvergent mit  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$ .

2. Fall:  $|q| > 1$  Da  $\{q^k\}$  divergiert, divergiert auch  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ .

3. Fall:  $q = 1$  Wegen  $s_n = n$  ist die Reihe (bestimmt) divergent.

4. Fall:  $q = -1$   $s_n = 1 - 1 + 1 - \dots + (-1)^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

Damit ist die Reihe (unbestimmt) divergent.

**Satz:**

Die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  seien konvergent.

1. Dann konvergiert auch die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$  ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ),

und es ist  $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ .

2. Ist  $a_k \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$ , so gilt:  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ .

*Beweis:* Setze  $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ ,  $t_n := \sum_{k=1}^n b_k$ ,  $u_n := \sum_{k=1}^n (\lambda a_k + \mu b_k)$ .

Somit ist  $u_n = \lambda s_n + \mu t_n$ , woraus sich für  $n \rightarrow \infty$  unter Verwendung der Grenzwertsätze für Zahlenfolgen die Behauptung unter 1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} s_n + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$  ergibt.

Aus  $a_k \leq b_k \forall k \in \mathbb{N}$  folgt  $s_n \leq t_n \forall n \in \mathbb{N}$  und die Aussage unter 2. □

**Folgerung:**

Aus der Konvergenz der Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$  folgt die Konvergenz von  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}.$$

**1.1.2 Konvergenzkriterien**

**Satz** (Notwendige Bedingung für Konvergenz):

Ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent, so muss die Folge  $\{a_k\}$  eine Nullfolge sein.

*Beweis:*  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist konvergent, d.h.  $\{s_n\}$  ist konvergent.

Nach dem Konvergenzkriterium von Cauchy folgt dann  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(s_n - s_{n-1})}_{=a_n} = 0$ . □

Die Umkehrung gilt **nicht!**

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad (\text{harmonische Reihe}) \\ s_{2^l} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> 2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> 4 \cdot \frac{1}{8}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{> 8 \cdot \frac{1}{16}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{l-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^l}\right)}_{> 2^{l-1} \cdot \frac{1}{2^l}} \\ &> 1 + l \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

d.h. die harmonische Reihe ist divergent!

**Bemerkung:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \gamma = 0.57721 \dots$  (Eulersche Konstante)



**Beispiel:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (\text{alternierende harmonische Reihe})$$

$$|s_n - s_{n-1}| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad s_{2n} < s < s_{2n+1}, \quad n \in \mathbf{N}$$

$$|s - s_n| < \frac{1}{n+1}$$

**Definition: (Alternierende Reihe)**

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt **alternierend**, falls  $a_k a_{k+1} < 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .

**Satz: (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen)**

Eine alternierende Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist konvergent, falls  $\{|a_k|\}$  eine monoton fallende Nullfolge bildet. Für den Reihenwert  $s$  gilt:  
 $|s - s_n| \leq |a_{n+1}|, \operatorname{sgn}(s - s_n) = \operatorname{sgn}(a_{n+1})$ .

**Definition: (absolute Konvergenz)**

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt **absolut konvergent**, falls  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergiert.

**Satz:** Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent.

**Die Umkehrung gilt nicht!** (Siehe alternierende harmonische Reihe)

**Satz: (Quotienten- und Wurzelkriterium)**

Es sei  $\{a_k\}$  eine Folge mit  $a_k > 0$  für  $k \geq n_0$  und es existiere

$$q_Q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \quad \text{bzw.} \quad q_W = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}.$$

In beiden Fällen gilt:

$q < 1$  :  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist konvergent

$q > 1$  :  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist divergent

$q = 1$  : Kriterium macht keine Aussage.

**Beispiele:**

Mit einem anderen Konvergenzkriterium lässt sich der folgende Satz beweisen.

**Satz:**

Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$  ist **konvergent** für  $a > 1$  und **divergent** für  $a \leq 1$ .

**Bemerkung zu den Übungsaufgaben**

Zahldarstellung im Rechner (hier dezimal):

$\pm 0.\underbrace{d_1 d_2 \dots d_k}_{\text{Mantisse}} \times 10^n$ ,  $n$ : Exponent,

normalisiert  $1 \leq d_1 \leq 9$ ,  $d_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ,  $i = 2, 3, \dots, k$

$y = 0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^n$ :

Abschneiden (chopping):  $\text{ch}(y) = 0.d_1 d_2 \dots d_k \times 10^n$

Runden (rounding):  $\text{rd}(y) = \text{ch}(y + 5 \times 10^{-(k+1)})$

**Beispiel:**

Gegeben sei  $p \in \mathbb{R}$  und die Näherung  $p^*$  für  $p$ .

Dann ist der absolute Fehler gegeben durch  $|p - p^*|$

und der relative Fehler durch  $\frac{|p - p^*|}{|p|}$ , falls  $p \neq 0$ .

**Abschätzen des relativen Fehlers beim Abschneiden**

$y = 0.d_1 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^n$  mit  $d_1 \geq 1$

$$\left| \frac{y - \text{ch}(y)}{y} \right| = \frac{0.d_1 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^n - 0.d_1 \dots d_k \times 10^n}{0.d_1 \dots d_k d_{k+1} \dots \times 10^n}$$

$$= \frac{0.d_{k+1} d_{k+2} \dots \times 10^{n-k}}{0.d_1 \dots \times 10^n} < \frac{1 \times 10^{-k}}{0.1} = 10^{-k+1}$$

**Abschätzen des relativen Fehlers beim Runden**

1. Fall  $d_{k+1} < 5$ :  $\left| \frac{y - \text{rd}(y)}{y} \right| = \frac{0.d_{k+1}\dots}{0.d_1\dots} \times 10^{-k} < \frac{0.5}{0.1} \times 10^{-k} = 0.5 \times 10^{-k+1}$

2. Fall  $d_{k+1} \geq 5$ :  $\text{rd}(y) = 0.d_1\dots d_k \times 10^n + 10^{n-k}$

$$\left| \frac{y - \text{rd}(y)}{y} \right| < \frac{0.5}{0.1} \times 10^{-k} = 0.5 \times 10^{-k+1}, \text{ denn:}$$

$$|y - \text{rd}(y)| \leq (0.d_1\dots d_k + 1 - 0.d_1d_2\dots d_k5) \times 10^n \leq 0.5 \times 10^{n-k}$$

**Definition:** Die Näherung  $p^*$  stimmt mit  $p$  auf  $t$  Ziffern überein, falls  $t$  die größte nichtnegative ganze Zahl ist, für die gilt

$$\frac{|p - p^*|}{|p|} < 5 \times 10^{-t}.$$

**Beispiel:**

## 1.2 Potenzreihen

### 1.2.1 Definition und Konvergenzverhalten

**Definition: (Potenzreihe)**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

heißt **Potenzreihe** (mit dem **Entwicklungspunkt**  $x_0$ ). Die Faktoren  $a_k$  heißen die **Koeffizienten** der Potenzreihe.

Für  $x_0 = 0$  vereinfacht sich die Reihe zu:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad .$$

**Beispiel:**

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots \quad (\text{geometrische Reihe})$$

$$a_k = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad x_0 = 0$$

Diese Reihe konvergiert für  $\forall x \in (-1, 1)$ , und es gilt für diese  $x$ :  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ .

Die Beziehung bedeutet, dass die Funktion  $\frac{1}{1-x}$  auf dem Intervall  $(-1, 1)$  beliebig genau durch Polynome approximiert werden kann.

Approximation von  $\frac{1}{1-x}$  durch Polynome:

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = 1+x, \quad p_2(x) = 1+x+x^2, \quad p_3(x) = 1+x+x^2+x^3, \quad \dots$$

**Satz: (Konvergenz von Potenzreihen)**

Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  ist absolut konvergent in dem Intervall  $(x_0 - r, x_0 + r)$  mit

$$r = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{bzw.} \quad r = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

falls diese Grenzwerte existieren;

$r$  heißt der **Konvergenzradius**,  $(x_0 - r, x_0 + r)$  heißt das **Konvergenzintervall**.

**Bemerkungen:**

1. Die Konvergenz in den Randpunkten  $x_0 \pm r$  muss getrennt untersucht werden.
2. Für  $r = 0$  konvergiert die Potenzreihe nur für den Entwicklungspunkt  $x_0$ , für  $r = \infty$  konvergiert sie für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
3. Durch die Potenzreihe wird jedem Punkt  $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$  eine Zahl zugeordnet. Damit ist eine auf  $(x_0 - r, x_0 + r)$  definierte Funktion  $f$  (die durch die Potenzreihe dargestellte Funktion) gegeben:

$$f : x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k,$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r).$$

*Beweis:* (nur für  $r = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}$  und  $x_0 = 0$ )

1. Fall:  $q := \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$  existiert.

Es ist  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} |x|^k = |x| \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x| \cdot q$ .

- a) Ist  $q = 0$ , so ist auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  und nach dem Wurzelkriterium konvergiert die Potenzreihe für alle  $x \in \mathbb{R}$  absolut.
- b) Ist  $q > 0$ , so ist  $|x|q < 1$ , falls  $|x| < \frac{1}{q}$ , d.h. für alle  $x$  mit  $|x| < \frac{1}{q}$  konvergiert die Potenzreihe absolut.  
Ist  $|x| > \frac{1}{q}$ , so ist  $|x|q > 1$  und damit die Reihe divergent.

2. Fall: Ist  $\{\sqrt[k]{|a_k|}\}$  divergent, so ist für  $x \neq 0$  auch die Folge  $\{\sqrt[k]{|a_k x^k|}\}$  divergent, woraus die Divergenz für  $x \neq 0$  folgt.

**Beispiele:**

### 1.2.2 Die Taylor-Reihe

**Frage:** Wie und unter welchen Voraussetzungen erhält man zu einer gegebenen Funktion die zugehörige Potenzreihe?

O.B.d.A.:  $x_0 = 0$

$$\text{Ansatz: } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots \Rightarrow f(0) = a_0$$

Annahme: Es darf gliedweise differenziert werden.

Dann folgt:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + k a_k x^{k-1} + \dots \Rightarrow f'(0) = a_1$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + k(k-1)a_k x^{k-2} + \dots \Rightarrow f''(0) = 2a_2$$

$$f'''(x) = 6a_3 + 24a_4 x + \dots + k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3} + \dots \Rightarrow f'''(0) = 6a_3$$

$$f^{(k)}(x) = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot a_k + x(\dots) \Rightarrow f^{(k)}(0) = k! \cdot a_k$$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Für die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  erhält man entsprechend

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

$a_k$  heißt  $k$ -ter **Taylor-Koeffizient**.

#### Satz von Taylor:

Die Funktion  $f$  sei in der Umgebung der Stelle  $x_0$   $(n+1)$ -mal differenzierbar; dann gilt die **Taylor-Entwicklung**:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x);$$

dabei gibt es eine Stelle  $u$  zwischen  $x_0$  und  $x$ , so dass sich das **Restglied**  $R_n$  darstellen lässt in der Form

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Im Sonderfall  $x_0 = 0$  liefert die Taylor-Entwicklung

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x)$$



mit

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{mit } 0 \leq \vartheta \leq 1.$$

$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  heißt  $n$ -tes **Taylor-Polynom**;

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$  heißt **Restglied** der Taylor-Entwicklung von  $f$  um  $x_0$ .

Art der Annäherung:

$n = 0$ :  $P_0(x) = f(x_0)$  durch die Gerade  $y = f(x_0)$

$n = 1$ :  $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$  durch die Kurventangente im Punkt  $(x_0, f(x_0))$

$n = 2$ :  $P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2$  durch die durch den Punkt  $(x_0, f(x_0))$  verlaufende Parabel, die dort die gleiche Tangente und Krümmung hat wie  $f$ .

**Beispiele:**

Ist die Funktion  $f$  in  $(a, b)$  mit  $x_0 \in (a, b)$  beliebig oft differenzierbar, so erhält man für  $n \rightarrow \infty$  die **Taylor-Reihe**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

**Beispiele:**

Gesucht ist die Taylor-Reihe der folgenden Funktionen um  $x_0 = 0$ :

1.  $f(x) = e^x$ ; es ist  $f^{(k)}(x) = e^x$ ,  $f^{(k)}(0) = e^0 = 1 \forall k \in \mathbb{N}_0$   
 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  ist damit die Taylor-Reihe zu  $e^x$ .

2.

Nicht jede beliebig oft differenzierbare Funktion wird durch ihre Taylor-Reihe dargestellt. Es gilt jedoch:

**Satz:** Es sei  $f$  auf  $(a, b)$  beliebig oft differenzierbar mit  $x_0 \in (a, b)$ . Dann konvergiert die Taylor-Reihe zu  $f$  gegen  $f$ , wenn gilt:

$$\forall x \in (a, b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} = 0.$$

**Bemerkungen:**

1. Ist  $0 < r < \infty$  der Konvergenzradius der Taylor-Reihe von  $f$ , so wird  $f$  höchstens auf  $[x_0 - r, x_0 + r]$  durch die Taylor-Reihe dargestellt.
2. Die Darstellung einer Funktion durch ihre Taylor-Reihe ist dasselbe wie die Darstellung als Potenzreihe.  
Sofern es möglich ist, verwende man bekannte Potenzreihenentwicklungen, um die Taylor-Reihe einer bestimmten Funktion anzugeben.

**Beispiele:**

### Binomische Reihe

Die Taylor-Reihe zu  $(1+x)^a$  ist  $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k$  ( $a \in \mathbb{R}$ )

1. Fall:  $a \in \mathbb{N}$ ; wegen  $\binom{a}{k} = 0$  für  $k > a$  bricht die Taylor-Reihe nach dem Term mit  $x^a$  ab. Die Taylor-Reihe liefert die binomische Entwicklung.
2. Fall: Für  $a \notin \mathbb{N}$  gilt  $\binom{a}{k} \neq 0 \forall k \in \mathbb{N}_0$ .

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist  $r = 1$ , d.h. die Reihe ist konvergent für  $\forall x \in (-1, 1)$ , ja, es gilt sogar, dass auf diesem Intervall die Funktion  $(1+x)^a$  durch ihre Taylor-Reihe dargestellt wird.

### 1.2.3 Rechnen mit Potenzreihen

O.B.d.A. sei im folgenden  $x_0 = 0$  gewählt.

**Bemerkung:** Alle nachstehenden Sätze übertragen sich sinngemäß auf Potenzreihen mit beliebigen Entwicklungspunkten.

**Satz: (Differentiation und Integration von Potenzreihen)**

Jede Potenzreihe ist in ihrem Konvergenzintervall beliebig oft (gliedweise) differenzierbar und integrierbar. Die Potenzreihen der Ableitungen und der Stammfunktionen haben denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.

Insbesondere gilt:

Es sei  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  eine Reihe mit dem Konvergenzradius  $r > 0$ . Dann ist die durch gliedweise Differentiation entstehende Potenzreihe  $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$  und es gilt:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots, \quad x \in (-r, r)$$

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)'' = 2a_2 + 6a_3 x + \dots, \quad x \in (-r, r),$$

...

Ferner gilt:

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k x^{k+1}}{k+1}, \quad x \in (-r, r);$$

denn: Ist  $F$  gegeben durch  $F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ , dann gilt:

$$F'(x) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

**Beispiele:**

**Satz: (Identitätssatz für Potenzreihen)**

Sind  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien  $r_1, r_2 > 0$  mit  $r := \min(r_1, r_2)$  und gilt  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \quad \forall x \in (-r, r)$ , so folgt  $a_k = b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$ .

*Beweis:*

Aus  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  folgt für  $x = 0$ :  $a_0 = b_0$ ,

aus  $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k x^{k-1}$  folgt für  $x = 0$ :  $a_1 = b_1$

usw.

**Satz: (Addition und Multiplikation von Potenzreihen)**

Es seien  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$  zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien  $r_1, r_2 > 0$ .

Dann gilt für alle  $x$ ,  $x \in (-r, r)$ , wobei  $r := \min(r_1, r_2)$ ,

- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$
- $\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \cdot \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^k a_l b_{k-l} \right) \cdot x^k$

**Beispiele:**

### Division von Potenzreihen

Den Quotienten  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  zweier Potenzreihen mit nichtverschwindenden Konvergenzradien  $u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  und  $v(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$  erhält man nach dem folgenden Schema:

Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$$

Multiplikation der Potenzreihen von  $f$  und  $v$  und anschließender Koeffizientenvergleich der Potenzreihen  $f(x) \cdot v(x)$  und  $u(x)$  ergibt die Koeffizienten  $c_k$ .

### Beispiele zur Substitution bei Potenzreihen:

## **1.2.4 Anwendungen**

### **1.2.4.1 Untersuchung von unbestimmten Ausdrücken**



### 1.2.4.2 Berechnung nicht-elementarer Integrale

Die in der Statistik oft verwendete Funktion

$$G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{Gaußsches Fehlerintegral}$$

lässt sich nicht mit elementaren Funktionen darstellen, daher ist man auf Näherungswerte angewiesen.

Mögliche Vorgehensweise:

1. Reihenentwicklung des Integranden
2. gliedweise Integration der Reihe

### 1.2.4.3 Eulersche Formel

$$\begin{aligned} e^{jy} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jy)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jy)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + j \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos y + j \sin y \end{aligned}$$

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^k \underbrace{\frac{z_1^l}{l!} \frac{z_2^{k-l}}{(k-l)!}}_{\binom{k}{l} z_1^l z_2^{k-l}} k! = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} = e^{z_1+z_2}$$

Hieraus folgt:  $e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x (\cos y + j \sin y)$ .

## 1.3 Fourier-Reihen

### 1.3.1 Trigonometrische Reihen und Fourier-Reihen im $2\pi$ -periodischem Fall

Gegeben seien zwei Folgen reeller Zahlen  $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ ,  $\{b_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ .  
Dann nennt man

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x$$

eine **trigonometrische Reihe**.

**Bemerkung:** Ist  $a_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}_0$  (bzw.  $b_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}$ ), so spricht man von einer reinen Sinus- (bzw. Cosinus-) Reihe.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass die gegebene Funktion  $f$  die Periodenlänge  $2\pi$  besitzt; in § 1.3.3 wird dann der Fall einer beliebigen Periodenlänge behandelt werden.

Es sei  $f$  integrierbar über  $[-\pi, \pi]$  und es gelte für alle  $x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx .$$

Integration über  $[-\pi, \pi]$  liefert

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) dx$$

(es darf gliedweise integriert werden)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx}_{\frac{\sin kx}{k} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx}_{=0}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad | \cdot \cos mx, m \geq 1, \int_{-\pi}^{\pi} \dots dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos mx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \cos mx + b_k \sin kx \cos mx \right) dx \\ &= \frac{a_0}{2} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx dx}_{\text{Integral verschwindet}} \end{aligned}$$

Da gilt, dass  $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ , folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos((k+m)x) dx}_{=0} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos((k-m)x) dx \right] = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \neq m \\ \pi, & \text{falls } k = m \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx$$

Analog zeigt man, dass  $b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx$  gilt.

**Definition:**

Es sei  $f$  über dem Intervall  $[-\pi, \pi]$  integrierbar.

Dann heißen die Zahlen  $a_k, b_k$  mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}$$

die **Fourier-Koeffizienten** der Funktion  $f$ . Die Reihe

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

heißt die zu  $f$  gehörende **Fourier-Reihe**.

Schreibweise:  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$

Die obige Entwicklung heißt **harmonische** oder **Fourier-Zerlegung**.

**Bemerkung:** Ist  $f$   $2\pi$ -periodisch, so sind die Integranden  $2\pi$ -periodisch und jedes Intervall der Länge  $2\pi$  kann als Integrationsintervall verwendet werden.

**Spezialfälle:**

1. Ist  $f$  gerade, so gilt  $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0$  und  $b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ .
2. Ist  $f$  ungerade, dann gilt  $a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$  und  $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}$ .

3. Gilt  $f(x) = f(x + \pi) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$a_{2k+1} = b_{2k+1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$a_{2k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos 2kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_{2k} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin 2kx \, dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

4. Gilt  $f(x) = -f(x + \pi)$  für  $\forall x \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$a_0 = 0, \quad a_{2k} = b_{2k} = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$a_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(2k+1)x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(2k+1)x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

*Beweis zu 3.:*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 f(x) \cos kx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \right]$$

$$\int_{-\pi}^0 f(x) \cos kx \, dx = (-1)^k \int_{-\pi}^0 f(x + \pi) \cos k(x + \pi) \, dx = (-1)^k \int_0^{\pi} f(u) \cos ku \, du;$$

hier wurde  $\cos k(x + \pi) = \cos kx \underbrace{\cos k\pi}_{=(-1)^k} - \sin kx \underbrace{\sin k\pi}_{=0}$  verwendet und anschließend  $u =$

$x + \pi$  substituiert.

Damit folgt:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[ (-1)^k \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \right] = \begin{cases} 0 & k \text{ ungerade} \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx & k \text{ gerade} \end{cases}$$

Analoge Vorgehensweise für die  $b_k$ 's. Ebenso für 4.

**Beispiel:**

**Vorbemerkung:** Konvergiert die Fourier-Reihe einer Funktion für alle  $x \in [-\pi, \pi]$ , so konvergiert sie auch für alle  $x \in \mathbb{R}$ , da sie  $2\pi$ -periodisch ist. Insofern ist es zweckmäßig, eine auf  $[-\pi, \pi]$  definierte Funktion, deren Fourier-Reihe ermittelt werden soll,  $2\pi$ -periodisch auf  $\mathbb{R}$  fortzusetzen.

**Satz:** Die Funktion  $f$  genüge den **Dirichlet-Bedingungen**, d.h.

- $f$  sei mit Ausnahme endlich vieler Stellen in  $[-\pi, \pi)$  definiert und durch  $f(x) = f(x + 2\pi)$   $2\pi$ -periodisch auf  $\mathbb{R}$  fortgesetzt;
- $f$  besitze in  $[-\pi, \pi)$  nur endlich viele Unstetigkeitsstellen und für alle  $x_0 \in [-\pi, \pi)$  existiere  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ ;
- $f'$  sei bis auf endlich viele Stellen in  $[-\pi, \pi)$  stetig.

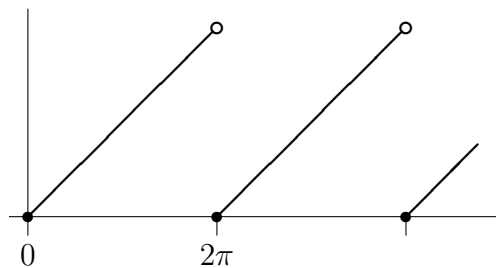
Dann konvergiert die Fourier-Reihe  $s$  zu  $f$  auf  $\mathbb{R}$  und es gilt

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} : s(x_0) = \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right).$$

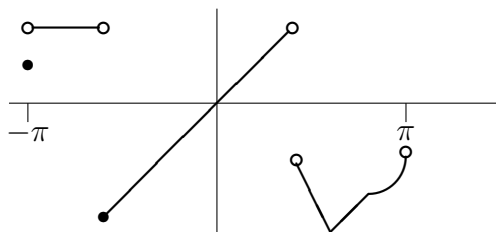
**Bemerkungen:**

1. Beispiele von Funktionen, die den Dirichlet-Bedingungen genügen:

a) Sägezahnkurve:



b)



2. Ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  stetig, so gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  und damit  $s(x_0) = f(x_0)$ .
3. Falls  $f$  den Voraussetzungen des Satzes genügt, gilt für alle  $k \in \mathbb{N}$  ( $c$  sei eine Konstante)  
 $|a_k|, |b_k| \leq \begin{cases} \frac{c}{k} & \text{falls es Stellen } x_0 \text{ gibt mit } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \\ \frac{c}{k^2} & \text{falls es keine solchen Stellen } x_0 \text{ gibt.} \end{cases}$

### 1.3.2 Beispiele von Fourier-Reihen

### 1.3.3 Fourier-Reihe einer Funktion mit beliebiger Periodenlänge

Es sei  $f$  eine  $2p$ -periodische Funktion, dann ist  $g$  mit  $g(x) = f(\frac{p}{\pi}x)$   $2\pi$ -periodisch, denn es gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$

$$g(x + 2\pi) = f(\frac{p}{\pi}(x + 2\pi)) = f(\frac{p}{\pi}x + 2p) = f(\frac{p}{\pi}x) = g(x)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cdot \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{p}{\pi}x) \cdot \cos kx \, dx$$

$$\text{Subst.: } u = \frac{p}{\pi}x, \quad x = \frac{\pi}{p}u$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{\pi}{p}, \quad dx = \frac{\pi}{p} du$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(u) \cdot \cos(k\frac{\pi}{p}u) \, du$$

Damit können wir unsere zunächst für den  $2\pi$ -periodischen Fall gewonnenen Ergebnisse auf den Fall einer beliebigen Periodenlänge verallgemeinern:

#### Definition:

Es sei  $f$  über dem Intervall  $[-p, p]$  integrierbar.

Dann heißen die Zahlen  $a_k, b_k$  mit

$$a_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos k\frac{\pi}{p}x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin k\frac{\pi}{p}x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}$$

die **Fourier-Koeffizienten** der Funktion  $f$ . Die Reihe

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\frac{\pi}{p}x + b_k \sin k\frac{\pi}{p}x$$

heißt die zu  $f$  gehörende **Fourier-Reihe**.

**Bemerkung:** Ist  $f$   $2p$ -periodisch, so sind die Integranden  $2p$ -periodisch und jedes Intervall der Länge  $2p$  kann als Integrationsintervall verwendet werden.



**Spezialfälle:**

1. Ist  $f$  gerade, so gilt  $a_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos k \frac{\pi}{p} x \, dx$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $b_k = 0 \, \forall k \in \mathbb{N}$ .

2. Ist  $f$  ungerade, dann gilt  $a_k = 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}_0$  und  $b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin k \frac{\pi}{p} x \, dx$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

3. Gilt  $f(x) = f(x+p) \, \forall x \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$a_{2k+1} = b_{2k+1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$a_{2k} = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos 2k \frac{\pi}{p} x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_{2k} = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin 2k \frac{\pi}{p} x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

4. Gilt  $f(x) = -f(x+p) \, \forall x \in \mathbb{R}$ , so gilt

$$a_0 = 0, \quad a_{2k} = b_{2k} = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$a_{2k+1} = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos(2k+1) \frac{\pi}{p} x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_{2k+1} = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin(2k+1) \frac{\pi}{p} x \, dx, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

**Satz:** Die Funktion  $f$  genüge den **Dirichlet-Bedingungen**, d.h.

- $f$  sei mit Ausnahme endlich vieler Stellen in  $[-p, p)$  definiert und durch  $f(x) = f(x+2p)$   $2p$ -periodisch auf  $\mathbb{R}$  fortgesetzt;
- $f$  besitze in  $[-p, p)$  nur endlich viele Unstetigkeitsstellen und für alle  $x_0 \in [-p, p)$  existiere  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  und  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \in \mathbb{R}$ ;
- $f'$  sei bis auf endlich viele Stellen in  $[-p, p)$  stetig.

Dann konvergiert die Fourier-Reihe  $s$  zu  $f$  auf  $\mathbb{R}$  und es gilt

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} : \quad s(x_0) = \frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \right).$$

Die Vorbemerkung und die Bemerkungen zu dem entsprechenden Satz in § 1.3.1 gelten sinngemäß auch im Fall einer beliebigen Periodenlänge.

**Alternative Darstellungen der Fourier-Reihe:**

In Anwendungen bedeutet häufig  $x = t$  die Zeit und  $\frac{\pi}{p} = \omega = \frac{2\pi}{T}$  die Kreisfrequenz. Damit lautet die Fourier-Reihe zu  $f$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t$$

mit

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t \, dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t \, dt$$

Eine weitere Darstellung ergibt sich aus der Beziehung

$$a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t = A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

Begründung für diese Beziehung:

$$A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) = \underbrace{A_k \sin \varphi_k}_{a_k} \cos k\omega t + \underbrace{A_k \cos \varphi_k}_{b_k} \sin k\omega t$$

umgekehrt:

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{A_k^2 \sin^2 \varphi_k + A_k^2 \cos^2 \varphi_k} = A_k \sqrt{\cos^2 \varphi_k + \sin^2 \varphi_k} = A_k$$

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{A_k \sin \varphi_k}{A_k \cos \varphi_k} = \tan \varphi_k \quad (\text{im Fall } b_k = 0 \text{ ist } \varphi_k = \operatorname{sgn}(a_k) \frac{\pi}{2}).$$

Damit lässt sich die Fourier-Reihe zu  $f$  auch schreiben als

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k);$$

$A_k$  ist die Amplitude der  $k$ -ten Teilschwingung,

$\varphi_k$  ist die Phase der  $k$ -ten Teilschwingung.

**1.3.4 Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe**

Wir betrachten zunächst wieder den  $2\pi$ -periodischen Fall.

Bricht eine Fourier-Reihe ab, so erhält man ein trigonometrisches Polynom

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx .$$

Mit Hilfe der Eulerschen Formel  $e^{jx} = \cos x + j \sin x$  und  $e^{-jx} = \cos x - j \sin x$  ergibt sich  $\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$  und  $\sin x = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})$ ; eingesetzt in das obige Polynom liefert dies:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{2} (e^{jkx} + e^{-jkx}) - \frac{j}{2} b_k (e^{jkx} - e^{-jkx}) &= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{c_0} + \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{a_k - jb_k}{2}}_{c_k} e^{jkx} + \underbrace{\frac{a_k + jb_k}{2}}_{c_{-k}} e^{-jkx} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^n c_k e^{jkx} + \sum_{k=1}^n c_{-k} e^{-jkx} = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k e^{jkx} + \sum_{k=-n}^{-1} c_k e^{jkx} = \sum_{k=-n}^n c_k e^{jkx} \end{aligned}$$

Durch den Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir, dass eine trigonometrische Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

durch die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkx} \quad \text{mit } c_k \in \mathbb{C}$$

dargestellt werden kann, wobei die Konvergenz der komplexen Reihe bedeutet, dass der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{jkx}$  in  $\mathbb{C}$  existiert.

Für die Koeffizienten  $c_k$  gilt:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - jb_k) & \text{für } k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & \text{für } k = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + jb_{-k}) & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

**Folgerung:** Wenn  $f$  gerade ist, so folgt  $c_k \in \mathbb{R} \forall k \in \mathbb{Z}$ .

Ist  $f$  ungerade, dann sind die  $c_k$ 's rein imaginär oder verschwinden.

Umgekehrt gilt:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2c_0 \\ a_k &= c_k + c_{-k} = 2 \operatorname{Re}(c_k) & k \in \mathbb{N} \\ b_k &= j(c_k - c_{-k}) = -2 \operatorname{Im}(c_k) & k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Ferner gilt  $c_k^* = c_{-k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ .

Für die Amplituden  $A_k$  gilt:

$$\begin{aligned} A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{4(\operatorname{Re}(c_k))^2 + 4(\operatorname{Im}(c_k))^2} = 2\sqrt{(\operatorname{Re}(c_k))^2 + (\operatorname{Im}(c_k))^2} \\ &= 2|c_k| = 2|c_{-k}| \end{aligned}$$

### Direkte Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Für  $k \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx - \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{jkx} + e^{-jkx})dx - \frac{j}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)(e^{jkx} - e^{-jkx})dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jkx} dx \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad c_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{jkx} dx .$$

Damit gilt für alle  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-jkx} dx .$$

**Beispiel:**

### Komplexe Form der Fourier-Reihe einer Funktion mit bel. Periodenlänge

Ist  $f$  eine  $2p$ -periodische Funktion, so lautet die komplexe Darstellung der Fourier-Reihe zu  $f$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\frac{\pi}{p}x} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p f(x)e^{-jk\frac{\pi}{p}x} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

### 1.3.5 Numerische Fourier-Analyse

O.B.d.A. sei  $f$   $2\pi$ -periodisch, bei anderer Periodenlänge rechnet man  $f$  durch die Substitution  $u = \frac{x}{\pi}$  in eine  $2\pi$ -periodische Funktion um (siehe § 1.3.3).

Die Funktion  $f$  sei an  $2N$  (äquidistanten) Stellen, den sogenannten Stützstellen,  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2N - 1$ , mit  $h = \frac{\pi}{N}$  vorgegeben.

**Ansatz** für ein trigonometrisches Näherungspolynom  $n$ -ten Grades

$$Q_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Gesucht sind die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ .

Einsetzen der Stützstellen  $x_i$  in die Gleichung  $Q_n(x) = f(x)$  liefert das folgende LGS

$$Q_n(x_i) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx_i + b_k \sin kx_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, 2N - 1,$$

zur Bestimmung der  $a_k$ 's und  $b_k$ 's.

1. Fall  $2N > 2n + 1$ : LGS ist überbestimmt  $\rightarrow$  trigonometrische Approximation
2. Fall  $N = n$ :  $\rightarrow$  trigonometrische Interpolation

#### 1.3.5.1 Trigonometrische Approximation

Gegeben: Funktionswerte  $f_i := f(x_i)$ , an den  $2N$  äquidistanten Stützstellen

$x_i = i\frac{\pi}{N}$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2N - 1$ .

Gesucht: Die  $2n + 1$  Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms

$$Q_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

wobei  $2n + 1 < 2N$  gilt.

Da sich bei der Minimierung der Fehlersumme  $\sum_{i=0}^{2N-1} (Q(x_i) - f_i)$  Fehler gegenseitig auf-

heben können, wird die Summe der Quadrate der Fehler  $\sum_{i=0}^{2n-1} (Q(x_i) - f_i)^2$  minimiert.

Wir gehen ähnlich vor wie bei der Herleitung der Darstellung der Fourier-Koeffizienten in § 1.3.1 und nehmen dazu an, dass  $Q_n(x_i) = f_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 2N - 1$ , gelte.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n a_m \cos mx_i + b_m \sin mx_i = f_i \quad \left| \cdot \cos kx_i, \sum_{i=0}^{2N-1} \dots, \quad k = 0, 1, \dots, n \right.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{2N-1} \frac{a_0}{2} \cos kx_i + \sum_{i=0}^{2N-1} \sum_{m=1}^n a_m \cos mx_i \cos kx_i + \sum_{i=0}^{2N-1} \sum_{m=1}^n b_m \sin mx_i \cos kx_i = \sum_{i=0}^{2N-1} f_i \cos kx_i$$

**Hilfsatz:**

$$(H1) \quad \sum_{i=0}^{2N-1} \cos kx_i \cos mx_i = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ N & k = m < N \\ 2N & k = m = N \end{cases}$$

$$(H2) \quad \sum_{i=0}^{2N-1} \sin kx_i \sin mx_i = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ N & k = m < N \\ 0 & k = m = N \end{cases}$$

$$(H3) \quad \sum_{i=0}^{2N-1} \sin kx_i \cos mx_i = 0 \quad \text{für alle } k, m$$

$k = 0$ :

$$\underbrace{\frac{a_0}{2} \sum_{i=0}^{2N-1} 1}_{=a_0 N} + \sum_{m=1}^n a_m \underbrace{\sum_{i=0}^{2N-1} \cos mx_i \cos 0x_i}_{(H1)=0} = \sum_{i=0}^{2N-1} f_i$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{2N-1} f_i$$

$k > 0$ :

$$\frac{a_0}{2} \underbrace{\sum_{i=0}^{2N-1} \cos kx_i \cos 0x_i}_{(H1)=0} + \sum_{m=1}^n a_m \underbrace{\sum_{i=0}^{2N-1} \cos mx_i \cos kx_i}_{\stackrel{(H1)}{=} \begin{cases} 0 & k \neq m \\ N & k = m \leq n < N \end{cases}} = \sum_{i=0}^{2N-1} f_i \cos kx_i$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{2N-1} f_i \cos kx_i, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Ebenso ergeben sich die Koeffizienten  $b_k$  als

$$b_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{2N-1} f_i \sin kx_i, \quad 1 \leq k \leq n.$$

### 1.3.5.2 Trigonometrische Interpolation

Es sei  $N = n$ .

Für  $x = x_i = i\frac{\pi}{n}$  ergibt der Summand  $b_n \sin nx$ :  $b_n \sin ni\frac{\pi}{n} = 0$ .

Also sind (neben den  $a_0, a_1, \dots, a_n$ ) nur die  $b_1, \dots, b_{n-1}$  zu bestimmen, und wir erhalten ein LGS mit den  $2n$  Gleichungen  $Q_n(x_i) = f_i$  für die  $2n$  Unbekannten.

Die Interpolationsforderung  $Q_n(x_i) = f_i$ , d.h.  $\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n a_m \cos mx_i + b_m \sin mx_i = f_i$ ,  $i = 0, \dots, 2n - 1$ , liefert für  $k < n$  die Koeffizienten  $a_0, \dots, a_{n-1}, b_1, \dots, b_{n-1}$  wie in Abschnitt 1.3.5.1.

Für  $k = n$  ergibt sich eine Änderung:

$$\sum_{m=1}^n a_m \underbrace{\sum_{i=0}^{2n-1} \cos mx_i \cos nx_i}_{\stackrel{(H1)}{=} \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq n \\ 2n & \text{für } m = n = N \end{cases}} = \sum_{i=0}^{2n-1} f_i \cos nx_i$$

$$a_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n-1} f_i \cos nx_i = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n-1} f_i \cos i\pi = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i f_i .$$

### Bemerkungen

1. (Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$ ) Ist  $f$  integrierbar, so gilt für die Koeffizienten  $a_k^{(n)}, b_k^{(n)}$  des trigonometrischen Interpolationspolynoms

$$Q_n(x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx + \frac{a_n^{(n)}}{2} \cos nx$$

$$a_k^{(n)} \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

$(n \rightarrow \infty)$

$$b_k^{(n)} \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, \dots, n - 1,$$

d.h. für  $n \rightarrow \infty$  geht  $Q_n$  in die Fourier-Reihe zu  $f$  über.

2. Der Aufwand zur Berechnung der Koeffizienten des trigonometrischen Interpolationspolynoms ist  $\mathcal{O}(n^2)$ . Im Fall  $n = 2^p, p \in \mathbb{N}$ , lässt sich die "Fast Fourier Transform" (FFT) anwenden (s. Vorlesung Numerische Mathematik im Master-Studiengang). Der Aufwand reduziert sich dann auf  $\mathcal{O}(np)$ .

## 2 Funktionen mehrerer Veränderlicher

### 2.1 Funktionen mehrerer Veränderlicher und ihre Darstellung

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n\}$$

Betrachtet werden Funktionen  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$$

$W_f$  bezeichnet den Wertebereich von  $f$ .

$$\text{Speziell } n = 2 : z = f(x, y)$$

$$n = 3 : w = f(x, y, z)$$

#### Beispiele:

1. Ohmsches Gesetz  $u = u(R, i) = R \cdot i$
2. Der Gesamtwiderstand  $R$  eines Stromkreises mit Einzelwiderständen  $R_1, R_2, R_3$  betrage  $R = R(R_1, R_2, R_3) = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$ . Er wird beschrieben durch die Funktion  $f(x, y, z) = x + \frac{y \cdot z}{y + z}$  mit dem Definitionsbereich  $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, y + z > 0\} = [0, \infty)^3 \setminus \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ .

Im Fall  $n = 2$  wird durch die Funktionsgleichung  $z = f(x, y)$  jedem Zahlenpaar  $(x_0, y_0) \in D_f$  genau ein Funktionswert  $z_0 = f(x_0, y_0)$  zugeordnet. Wir fassen das Zahlentripel  $(x_0, y_0, z_0)$  als kartesische Koordinaten eines Punktes  $P_0$  im dreidimensionalen Anschauungsraum auf. Der Funktionswert  $z_0$  besitzt dabei die geometrische Bedeutung einer Höhenkoordinate.  $P(x_0, y_0, z_0)$  liegt im Abstand  $|z_0|$  ober- oder unterhalb der  $x, y$ -Ebene, je nachdem, ob  $z_0 > 0$  oder  $z_0 < 0$  ist. Liegt  $P(x_0, y_0, z_0)$  in der  $x, y$ -Ebene, so ist  $z_0 = 0$ . Ordnet man auf diese Weise jedem Zahlenpaar  $(x, y) \in D_f$  einen Raumpunkt  $P(x, y, z)$  mit  $z = f(x, y)$  zu, so erhält man eine über dem Definitionsbereich von  $f$  liegende Fläche.

#### Beispiel: Ebenen im Raum

Allgemeine Form der Ebenengleichung im Fall  $n = 3$ :  $ax + by + cz + d = 0$

Spezialfall: Koordinatenebenen



$x, y$ -Ebene:  $z = 0$

$y, z$ -Ebene:  $x = 0$

$x, z$ -Ebene:  $y = 0$

Parallelebenen zu den Koordinatenebenen

z.B.  $z = a$ ,  $a$  konst.

Die perspektivische Darstellung räumlicher Flächenstücke ist oft aufwändig. Man begnügt sich daher häufig mit einer partiellen Darstellung der Funktion  $f$ , indem man Schnitte durch die Fläche von  $f$  parallel zu den Koordinatenebenen legt. Dies geschieht, indem man eine der Variablen konstant hält. Die dabei entstehenden ebenen Schnittkurven werden dann in der entsprechenden Parallelebene dargestellt.

Beispiel:  $z = f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$

Schnitte parallel zur  $x, y$ -Ebene:  $z = c$ ,  $4 - x^2 - y^2 = c \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 - c$

Dies ergibt eine Schar konzentrischer Ursprungskreise von Radius  $\sqrt{4 - c}$ .

Schnitte parallel zur  $y, z$ -Ebene:  $x = c$ ,  $z = \underbrace{4 - c^2}_{=:k} - y^2 = k - y^2$  und Schnitte parallel

zur  $x, z$ -Ebene:  $y = c$ ,  $z = 4 - x^2 - c^2 = k - x^2$  ergeben jeweils eine einparametrische Parabelschar.

## 2.2 Grenzwert und Stetigkeit

Im  $\mathbb{R}^1$  kann man sich einer Stelle  $x_0$  von zwei Seiten her nähern, während man sich im  $\mathbb{R}^2$  einer Stelle  $(x_0, y_0)$  auf beliebigen Wegen nähern kann.

**Definition ( $n=2$ ):** Es seien  $\{x_k\}, \{y_k\}$  zwei Folgen reeller Zahlen. Dann heißt  $\{(x_k, y_k)\}$  **Punktfolge** im  $\mathbb{R}^2$ .

Falls  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a$  und  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = b$ , so heißt die Punktfolge  $\{(x_k, y_k)\}$  **konvergent gegen**  $(a, b)$ .

Schreibweise:  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k, y_k) = (a, b)$  bzw.  $(x_k, y_k) \rightarrow (a, b) (k \rightarrow \infty)$

Die Funktion  $f$  heißt **stetig** an der Stelle  $(x_0, y_0)$ , wenn für **jede** gegen  $(x_0, y_0)$  konvergente Punktfolge  $\{(x_k, y_k)\}$  aus dem Definitionsbereich von  $f$  gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k, y_k) = f(x_0, y_0).$$

Die Definition für  $n > 2$  erfolgt entsprechend.

## 2.3 Differentialrechnung

### 2.3.1 Partielle Ableitung

#### Schnitt der Fläche mit der Ebene $y = y_0$

Flächenkurve  $k_1 : z = f(x, y_0) =: g(x)$

$$m_x = \tan \alpha = g'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Existiert dieser Grenzwert, so heißt  $f$  **partiell differenzierbar nach  $x$**  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  und dieser Grenzwert heißt die **partielle Ableitung** von  $z = f(x, y)$  **nach  $x$**  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ .

#### Bezeichnung:

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{oder} \quad z_x(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$$

#### Schnitt der Fläche mit der Ebene $x = x_0$

Flächenkurve  $k_2 : z = f(x_0, y) =: h(y)$

$$m_y = \tan \beta = h'(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{h(y_0 + \Delta y) - h(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Existiert dieser Grenzwert, so heißt  $f$  **partiell differenzierbar nach  $y$**  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  und dieser Grenzwert heißt die **partielle Ableitung** von  $z = f(x, y)$  **nach  $y$**  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ .

#### Bezeichnung:

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{oder} \quad z_y(x_0, y_0) = \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Besitzt  $f$  in jedem Punkt aus einer Teilmenge ihres Definitionsbereiches eine partielle Ableitung nach  $x$ , so heißt  $f$  in dieser Menge partiell differenzierbar nach  $x$  und die partielle Ableitung nach  $x$  ist selbst wieder eine Funktion von  $x$  und  $y$ .

Analog gilt dies auch für die partielle Ableitung nach  $y$ .

Entsprechend gilt für  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ :

$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  bezeichnet die partielle Ableitung von  $f$  nach  $x_i$ .

**Beispiel:**  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y(x, y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

**Definition (Gradient):** Ist die Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in D$  partiell differenzierbar nach  $x_1, \dots, x_n$ , so heißt der Vektor

$$\nabla f(\xi) = \text{grad}f(\xi) := (f_{x_1}(\xi), f_{x_2}(\xi), \dots, f_{x_n}(\xi))^T$$

der **Gradient** von  $f$  an der Stelle  $\xi$ . ( $\nabla$  wird gesprochen als „Nabla“)

**Beispiel:**  $f(x, y, z) = x + \frac{yz}{y+z}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{z^2}{(y+z)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{y^2}{(y+z)^2}$$

$$\nabla f(\xi) = \text{grad}f(\xi) = \left(1, \frac{\xi_3^2}{(\xi_2 + \xi_3)^2}, \frac{\xi_2^2}{(\xi_2 + \xi_3)^2}\right)^T$$

**Diskussion: Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit**

**Beispiel:**  $f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } xy = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

$f$  ist im Ursprung unstetig, aber dort partiell differenzierbar nach  $x$  und  $y$ .

**Satz:** Wenn  $f_x$  und  $f_y$  in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  existieren und in diesem Punkt stetig sind, dann ist die Funktion  $f$  in  $(x_0, y_0)$  stetig.

**2.3.2 Tangentialebene und totales Differential**

$n = 1$  : Gleichung der Tangente  $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$

$n = 2$  :  $z = f(x, y)$

Die **Tangentialebene** der Funktion  $z = f(x, y)$  im Flächenpunkt  $P(x_0, y_0, z_0)$  mit  $z_0 = f(x_0, y_0)$  enthält sämtliche Tangenten, die im Punkt  $P$  an die Fläche gelegt werden können.

**Herleitung der Gleichung der Tangentialebene**  $z = ax + by + c$

Übereinstimmung der Anstiege von Ebene und Fläche im Punkt  $P$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b$$

$P$  liegt sowohl auf der Fläche als auch in der Ebene, d.h.

$$z_0 = ax_0 + by_0 + c \Rightarrow c = z_0 - ax_0 - by_0 = z_0 - f_x(x_0, y_0)x_0 - f_y(x_0, y_0)y_0.$$

Damit lautet die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche  $z = f(x, y)$  im Flächenpunkt  $P(x_0, y_0, z_0)$  mit  $z_0 = f(x_0, y_0)$

$$z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + z_0 = \left( \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right) + z_0$$

**Beispiel:** Es sei  $f(x, y) = x \cos(x + y) + (y - 1)^2 e^{-x^2}$ .

Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene im Ursprung?

$$z_0 = f(0, 0) = 1$$

$$f_x(x, y) = \cos(x + y) - x \sin(x + y) + (y - 1)^2 e^{-x^2} \cdot (-2x), \quad f_x(0, 0) = 1$$

$$f_y(x, y) = -x \sin(x + y) + e^{-x^2} \cdot 2(y - 1), \quad f_y(0, 0) = -2$$

$$z = 1(x - 0) + (-2)(y - 0) + 1 = x - 2y + 1$$

**Totales Differential**  $P(x_0, y_0, z_0)$  mit  $z_0 = f(x_0, y_0)$  sei ein Punkt auf der Fläche der Funktion  $z = f(x, y)$ . Welche Änderung erfährt der Funktionswert, d.h. die Höhenkoordinate  $z_0$  des Flächenpunktes, bei seiner Verschiebung

1. auf der Fläche selbst
2. auf der Tangentialebene in  $P$ ?

1. Verschiebung auf der Fläche:

Die Koordinatenänderungen werden bezeichnet mit  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

$$P(x_0, y_0, z_0) \rightarrow Q(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$$

$$x_0 \rightarrow x_0 + \Delta x, \quad y_0 \rightarrow y_0 + \Delta y, \quad \Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

2. Verschiebung auf der Tangentialebene:

Koordinatenänderungen werden bezeichnet mit  $dx, dy, dz$ , wobei  $dx = \Delta x, dy = \Delta y$

$$P(x_0, y_0, z_0) \rightarrow Q'(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$$

$$dx = x - x_0, \quad dy = y - y_0, \quad dz = z - z_0$$

Aus der Gleichung der Tangentialebene ergibt sich

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

Für kleine Werte von  $dx = \Delta x$  und  $dy = \Delta y$  ergibt sich näherungsweise  $\Delta z \approx dz = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$ , d.h. die Fläche  $z = f(x, y)$  darf in unmittelbarer Umgebung der Punktes  $P$  näherungsweise durch die Tangentialebene ersetzt werden („Linearisierung“).

**Definition: (Totales Differential)**  $dz = f_x(x_0, y_0) dx + f_y(x_0, y_0) dy$  heißt das **totale (vollständige) Differential** der Funktion  $z = f(x, y)$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$ .

Die Variable  $x$  und  $y$  mögen von dem Parameter  $t$  abhängen,

$$z = z(t) = f(x(t), y(t)) .$$

Formales Dividieren des totalen Differentials  $dz$  durch  $dt$  liefert die **Kettenregel für Funktionen zweier Veränderlicher**.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Übertragen auf Funktionen mit  $n$  Variablen  $z = f(x_1, \dots, x_n)$ , erhalten wir das totale Differential

$$dz = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = (\nabla f(x), dx), \text{ wobei } dx = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix},$$

Kettenregel für Funktionen  $z(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}.$$



Nachfolgend leiten wir eine wichtige Eigenschaft des Gradienten (s. § 2.4.3) im Fall  $n = 2$  her. Die Herleitung für  $n > 2$  erfolgt entsprechend.

Gegeben sei die Funktion  $z = f(x, y)$ . Der Gradient von  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0) \in D_f$  lässt sich schreiben als

$$\nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)e^{(1)} + f_y(x_0, y_0)e^{(2)}$$

und das Differential von  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  infolgedessen als

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy = \left( \nabla f(x_0, y_0), dx e^{(1)} + dy e^{(2)} \right).$$

Es bezeichne  $\varphi = \angle \left( \nabla f(x_0, y_0), dx e^{(1)} + dy e^{(2)} \right)$ .

Dann gilt (vgl. Diskrete Mathematik, § 4.5)

$$dz = \|dx e^{(1)} + dy e^{(2)}\| \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos \varphi.$$

Wir betrachten nun nur Ortszuwächse  $dx e^{(1)} + dy e^{(2)}$ , deren Endpunkte auf einem Kreis vom kleinen Radius  $r$  liegen.

Dann ist  $dz = r \|\nabla f\| \cos \varphi$  allein abhängig vom Winkel  $\varphi$ .

Unter der Annahme  $\nabla f \neq 0$  nimmt  $dz$  seinen größten Wert für  $\varphi = 0$  an.

Da das Differential näherungsweise die Änderung der Funktion in Abhängigkeit vom Argumentzuwachs beschreibt, nimmt die Funktion  $f$  am stärksten in der Richtung zu, die durch den Gradienten gekennzeichnet ist.

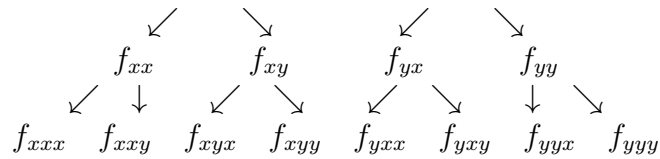
Entfernt man sich vom Flächenpunkt  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $z_0 = f(x_0, y_0)$ , in einer zum Gradienten senkrecht verlaufenden Richtung, so ist  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , was  $dz = 0$  ergibt. Das zeigt, dass die Funktion  $f$  in dieser Richtung (näherungsweise) stationär ist.

**Ergebnis:** Der Gradient einer Funktion  $f$  gibt die Richtung des größten Wachstums der Funktion an. Seine Norm ist ein Maß für das Anwachsen in dieser Richtung. Der Gradient steht senkrecht auf der durch den entsprechenden Flächenpunkt verlaufenden Höhenlinie.

### 2.3.3 Höhere partielle Ableitungen

Gegeben sei  $z = f(x, y)$

$$\begin{array}{ccc} & f(x, y) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ f_x(x, y) & & f_y(x, y) \end{array}$$



**Schreibweisen:**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f_x)_x = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f_x)_y = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f_y)_x = f_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (f_y)_y = f_{yy}$$

$$w = f(x, y, z) : \quad ((f_x)_y)_z = f_{xyz} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} \text{ usw.}$$

**Beispiel:**  $f(x, y) = e^{-x} \cos y, \quad f_x = -e^{-x} \cos y, \quad f_y = -e^{-x} \sin y$   
 $f_{xx} = e^{-x} \cos y, \quad f_{xy} = e^{-x} \sin y, \quad f_{yx} = e^{-x} \sin y, \quad f_{yy} = -e^{-x} \cos y$

**Satz von Schwarz:** Falls die gemischten Ableitungen stetig sind, dürfen die einzelnen Differentiationsschritte vertauscht werden.

**Beispiel:**  $f_{xyy} = f_{yxxy} = f_{yyxx}$

Im Fall  $n = 2$  reduziert sich dann die Anzahl der zu berechnenden partiellen Ableitungen 2. und 3. Ordnung von 4 auf 3 bzw. von 8 auf 4.

## 2.4 Relative Extrema

### 2.4.1 Definitionen und Beispiele

**Definitionen:** Es sei  $M \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f$  besitzt an der Stelle  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in D$  ein **relatives Maximum** (bzw. **relatives Minimum**), wenn in einer Umgebung von  $\xi$  gilt

$$f(x) < f(\xi) \quad (\text{bzw. } f(\xi) < f(x)) \quad \forall x \neq \xi;$$

$f$  besitzt an der Stelle  $\xi \in M$  sein **absolutes (globales) Maximum** (bzw. **Minimum**) **auf**  $M$ , falls gilt

$$f(x) \leq f(\xi) \quad (\text{bzw. } f(\xi) \leq f(x)) \quad \forall x \in M$$

Ist  $M = D$ , so lässt man häufig den Zusatz „auf  $M$ “ fort.

**Beispiele:**

### 2.4.2 Notwendige und hinreichende Bedingungen für ein relatives Extremum

**Satz: (Notwendige Bedingung für das Vorliegen eines relativen Extremums)** Die Bedingung  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$  ist notwendig für die Existenz eines relativen Extremums an der Stelle  $(x_0, y_0)$  einer Funktion  $f$ , deren partielle Ableitungen an dieser Stelle existieren.

**Beispiel:**  $z = f(x, y) = x^2 - y^2, \quad x_0 = y_0 = 0$   
 $f_x = 2x, \quad f_x(0, 0) = 0, \quad f_y = -2y, \quad f_y(0, 0) = 0$   
 d.h. die notwendige Bedingung ist erfüllt.

Schnitt der Fläche mit der  $x, z$ -Ebene ( $y = 0$ )  $z = x^2$

Schnitt der Fläche mit der  $y, z$ -Ebene ( $x = 0$ )  $z = -y^2$

$\Rightarrow f(x, y)$  besitzt im Ursprung kein relatives Extremum.

Der Flächenpunkt  $(0, 0, 0)$  ist ein sogenannter **Sattelpunkt**.

**Verallgemeinerung auf Funktionen von  $n$  Veränderlichen:** Notwendig für das Vorliegen eines relativen Extremums an der Stelle  $\xi$  einer Funktion  $f(x_1, \dots, x_n)$ , deren sämtliche partiellen Ableitungen dort existieren, ist das Verschwinden dieser Ableitungen an der Stelle  $\xi$ , d.h.

$$\nabla f(\xi) = \text{grad}f(\xi) = 0.$$

Eine solche Stelle  $\xi$  heißt **stationäre Stelle** von  $f$ .

Dies ist jedoch nur ein notwendiges Kriterium und kein hinreichendes!

**Satz: (Hinreichende Bedingung für ein relatives Extremum)**

Die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  besitze stetige erste und zweite partielle Ableitungen. Dann hat  $f$  an der Stelle  $(x_0, y_0)$  ein relatives Extremum, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1.  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$
2. Es gilt die Ungleichung

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$$

Ist ferner  $f_{xx}(x_0, y_0) \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$  (bzw.  $f_{yy}(x_0, y_0) \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$ ), so liegt ein relatives  $\begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases}$  vor.

**Bemerkung:**

Gilt  $\Delta(x_0, y_0) < 0$ , so liegt ein Sattelpunkt vor.

Im Falle  $\Delta(x_0, y_0) = 0$  macht das Kriterium keine Aussage.

**Vorgehensweise zum Auffinden relativer Extrema:**

1. Ermittlung aller stationären Stellen.
2. Für sämtliche dieser Stellen wird das Vorzeichen von  $\Delta$  ermittelt.
3. Untersuchung der verbleibenden Punkte, in denen  $\Delta = 0$  ist oder  $f$  nicht hinreichend oft differenzierbar ist.

Falls die absoluten Extrema von  $f$  auf  $M \subseteq D_f$  zu bestimmen sind und  $M$  Randpunkte enthält, sind ferner noch die Randextremwerte zu ermitteln und mit den relativen Extrema zu vergleichen.

**Beispiel:** Man bestimme die absoluten Extremwerte der Funktion  $z = f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$  im Bereich  $-1 \leq x, y \leq 1$ .

Bestimmung und Untersuchung der stationären Stellen

$$f_x = -2x(y - 2x^2) + (y - x^2)(-4x) = -2xy + 4x^3 - 4xy + 4x^3 = -2x(-4x^2 + 3y)$$

$$f_y = y - 2x^2 + y - x^2 = 2y - 3x^2$$

$$f_x = 0 \text{ und } f_y = 0 \Rightarrow -2x = 0 \text{ oder } 4x^2 = 3y$$

$$\Rightarrow x^2 = 3/4y \text{ und } 3x^2 = 2y \Rightarrow x^2 = 2/3y,$$

Dies ist nur möglich, wenn  $x = y = 0$  ist; also ist  $(0, 0)$  die einzige stationäre Stelle.

$$f_{xx} = -6y + 24x^2, \quad f_{xy} = -6x, \quad f_{yy} = 2$$

$\Delta(0, 0) = 0$ , d.h. das Kriterium macht keine Aussage!

Untersuchung von  $f$  in der Nähe des Ursprungs:

$$f(0, y) = y^2$$

$$f(x, 0) = 2x^4$$

Für  $y = ax$  folgt  $f(x, ax) = (ax - x^2)(ax - 2x^2) = x^2(a - x)(a - 2x)$

Man könnte nun glauben, dass bei  $(0, 0)$  ein relatives Minimum vorliegt,

**aber**

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = x^2 \vee y = 2x^2$$

$$f(x, y) > 0 \Leftrightarrow [(y - x^2 > 0 \wedge y - 2x^2 > 0)] \vee [(y - x^2 < 0 \wedge y - 2x^2 < 0)]$$

$$\Leftrightarrow y > 2x^2 \vee y < x^2$$

$$f(x, y) < 0 \Leftrightarrow [(y - x^2 < 0 \wedge y - 2x^2 > 0)] \vee [(y - x^2 > 0 \wedge y - 2x^2 < 0)]$$

$$\Leftrightarrow x^2 < y < 2x^2$$

In jeder noch so kleinen Umgebung um den Ursprung nimmt die Funktion  $f$  sowohl positive als auch negative Werte an. Daher liegt im Ursprung **kein** relatives Extremum vor.

Untersuchung des Randes:

$$f(\pm 1, y) = (y - 1)(y - 2) = y^2 - 3y + 2 =: h(y)$$

$$h'(y) = 2y - 3, \quad h'(y) = 0 \Rightarrow y = 3/2 > 1$$

$$f(x, 1) = (1 - x^2)(1 - 2x^2) = 2x^4 - 3x^2 + 1 =: g(x)$$

$$g'(x) = 8x^3 - 6x = 2x(4x^2 - 3), \quad g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$f(x, -1) = (1 + x^2)(1 + 2x^2) \text{ wird minimal für } x = 0$$

Als Randextremwerte kommen mithin in Frage:

$(0, 1)$ ,  $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)$ ,  $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)$ ,  $(0, -1)$

sowie die 4 Randpunkte  $(\pm 1, \pm 1)$

$f(\pm 1, -1) = 6$ ,  $f(0, \pm 1) = 1$ ,  $f(\pm 1, 1) = 0$ ,  $f(\pm \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1) = -1/8$ .

Ergebnis: Das absolute Maximum von  $f$  wird angenommen an der Stelle  $(\pm 1, -1)$  und das absolute Minimum bei  $(\pm \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)$ .

### 2.4.3 Verfahren des steilsten Abstiegs (\*)

Ziel: Näherungsweise Berechnung von Extrempunkten einer Funktion  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  o.B.d.A. wird das Minimierungsproblem behandelt. (Das Maximierungsproblem lässt sich durch Übergang von  $f$  zu  $-f$  auf ein Minimierungsproblem zurückführen.)

Ein Problem, welches sich auf das Minimierungsproblem zurückführen lässt:

Gesucht sind die Lösungen des folgenden Systems von nichtlinearen Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\} (*) \quad (x_1, \dots, x_n) \in D$$

**Beispiel:**  $n = 2 : g_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, g_2(x, y) = 1/4x^2 + 4y^2 - 1 = 0$   
 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0\}$

Setze:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n g_i^2(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Dann ist  $\xi \in D$  genau dann eine Lösung von (\*), falls  $\min_{x \in D} f(x) = f(\xi) = 0$ .

Nach den Ergebnissen des § 2.3.2 ist lokal, d.h. in einer Umgebung des Punktes  $x^{(0)}$ , die Richtung des steilsten Abstiegs der zu minimierenden Funktion  $f$  gegeben durch  $-\nabla f(x^{(0)})$ . Auf dieser Eigenschaft des Gradienten beruht das folgende Verfahren, welches als **Verfahren des steilsten Abstiegs (Gradientenverfahren)** bezeichnet wird.

#### Iterationsvorschrift:

1. Wähle einen Startpunkt  $x^{(0)}$ ; setze den Iterationsindex  $l = 0$ .
2. Wähle als Suchrichtung  $s^{(l)} = -\nabla f(x^{(l)})$ .
3. Bestimme eine skalare Schrittweite  $\alpha^{(l)} > 0$  durch Lösung des folgenden eindimensionalen Minimierungsproblems (**Linienoptimierung**)

$$\min_{\alpha > 0} f(x^{(l)} + \alpha^{(l)} s^{(l)});$$

setze anschließend

$$x^{(l+1)} = x^{(l)} + \alpha^{(l)} s^{(l)}.$$

4. Wenn Abbruchkriterium erfüllt, **stop**.
5. Starte neue Iteration  $l := l + 1$ ; gehe nach 2.



**Ein (einfaches) Beispiel:**  $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - a_i)^2$  mit  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , bel.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = x_i - a_i, \quad \nabla f(x) = x - a$$

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$  bel. gewählt,  $s^{(0)} = -(x^{(0)} - a)$

$$\min_{\alpha^{(0)} > 0} f(x^{(0)} - \alpha^{(0)}(x^{(0)} - a)) = \frac{1}{2} \min_{\alpha^{(0)} > 0} \sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i^{(0)} - \alpha^{(0)}(x_i^{(0)} - a_i) - a_i)^2}_{(1-\alpha^{(0)})(x_i^{(0)} - a_i)}$$

$$= \frac{1}{2} \min_{\alpha > 0} (1 - \alpha^{(0)})^2 \sum_{i=1}^n (x_i^{(0)} - a_i)^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha^{(0)} = 1, \text{ d.h. } x^{(1)} = a$$

**Linienminimierung (Bestimmung des Minimums längs der festgelegten Suchrichtung):**

$$\text{Setze: } h(\alpha) := f(x^{(l)} - \alpha \frac{\nabla f(x^{(l)})}{\|\nabla f(x^{(l)})\|})$$

Gesucht:  $\alpha^*$  mit  $h(\alpha^*) = \min_{\alpha} h(\alpha)$

**Bestimmung eines Näherungswertes  $\alpha_0$  für  $\alpha^*$**

$$\alpha_1 := 0, \quad h_1 := h(\alpha_1), \quad \alpha_3 := 1, \quad h_3 := h(\alpha_3)$$

Solange  $h_1 \leq h_3$ , setze  $\alpha_3 := \alpha_3/2, h_3 := h(\alpha_3)$ ;

$$\alpha_2 := \alpha_3/2, \quad h_2 := h(\alpha_2);$$

Man legt nun durch die Punkte  $(\alpha_i, h_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , eine Parabel  $P(\alpha)$  und nimmt deren Minimumstelle  $\alpha_0$  als Näherungswert für die Minimumstelle  $\alpha^*$ .

Es gilt:

$$\alpha_0 = \alpha_2 - \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{4} \cdot \frac{h_3 - h_1}{h_3 - 2h_2 + h_1}$$

**Abbruch** des Verfahrens, falls für ein  $l$  gilt  $\|\nabla f(x^{(l)})\| < \epsilon$ , wobei  $\epsilon$  eine vom Problem abhängige Genauigkeitsschranke ist.

**Beispiel:** Gesucht ist die Lösung des Systems nichtlinearer Gleichungen:

$$\begin{aligned} g_1(x, y, z) &= 3x - \cos(yz) - 1/2 &= 0 \\ g_2(x, y, z) &= x^2 - 81(y + 0.1)^2 + \sin z + 1.06 &= 0 \\ g_3(x, y, z) &= e^{-xy} + 20z + \frac{10\pi - 3}{3} &= 0 \end{aligned}$$

Dieses System hat die Lösung  $(1/2, 0, -\pi/6)$ ,  $\pi/6 = 0.52359877 \dots$

Setze:  $f(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 g_i^2(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \left( 2g_1 \frac{\partial g_1}{\partial x} + 2g_2 \frac{\partial g_2}{\partial x} + 2g_3 \frac{\partial g_3}{\partial x}, 2g_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + \dots, \dots + 2g_3 \frac{\partial g_3}{\partial z} + \dots \right)^T \\ &= 2 \left[ g_1 \left( \frac{\partial g_1}{\partial x}, \frac{\partial g_1}{\partial y}, \frac{\partial g_1}{\partial z} \right)^T + g_2 \left( \frac{\partial g_2}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial y}, \frac{\partial g_2}{\partial z} \right)^T + g_3 \left( \frac{\partial g_3}{\partial x}, \frac{\partial g_3}{\partial y}, \frac{\partial g_3}{\partial z} \right)^T \right] \end{aligned}$$

Also gilt:  $\nabla f(x, y, z) = 2 \cdot \sum_{i=1}^3 g_i \nabla g_i$

Start  $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) = (1/2, 1/2, 1/2)$

$\alpha_1 = 0$  ,  $h_1 = 1159.24$

$\alpha_2 = 0.25$  ,  $h_2 = 454.8059$

$\alpha_3 = 0.5$  ,  $h_3 = 363.5173$

$\Rightarrow \alpha_0 = 0.4122214$ ,  $h(\alpha_0) = 372.2808$

Es wird  $\alpha_0 = 0.5$  gewählt, da  $h(\alpha_3) < h(\alpha_0)$ .

## 3 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGLn)

### 3.1 Grundbegriffe

#### 3.1.1 Einführendes Beispiel

Betrachtet wird ein nach oben geworfener Körper. Auf diesen wirkt die Anziehungskraft der Erde und bewirkt eine der Wurfrichtung entgegengesetzte Fallbeschleunigung.

Fallbeschleunigung  $\ddot{s}(t) = -g$

Gesucht ist das Weg-Zeit-Gesetz  $s(t)$ .

$\ddot{s}(t) = -g$  ist die Differentialgleichung des freien Falls ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Lösung dieser Differentialgleichung durch Integration

$$\dot{s}(t) = \int \ddot{s}(t) dt = \int -g dt = -gt + C_1$$

$$s(t) = \int \dot{s}(t) dt = \int (-gt + C_1) dt = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ bel.}$$

ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

$t = 0$ :

$C_1 = \dot{s}(0)$  ist die Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 = v(0)$

$C_2 = s(0)$  ist die Anfangshöhe  $s_0 = s(0)$

Durch Angabe der Anfangshöhe  $s_0$  und Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  ist die Lösung der Differentialgleichung eindeutig festgelegt

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0.$$

### 3.1.2 Definition einer DGL

**Definition (DGL):** Eine Gleichung, in der Ableitungen einer (noch unbekannt)en Funktion auftreten, heißt **Differentialgleichung** (abgekürzt mit DGL). Die Ordnung der in der DGL auftretenden höchsten Ableitung heißt die **Ordnung** der DGL.

Explizite Form einer DGL:  $y^{(n)} = f(x; y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Implizite Form einer DGL:  $F(x; y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

**Beispiele:**

- |  |                         |
|--|-------------------------|
| 1. $\ddot{s}(t) = -g$                                | 2. Ordnung und explizit |
| 2. $\frac{d^2y}{dx^2} = xy^2 + \frac{dy}{dx} \cos x$ | 2. Ordnung und explizit |
| 3. $x \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \cos y = 0$ | 3. Ordnung und implizit |

### 3.1.3 Lösung einer DGL

**Definition:** Eine Funktion  $y = \varphi(x)$  heißt **Lösung** oder **Integral der Differentialgleichung**

$$F(x; y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad y^{(n)} = f(x; y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

auf dem Intervall  $I$ , wenn

1.  $\varphi$  auf dem Intervall  $I$   $n$ -mal differenzierbar ist und
2.  $F(x; \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n)}) = 0$   
bzw.  
 $\varphi^{(n)} = f(x; \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$   
für alle  $x \in I$  gilt.

**Beispiele:**

1. Gesucht sind sämtliche Funktionen  $y$  mit  $y' = 2x$ .  
Lösung:  $y = x^2 + C$
2.  $\ddot{s} = -g$ ,  $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$   
Bedingung 1: erfüllt  
Bedingung 2:  $\dot{s}(t) = -gt + C_1$ ,  $\ddot{s}(t) = -g$

3.  $y' + y \tan x = \frac{1}{\cos x}, \quad I = (-\pi/2, \pi/2)$

Behauptung:  $y = \sin x + C \cos x$  ist Lösung für alle  $C \in \mathbb{R}$ .

$y$  und  $y' = \cos x - C \sin x$  eingesetzt in die DGL liefert:

$$\cos x - C \sin x + (\sin x + C \cos x) \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

4. **Schwingungsgleichung:**

Harmonische Schwingung  $y(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad \omega > 0$

$$\dot{y}(t) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{y}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 y(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

**Definition (Allgemeine und spezielle Lösung):** Die Menge aller Lösungen einer DGL heißt deren **allgemeine Lösung**; sie enthält Konstanten, die als **Integrationskonstanten** bezeichnet werden.

Jede durch eine spezielle Wahl aller Konstanten in der allgemeinen Lösung entstehende Lösung der DGL heißt **spezielle** oder **partikuläre Lösung**.

**Anmerkung:** Es gibt jedoch DGLn, die keine (reellen) Lösungen besitzen, z.B.  $(y')^2 = -1$ .

### 3.1.4 Anfangswertproblem

**Definition (Anfangswertproblem):** Gegeben sei die Differentialgleichung  $y^{(n)} = f(x; y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , ein Intervall  $I$  sowie  $x_0 \in I, y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ . Dann bezeichnet man als **Anfangswertproblem** die Aufgabe, eine Funktion  $y$  zu finden, die

1. der Differentialgleichung auf dem Intervall  $I$  genügt und
2. die Bedingung

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, y''(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \quad (*)$$

erfüllt.

Die Werte  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$  heißen **Anfangswerte**, die Bedingungen  $(*)$  **Anfangsbedingungen**,  $x_0$  heißt **Anfangspunkt**.

**Beispiele:**

1. DGL  $y' = 2x$ ,  $y(1) = 3$   
 allgemeine Lösung:  $y(x) = x^2 + C$ ,  $C \in \mathbb{R}$   
 $3 = y(1) = 1 + C \Rightarrow C = 2$   
 gesuchte Lösung:  $y(x) = x^2 + 2$
2. Die DGL  $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$  beschreibt die harmonische Schwingung eines elastischen Federpendels. Gegeben seien die folgenden Anfangsbedingungen:  
 $y(0) = y_0 > 0$ : das Federpendel besitzt zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine Auslenkung in positiver Richtung  
 $\dot{y}(0) = 0$ : Bewegung erfolgt aus der Ruhelage heraus.

Allgemeine Lösung der DGL lautet (s. § 3.1.3):

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad A > 0, \varphi \in [0, 2\pi)$$

Amplitude  $A$  und Phase  $\varphi$  werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt:

$$y(0) = y_0 \Rightarrow A \sin \varphi = y_0 \Rightarrow \varphi \in (0, \pi), \text{ da } y_0, A > 0$$

$$\dot{y}(0) = A\omega \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2, \text{ da } A, \omega > 0 \text{ und } \varphi \in (0, \pi)$$

$$\Rightarrow A = y_0, \quad \text{da } y(0) = A \sin \varphi = \underbrace{A \sin \pi/2}_1 = y_0$$

$$\text{Die Lösung lautet } y(t) = y_0 \sin(\omega t + \pi/2) = y_0 \cos(\omega t), \quad t \geq 0$$

### 3.2 DGLn 1. Ordnung

Gegeben sei die DGL  $y' = f(x, y)$ . (1)

#### 3.2.1 Richtungsfeld

**Annahme:**

Durch jeden Punkt des Definitionsbereiches von  $f$  gehe genau eine Lösungskurve.

Die Steigung der Tangente an die Lösungskurve in  $P_0(x_0, y_0)$  lautet  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$  mit  $y_0 = y(x_0)$ .

Durch die DGL (1) wird jedem Punkt  $P$  aus dem Definitionsbereich von  $f$  ein Richtungs- oder Steigungswert zugeordnet. Er gibt den Anstieg der durch  $P$  verlaufenden Lösungskurve an.

**Definition (Linienelement):** Unter einem **Linienelement** der DGL (1) versteht man ein Zahlentripel  $(x_0, y_0, y'_0)$  mit  $(x_0, y_0) \in D_f$  und  $y'_0 = f(x_0, y_0)$ . Die Menge aller Linienelemente bildet das **Richtungsfeld** der DGL.

Alle Kurven, die in jedem Punkt die Richtung des Linienelementes haben, sind Lösungskurven.

**Definition (Isokline):** Eine **Isokline** ist die Verbindungslinie aller Punkte, deren zugehörige Linienelemente parallel sind.

Die Isoklinen der DGL (1) sind durch die Gleichung  $f(x, y) = c$  ( $c$  const.) gegeben.

**Beispiele:**

1. DGL  $y' = 2x$  Isoklinengleichung:  $2x = c$ , d.h.  $x = c/2$
2. DGL  $y' = 1 - y$ ; die durch den Ursprung verlaufende Lösungskurve ist zu ermitteln.

Isoklinengleichung:  $1 - y = c \Rightarrow y = 1 - c$

Die gesuchte Lösungskurve ist  $y(x) = 1 - e^{-x}$ .

### 3.2.2 DGL $y' = ky$

$$\frac{dy}{dx} = ky, \quad \text{Annahme: } y \neq 0$$

$$\frac{dy}{y} = k dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int k dx \Rightarrow \ln |y| = kx + C$$

An der Stelle  $x_0$  sei der Anfangswert  $y_0$  vorgegeben; dann gilt

$$\ln |y_0| = kx_0 + C$$

Subtraktion beider Gleichungen gibt

$$\underbrace{\ln |y| - \ln |y_0|}_{\ln \left| \frac{y}{y_0} \right|} = k(x - x_0) \Rightarrow |y| = |y_0| e^{k(x-x_0)} \Rightarrow y(x) = y_0 e^{k(x-x_0)}$$

#### Beispiel:

An einem Kondensator mit der Kapazität  $C$  liege die Spannung  $u_c(t)$ . Es gelte  $u_c(0) = 0$ . Er werde für  $t > 0$  über einen Ohmschen Widerstand  $R$  mit der Gleichspannung  $U_0$  aufgeladen.

Man bestimme den zeitlichen Verlauf der Spannung  $u_c(t)$  und des in den Kondensator fließenden Stromes  $i_c(t)$ .



### 3.2.3 Separierbare DGLn

Gegeben sei die DGL:  $y' = f(x) \cdot g(y)$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \text{Annahme: } g(y) \neq 0$$

Trennung der Variablen

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

Auflösung nach  $y$

#### **Bemerkung:**

Die Trennung der Variablen erfordert  $g(y) \neq 0$ . Die Lösung der Gleichung  $g(y) = 0$  liefert Lösungen von Typ  $y = b$  ( $b$  const.), falls die Gleichung  $g(y) = 0$  überhaupt Lösungen besitzt. (Denn falls  $g(b) = 0$ , so ist  $y = b$  Lösung)

#### **Beispiele:**

### 3.2.4 Auf separierbare DGLn zurückführbare DGLn

- DGLn vom Typ  $y' = f(ax + by + c)$   
 Subst.:  $u = u(x) = ax + by + c$  (\*)  
 $u' = a + by' = a + bf(u)$

Lösung durch Trennung der Veränderlichen.  
 Lösung in (\*) einsetzen und nach  $y$  auflösen.

#### Beispiel:

AWP: DGL  $y' = (x + y - 1)^2$  mit  $|x| < \pi/2, y(0) = 1$   
 Subst.:  $u = x + y - 1, u' = 1 + y' = 1 + u^2$

$$\frac{du}{1+u^2} = dx \Rightarrow \int \frac{du}{1+u^2} = \int 1 dx \Rightarrow \arctan u = x + C$$

$$u = \tan(x + c) = x + y - 1 \Rightarrow y = 1 - x + \tan(x + c)$$

$$(AWP) 0 = 1 - 1 = \tan C \Rightarrow C = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

die gesuchte partikuläre Lösung lautet:  $y(x) = 1 - x + \tan x$

- DGLn vom Typ  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$   
 Subst.:  $u = u(x) = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux$  (\*\*)  
 $y' = u'x + u \Rightarrow u' = \frac{y' - u}{x} = \frac{f(u) - u}{x}$

$u' = \frac{1}{x}(f(u) - u)$  ist eine separierbare DGL

Lösung durch Trennung der Veränderlichen

Lösung in (\*\*) einsetzen.

#### Beispiel:

$$y' = \frac{x - y}{x} = 1 - \frac{y}{x}$$

$$\text{Subst.: } u = \frac{y}{x}, u' = \frac{1 - u - u}{x} = \frac{1 - 2u}{x}$$

Voraussetzung:  $u \neq 1/2$

$$\frac{du}{2u - 1} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{2u - 1} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} \ln |2u - 1| = -\ln |x| + \ln |C_1|, \quad C_1 \neq 0$$

$$\ln |2u - 1| = \ln \frac{|c_1|^2}{|x|^2}$$

$$|2u - 1| = \frac{|c_1|^2}{x^2} \Rightarrow 2u - 1 = \frac{k}{x^2} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \left( \frac{k}{x^2} + 1 \right) = \frac{y}{x}$$

Allgemeine Lösung der DGL:  $y = \frac{1}{2} \left( x + \frac{k}{x} \right)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

### 3.2.5 Lineare DGLn 1. Ordnung

**Definition:** Eine DGL 1. Ordnung heißt **linear**, wenn sie in der Form  $y' + f(x)y = g(x)$  darstellbar ist.

$g$  heißt **Störfunktion**. Falls  $g \equiv 0$  ist, heißt die DGL **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

**Beispiele:**

$y' = ky$	$f(x) = -k$	linear und homogen
$y' + 3x^2y = 0$	$f(x) = 3x^2$	linear und homogen
$y' + 2x^2y = \sin x$		linear und inhomogen
$y' + 3x^2y^2 = 0$		nichtlinear
$y'y + x = 0$		nichtlinear

#### 3.2.5.1 Lösung der homogenen DGL

$$y' = \frac{dy}{dx} = -f(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = -f(x) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int f(x) dx$$

$$\ln |y| = - \int f(x) dx$$

Allgemeine Lösung der homogenen linearen DGL 1. Ordnung:

$$y(x) = ke^{-\int f(x) dx}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

#### 3.2.5.2 Lösung der inhomogenen DGL

$$y' + f(x)y = g(x) \quad (2)$$

- **Variation der Konstanten**

Lösung der zugehörigen homogenen DGL durch Trennung der Variablen liefert

$$y_0(x) = ke^{-\int f(x) dx}, \quad k \in \mathbb{R};$$

$k$  wird durch eine Funktion  $K(x)$  ersetzt.

Lösungsansatz:

$$y(x) = K(x)e^{-\int f(x) dx}$$

$$y'(x) = K'(x)e^{-\int f(x) dx} + K(x)e^{-\int f(x) dx} \cdot (-f(x))$$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$K'(x)e^{-\int f(x) dx} \underbrace{-f(x)K(x)e^{-\int f(x) dx} + f(x)K(x)e^{-\int f(x) dx}}_{=0} = g(x)$$

$$K'(x) = g(x)e^{\int f(x) dx}$$

Integration liefert:  $K(x) = \int g(x)e^{\int f(x) dx} dx + C$

Einsetzung in den Lösungsansatz liefert:

Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL (2):

$$y(x) = \left[ \int g(x)e^{\int f(x) dx} dx + C \right] \cdot e^{-\int f(x) dx} .$$

**Beispiele:**

- **Aufsuchen einer partikulären Lösung**

**Satz:** Die allgemeine Lösung  $y$  einer inhomogenen linearen DGL (2) lässt sich darstellen als  $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$ , wobei  $y_0$  die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen und  $y_p$  eine beliebige Lösung der inhomogenen DGL (partikuläre Lösung) ist.

*Beweis:*

**Vorgehensweise zur Lösung einer inhomogenen DGL durch Aufsuchen einer partikulären Lösung:**

1. Bestimmung der allgemeinen Lösung  $y_0$  der zugehörigen homogenen DGL,
2. Bestimmung einer partikulären Lösung  $y_p$  der inhomogenen DGL mit Hilfe eines geeigneten Funktionsansatzes,
3. Summation  $y = y_0 + y_p$  liefert die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

**Beispiel:**

$$y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y_0 = kx, \quad k \in \mathbb{R}, \quad \text{Ansatz für } y_p: y_p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

$$y'_p - \frac{y_p}{x} = 3ax^2 + 2bx + c - (ax^2 + bx + c) = 2ax^2 + bx = x^2$$

Koeffizientenvergleich liefert:  $2a = 1 \Rightarrow a = 1/2$ ,  $b = 0$  und damit  $y_p = \frac{x^3}{2}$

Damit lautet die allgemeine Lösung der DGL  $y(x) = y_0(x) + y_p(x) = kx + \frac{x^3}{2}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

### 3.2.5.3 Lineare DGLn 1.Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y' + ay = g(x)$$

Die zugehörige homogene DGL  $y' + ay = 0$  besitzt die Lösung  $y_0(x) = Ce^{-ax}$  (vergl. § 3.2.2).

Bei einer inhomogenen DGL bietet sich an

- Variation der Konstanten
- Aufsuchen einer partikulären Lösung (oft zweckmäßiger)

Störglied $g$	Lösungsansatz $y_p$
1. Konstante Funktion	Konstante Funktion $y_p = c_0$
2. Lineare Funktion	Lineare Funktion $y_p = c_1x + c_0$
3. Quadratische Funktion	Quadratische Funktion $y_p = c_2x^2 + c_1x + c_0$
4. Polynom vom Grade $n$	Polynom vom Maxgrad $n$ $y_p = c_nx^n + \dots + c_1x + c_0$
5. $g(x) = A \cdot \sin(\omega x)$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} y_p = C_1 \cdot \sin(\omega x) + C_2 \cdot \cos(\omega x)$
6. $g(x) = B \cdot \cos(\omega x)$	
7. $g(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	
8. $g(x) = A \cdot e^{bx}$	$y_p = \begin{cases} C \cdot e^{bx} & \text{für } b \neq -a \\ Cx \cdot e^{bx} & \text{für } b = -a \end{cases}$

Tab. Lösungsansätze für DGL vom Typ  $y' + ay = g(x)$

#### Beispiel:

$$y' + 2y = x^2, \quad y_0 = ce^{-2x}$$

Ansatz für  $y_p$ :  $y_p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  (Tabelle, 3. Fall)

Eingesetzt in die DGL liefert dies :

$$2\alpha x + \beta + 2\alpha x^2 + 2\beta x + 2\gamma = x^2$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } 2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 1/2, \quad 2(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha = -1/2$$

$$\beta + 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 1/4$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\text{Ergebnis: } y(x) = y_0(x) + y_p(x) = Ce^{-2x} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \quad C \in \mathbb{R}.$$



### 3.3 Lineare DGLn 2. und höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

**Definition:** Eine DGL  $n$ -ter Ordnung, die sich auf die Gestalt

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x)$$

bringen lässt, heißt **linear**. Falls  $g(x) \equiv 0$ , heißt sie **homogen**, andernfalls **inhomogen**. Wir betrachten hier nur den Fall, dass die Koeffizientenfunktionen  $a_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ , konstante Funktionen sind:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = g(x). \quad (1)$$

Die DGL (wir lassen wieder das Argument  $x$  fort)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (1_h)$$

heißt **die zu (1) zugehörige homogene DGL**. Sie hat stets die **triviale Lösung**  $y \equiv 0$ .

**Satz:** Das AWP ist eindeutig lösbar, wenn  $g$  stetig ist, d.h. zu jeder Anfangswertvorgabe  $x_0, y_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ , gibt es genau eine Lösung  $y$  von (1) mit  $y^{(i)}(x_0) = y_i, i = 0, 1, \dots, n-1$ .

#### 3.3.1 Eigenschaften der homogenen DGL

Wir betrachten zunächst die homogene DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (2)$$

**Satz:**

1. Sind  $y_1, y_2$  zwei Lösungen von (2), so ist auch  $y = c_1y_1 + c_2y_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , Lösung von (2).
2. Ist  $y$  eine komplexwertige Lösung von (2), so sind auch  $Re\ y, Im\ y$  (reellwertige) Lösungen von (2).

*Beweis:*

1. Vorbemerkung: Es gilt  $(c_1y_1+c_2y_2)'' = ((c_1y_1+c_2y_2)')' = (c_1y_1'+c_2y_2')' = c_1y_1''+c_2y_2''$ ,  
und durch Induktion erhält man

$$(c_1y_1 + c_2y_2)^{(n)} = c_1y_1^{(n)} + c_2y_2^{(n)}.$$

Sind  $y_1, y_2$  Lösungen von (2), so gilt:

$$\begin{aligned} & (c_1y_1 + c_2y_2)^{(n)} + a_{n-1}(c_1y_1 + c_2y_2)^{(n-1)} + \dots + a_1(c_1y_1 + c_2y_2)' + a_0(c_1y_1 + c_2y_2) = \\ & c_1y_1^{(n)} + a_{n-1}c_1y_1^{(n-1)} + \dots + a_1c_1y_1' + a_0c_1y_1 + c_2y_2^{(n)} + a_{n-1}c_2y_2^{(n-1)} + \dots + a_1c_2y_2' + a_0c_2y_2 \\ & = c_1 \underbrace{[y_1^{(n)} + a_{n-1}y_1^{(n-1)} + \dots + a_1y_1' + a_0y_1]}_{=0, \text{ da } y_1 \text{ Lösg. von (2)}} + c_2 \underbrace{[y_2^{(n)} + a_{n-1}y_2^{(n-1)} + \dots + a_1y_2' + a_0y_2]}_{=0, \text{ da } y_2 \text{ Lösg. von (2)}} \\ & = 0 \end{aligned}$$

2. Es sei  $y$  eine komplexwertige Lösung von (2).

Setze  $u = \operatorname{Re} y, v = \operatorname{Im} y$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} & (u + jv)^{(n)} + a_{n-1}(u + jv)^{(n-1)} + \dots + a_1(u + jv)' + a_0(u + jv) = 0 \\ & u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + a_1u' + a_0u + j[v^{(n)} + a_{n-1}v^{(n-1)} + \dots + a_1v' + a_0v] = 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn sowohl der Real- als auch der Imaginärteil der linken Seite verschwinden. Damit sind  $u, v$  Lösungen von (2).

**Bemerkung:** Mittels Induktion erhält man, dass die Aussage unter 1. auch für endliche Summen von Lösungen gilt.

**Beispiel:** (Schwingungsgleichung)

$$y'' + \omega^2y = 0 \tag{3}$$

Lösungen sind  $y_1(t) = \sin \omega t, y_2(t) = \cos \omega t$  (vgl. 3.1.3).

Damit ist auch  $c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$  Lösung von (3) für alle  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Auch  $y(t) = e^{j\omega t}$  ist Lösung von (3), denn es gilt  $y'(t) = j\omega e^{j\omega t}, y''(t) = -\omega^2 e^{j\omega t}$  und damit

$$y'' + \omega^2y = -\omega^2 e^{j\omega t} + \omega^2 e^{j\omega t} = 0.$$

Nach obigen Satz sind dann auch  $\operatorname{Re} y = \cos \omega t, \operatorname{Im} y = \sin \omega t$  Lösungen von (3).

**Definition:** Die Lösungen  $y_1, y_2, \dots, y_n$  von (2) heißen **linear unabhängig**, falls aus

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n = 0$$

folgt, dass gilt  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ . Andernfalls heißen sie **linear abhängig**.



**Beispiel:**

Die allgemeine Lösung von (3) lautet:  $y = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

### 3.3.2 Lösung der homogenen DGL

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (2)$$

Ansatz zur Lösung von (2):  $y(x) = e^{\lambda x}$  Ziel ist es,  $\lambda$  zu bestimmen

$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$ ,  $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ , ...,  $y^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}$  eingesetzt in (2) liefert:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1} \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0 \quad | \cdot e^{-\lambda x}$$

bzw. die **charakteristische Gleichung**

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (4)$$

Ist  $\lambda_0$  Lösung von (4), so ist  $e^{\lambda_0 x}$  Lösung von (2).

#### 3.3.2.1 Lineare DGLn 2. Ordnung

Für die homogene DGL 2. Ordnung

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (2a)$$

lautet die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (4a)$$

Diese besitzt die Lösungen  $\lambda_{1/2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ ;  
 $e^{\lambda_1 x}$ ,  $e^{\lambda_2 x}$  sind dann Lösungen von (2a).

Je nach Vorzeichen der Diskriminante  $D = a^2 - 4b$  sind drei Fälle zu unterscheiden:

- $D > 0$ :  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

Also bilden  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ ,  $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$  ein Fundamentalsystem der DGL (2a)

Die allgemeine Lösung ergibt sich als  $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**Beispiel:**

- $D = 0$ :  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -a/2$ , das ergibt  $y_1 = y_2 = e^{-a/2x}$ .

Lösungsansatz:  $y(x) = K(x)e^{-a/2x}$  Ziel: Bestimmung von  $K(x)$

$$y'(x) = K'(x)e^{-a/2x} + K(x)(-a/2)e^{-a/2x} = [K'(x) - a/2 K(x)] \cdot e^{-a/2x}$$

$$y''(x) = [K''(x) - a/2 K'(x)] \cdot e^{-a/2x} + [K'(x) - a/2 K(x)] (-a/2)e^{-a/2x} \\ = [K''(x) - a K'(x) + a^2/4 K(x)] \cdot e^{-a/2x}$$

Einsetzen in (2a) liefert:

$$[K''(x) - a K'(x) + a^2/4 K(x) + aK'(x) - a^2/2 K(x) + bK(x)] \cdot e^{-a/2x} = 0$$

$$[K''(x) - 1/4 \underbrace{(a^2 - 4b)}_{=D=0} K(x)] \cdot e^{-a/2x} = 0 \quad | \cdot e^{a/2x}$$

$$\Rightarrow K''(x) = 0 \Rightarrow K(x) = c_1x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}$$

Damit haben wir zu der Lösung  $e^{-a/2x}$  die Lösung  $xe^{-a/2x}$  hinzuerhalten.

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{-a/2x} & xe^{-a/2x} \\ -a/2 e^{-a/2x} & e^{-a/2x} - a/2xe^{-a/2x} \end{vmatrix} = e^{-ax} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x \\ -a/2 & 1 - a/2x \end{vmatrix} \\ = e^{-ax} \neq 0$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der DGL:  $y(x) = (c_1x + c_2)e^{-a/2x}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ .

### Beispiel:

- $D < 0$ : Es gibt zwei konjugiert-komplexe Lösungen  $\lambda_{1/2} = \alpha \pm \omega j$ .

Die Lösungen  $\tilde{y}_{1/2} = e^{\lambda_{1/2}x}$  der DGL bilden ein (komplexes) Fundamentalsystem der DGL (Nachweis mit Hilfe der Wronski-Determinante).

Ziel: reelles Fundamentalsystem

$$y(x) = c_1\tilde{y}_1(x) + c_2\tilde{y}_2(x) = c_1e^{(\alpha+\omega j)x} + c_2e^{(\alpha-\omega j)x} = e^{\alpha x} [c_1e^{\omega jx} + c_2e^{-\omega jx}] \\ = e^{\alpha x} [c_1 \cos \omega x + c_1j \sin \omega x + c_2 \cos \omega x - c_2j \sin \omega x]$$

$$= e^{\alpha x} \left[ \underbrace{(c_1 + c_2)}_{=:A_1} \cos \omega x + j \underbrace{(c_1 - c_2)}_{=:A_2} \sin \omega x \right] = e^{\alpha x} [A_1 \cos \omega x + jA_2 \sin \omega x]$$

Satz  $\xrightarrow{\text{aus 3.3.1}}$   $y_1(x) = e^{\alpha x} \sin \omega x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \omega x$

sind (reelle) Lösungen, ja, sie bilden sogar ein (reelles) Fundamentalsystem der DGL (Nachweis mit Hilfe der Wronski-Determinante).

**Beispiel:**

**Zusammenfassung:**

DGL:  $y'' + ay' + by = 0$

char. Glg.:  $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Lösungen der char. Gleichung	Fundamentalsystem	allgemeine Lösung ( $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ )
1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$	$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbf{R}$	$y_1(x) = e^{\lambda x}$ $y_2(x) = x e^{\lambda x}$	$(c_1 x + c_2) e^{\lambda x}$
3. $\lambda_{1/2} = \alpha \pm j\omega$	$y_1(x) = e^{\alpha x} \sin \omega x$ $y_2(x) = e^{\alpha x} \cos \omega x$	$e^{\alpha x} (c_1 \sin \omega x + c_2 \cos \omega x)$

**3.3.2.2 Lineare DGLen höherer Ordnung**

Die linke Seite der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{4}$$

bildet das sog. **charakteristische Polynom**  $p(\lambda)$ .

**a) Alle Lösungen von (4) sind reell und verschieden.**

Die reellen Zahlen  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ , seien die paarweise verschiedenen Lösungen von (4) und  $y_i(x) = e^{\lambda_i x}, i = 1, \dots, n$ , die zugehörigen Lösungen von (2). Dann ist

$$y(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x}$$

ebenfalls Lösung von (2). Um zu zeigen, dass hierdurch die allgemeine Lösung von (2) gegeben ist, ist zu zeigen, dass die Wronski-Determinante von  $y_1, \dots, y_n$  nicht verschwindet.

$$\begin{aligned}
 W[y_1, \dots, y_n; x] &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} \\
 &= e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x} \cdot \dots \cdot e^{\lambda_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$



Die rechts stehende Determinante ist die sog. *Vandermonde-Determinante* (s. Skriptum zur Mathematik1 von Frau Prof. Preissler), die nicht verschwindet, da nach Voraussetzung alle  $\lambda_i$  verschieden sind.

Damit bilden die Funktionen  $e^{\lambda_i x}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ein Fundamentalsystem der DGL (2).

**b) Alle Lösungen von (4) sind verschieden, unter ihnen gibt es komplexe.**

In diesem Fall gelten die unter a) angestellten Überlegungen nach wie vor, auch wenn einige der Lösungen komplex sind. Denn für das Verschwinden der Wronski-Determinante haben wir nur von der Verschiedenheit der Lösungen, nicht aber von der Tatsache, dass die Lösungen sämtlich reell sind, Gebrauch gemacht. Ebenso können wir die Konstanten  $c_i$  in der Darstellung einer beliebigen Lösung  $y$  als komplexe Zahlen ansetzen, ohne dass  $y$  den Charakter einer Lösung von (2) verliert. Von den  $n$  Lösungen von (4) seien  $r$  reell und  $2s$  je zu Paaren konjugiert komplex. O.E. seien diese folgendermaßen nummeriert ( $r + 2s = n$ )

$$\underbrace{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r}_{\in \mathbb{R}}, \mu_1 \pm jv_1, \mu_2 \pm jv_2, \dots, \mu_s \pm jv_s.$$

Die im Fall  $D < 0$  im § 3.3.2.1 angestellten Überlegungen liefern die linear unabhängigen Lösungen

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_r x}, \quad e^{\mu_1 x} \cos v_1 x, \dots, e^{\mu_s x} \cos v_s x, \\ e^{\mu_1 x} \sin v_1 x, \dots, e^{\mu_s x} \sin v_s x.$$

**c) Unter den Nullstellen des charakteristischen Polynoms gibt es mehrfache Nullstellen.**

Es habe  $\lambda_1$  die Vielfachheit  $k$ , d.h.

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^k q(\lambda) \quad \text{mit } q(\lambda_1) \neq 0.$$

Dann sind

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$$

linear unabhängige Lösungen von (2).

Dies liefert den folgenden Beitrag von  $\lambda_1$  zu der allgemeinen Lösung von (2):

$$\lambda_1 \text{ ist reell: } (c_0 + c_1 x + \dots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{\lambda_1 x}$$

$$\lambda_1 \text{ ist komplex: } \lambda_1 = \mu_1 + jv_1$$

$$(c_0 + c_1 x + \dots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{\mu_1 x} \cos v_1 x + (d_0 + d_1 x + \dots + d_{k-1} x^{k-1}) e^{\mu_1 x} \sin v_1 x.$$

Bezüglich der formal etwas aufwendigen Beweise wird auf die entsprechende Literatur verwiesen.

### 3.3.3 Lösung der inhomogenen DGL

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = g(x) \quad (1)$$

**Satz:** Die allgemeine Lösung  $y$  von (1) lässt sich darstellen als  $y = y_0 + y_p$ , wobei  $y_0$  die allgemeine Lösung von (1<sub>h</sub>) und  $y_p$  eine partikuläre Lösung von (1) ist.

*Beweis:* Wortwörtlich wie in § 3.2.5

#### Lösungsansätze für die partikuläre Lösung

Fall 1:

$g$  ist ein Polynom vom Grad  $m$

$$m = 2: y'' + ay' + by = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

Fall  $b \neq 0$ : Ansatz:  $y_p(x) = c_2x^2 + c_1x + c_0$

Ziel:  $c_0, c_1, c_2$  zu bestimmen

$$y'_p = 2c_2x + c_1, \quad y''_p = 2c_2,$$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$2c_2 + a(2c_2x + c_1) + b(c_2x^2 + c_1x + c_0) = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$bc_2 = b_2 \Rightarrow c_2 = b_2/b$$

$$2ac_2 + bc_1 = b_1 \Rightarrow c_1 = (b_1 - 2ac_2)/b$$

$$2c_2 + ac_1 + bc_0 = b_0 \Rightarrow c_0 = (b_0 - 2c_2 - ac_1)/b$$

Da  $b \neq 0$  gilt, sind die Gleichungen eindeutig nach  $c_0, c_1, c_2$  auflösbar.

Fall  $b = 0, a \neq 0$ : Ansatz:  $y_p = c_2x^3 + c_1x^2 + c_0x$

$$y'_p = 3c_2x^2 + 2c_1x + c_0, \quad y''_p = 6c_2x + 2c_1$$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$6c_2x + 2c_1 + a(3c_2x^2 + 2c_1x + c_0) = b_2x^2 + b_1x + b_0$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$3ac_2 = b_2 \Rightarrow c_2 = b_2/(3a)$$

$$6c_2 + 2ac_1 = b_1 \Rightarrow c_1 = (b_1 - 6c_2)/(2a)$$

$$2c_1 + ac_0 = b_0 \Rightarrow c_0 = (b_0 - 2c_1)/a$$

Da  $a \neq 0$  gilt, sind die Gleichungen eindeutig nach  $c_0, c_1, c_2$  auflösbar.

3 Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGLn)

Störfunktion $g$	Lösungsansatz $y_p$
1. Polynom vom Grade $m$	$y_p = \begin{cases} Q_m(x) & \text{für } b \neq 0 \\ x \cdot Q_m(x) & \text{für } a \neq 0, b = 0 \end{cases}$ $Q_m$ : Polynom vom Maxgrad $m$ Parameter: Koeffizienten des Polynoms $Q_m$
2. Exponentialfunktion $g(x) = e^{cx}$	(1) $c$ ist <i>keine</i> Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot e^{cx}$ (2) $c$ ist eine <i>einfache</i> Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = Ax \cdot e^{cx}$ (3) $c$ ist eine <i>doppelte</i> Nullstelle des charakteristischen Polynoms: $y_p = Ax^2 \cdot e^{cx}$ Parameter jeweils: $A$
3. Sinusfunktion $g(x) = \sin \beta x$ oder Kosinusfunktion $g(x) = \cos \beta x$	(1) $j\beta$ ist <i>keine</i> Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = A \cdot \sin \beta x + B \cdot \cos \beta x$ (2) $j\beta$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = x(A \cdot \sin \beta x + B \cdot \cos \beta x)$ Parameter jeweils: $A, B$
4. $g(x) = P_m(x) \cdot e^{cx} \cdot \sin \beta x$ oder $g(x) = P_m(x) \cdot e^{cx} \cdot \cos \beta x$	(1) $c + j\beta$ ist <i>keine</i> Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = e^{cx}(Q_m(x) \cdot \sin \beta x + R_m(x) \cdot \cos \beta x)$ (2) $c + j\beta$ ist eine Lösung der charakteristischen Gleichung: $y_p = x e^{cx}(Q_m(x) \cdot \sin \beta x + R_m(x) \cdot \cos \beta x)$ $Q_m, R_m$ : Polynome vom Maxgrad $m$ Parameter: Koeffizienten der Polynome $Q_m$ und $R_m$

Tab. Lösungsansätze für DGL  $y'' + ay' + by = g(x)$

**Bemerkung zu den Lösungsansätzen:**

Setzt sich die Störfunktion additiv aus mehreren Gliedern zusammen, so erhält man den Lösungsansatz für  $y_p$  als Summe der Lösungsansätze für die einzelnen Störglieder.

Es gilt nämlich der folgende

**Satz:** Ist  $u$  bzw.  $v$  Lösung von

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = g_1(x)$$

bzw.

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = g_2(x),$$

so ist  $u + v$  Lösung von

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = g_1(x) + g_2(x).$$

*Beweis:*

$u^{(n)}$	$+ a_{n-1}u^{(n-1)}$	$+ \dots$	$+ a_1u'$	$+ a_0u$	$= g_1$	
$v^{(n)}$	$+ a_{n-1}v^{(n-1)}$	$+ \dots$	$+ a_1v'$	$+ a_0v$	$= g_2$	$+$
$u^{(n)} + v^{(n)}$	$+ a_{n-1}(u^{(n-1)} + v^{(n-1)})$	$+ \dots$	$+ a_1(u' + v')$	$+ a_0(u + v)$	$= g_1 + g_2$	
$(u + v)^{(n)}$	$+ a_{n-1}(u + v)^{(n-1)}$	$+ \dots$	$+ a_1(u + v)'$	$+ a_0(u + v)$	$= g_1 + g_2$	

### 3.4 Systeme von Differentialgleichungen

Die folgenden Gleichungen bilden ein System von  $n$  DGLn 1. Ordnung für die Funktionen  $y_1, y_2, \dots, y_n$

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \\ y_2' &= f_2(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)). \end{aligned}$$

Eine DGL  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

lässt sich darstellen als ein System von  $n$  DGLn 1. Ordnung:

Die Substitutionen

$$\begin{aligned} y_1(x) &:= y(x) \\ y_2(x) &:= y'(x) = y_1'(x) \\ y_3(x) &:= y''(x) = y_2'(x) \\ &\vdots \\ y_{n-1}(x) &:= y^{(n-2)}(x) = y_{n-2}'(x) \\ y_n(x) &:= y^{(n-1)}(x) = y_{n-1}'(x) \end{aligned}$$

sowie  $y_n'(x) = y^{(n)}(x) = f(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$

liefern das folgende System von DGLn für die Funktionen  $y_1$  bis  $y_n$

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= y_3(x) \\ &\vdots \\ y_{n-2}'(x) &= y_{n-1}(x) \\ y_{n-1}'(x) &= y_n(x) \\ y_n'(x) &= f(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)). \end{aligned}$$

## 4 Fourier-Transformation

Diese Einführung basiert auf

G. Glatz, H. Grieb, E. Hohloch, H. Kümmerer, R. Mohr

Fourier-Analysis

Brücken zur Mathematik, Bd. 7

Cornelsen Verlag, Berlin, 1996

### 4.1 Spektraldichte

Es sei  $f$  periodisch mit der Periode  $T$  und  $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$ . Es gelte  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$  mit

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Annahme:  $c_k \in \mathbb{R}$ . Wir setzen

$$\Delta\omega := \omega_0$$

$$\omega_k := k\omega_0 = k\Delta\omega.$$

$$\text{Dann gilt } \omega_0 = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{und damit } \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}.$$

Wir betrachten das sog. „normierte Spektrum“

$$c_k T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-j\omega_k t} dt$$
$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k T) e^{j\omega_k t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k T) e^{j\omega_k t} \Delta\omega$$

**Idee:** Ausgehend von einer periodischen Funktion mit der Periode  $T$ , erhält man durch den Grenzübergang  $T \rightarrow \infty$ , d.h.  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , den Übergang zu der Spektraldarstellung einer nicht-periodischen Funktion.

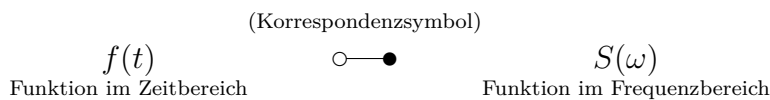
$$\begin{array}{ccc}
 \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\omega_k t} dt}_{c_k T} & \xrightarrow{T \rightarrow \infty} & \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt}_{S(\omega)} \\
 \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k T) e^{j\omega_k t} \Delta\omega}_{s(t)} & \longrightarrow & \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega}_{=f(t)} \\
 & & \text{„Umkehrformel“}
 \end{array}$$

**Definition:**

Zu einer gegebenen Zeitfunktion  $f$  heißt

$$S(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

**Spektraldichte** der Funktion  $f$ ; das auftretende Integral heißt **Fourier-Integral**.



Die Zuordnung  $f \mapsto S$  heißt **Fourier-Transformation**.

**Analogie:**

- periodische Funktion  $\leftrightarrow$  diskretes Spektrum  $\{A_k, \varphi_k\}$  bzw.  $\{c_k\}$
- aperiodische Funktion  $\leftrightarrow$  kontinuierliches Spektrum  $S(\omega)$

**Beispiel** (Spektrum eines Rechteckimpulses):

Impulsdauer  $T_i = 2T_1$

Periode  $T = 2T_0$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq T_1 \\ 0 & \text{für } T_1 < |t| \leq T_0 \end{cases}$$

$$f(t + T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{T_0}$$

Fourier-Koeffizienten:

$$c_0 = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_1}^{T_1} f(t) dt = \frac{2T_1}{2T_0} = \frac{T_1}{T_0}$$

$$c_k = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2T_0} \left\{ \int_{-T_1}^{T_1} \cos k\omega_0 t dt - j \overbrace{\int_{-T_1}^{T_1} \sin k\omega_0 t dt}^{=0} \right\}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_1} \cos k\omega_0 t dt = \frac{1}{T_0 k \omega_0} \sin k\omega_0 T_1 = \frac{1}{T_0 k \frac{\pi}{T_0}} \sin k \frac{T_1}{T_0} \pi = \frac{1}{k\pi} \sin k \frac{T_1}{T_0} \pi$$

Spektrum für verschiedene Quotienten  $n = \frac{T}{T_i} = \frac{T_0}{T_1}$ :

Im Folgenden sei  $T_1$  fest und  $T$  variiert.

$$c_0 = \frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{n}; \quad c_k = \frac{1}{k\pi} \sin(k\pi \frac{1}{n})$$

normiertes Spektrum: Mit  $\omega_k = k\omega_0$  und  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  erhält man für  $k \neq 0$

$$c_k T = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{k\pi} \sin(\omega_k T_1) = 2 \frac{\sin(\omega_k T_1)}{\omega_k} = 2T_1 \frac{\sin(\omega_k T_1)}{\omega_k T_1}$$

Setzt man  $u = \omega_k T_1$ , so besitzen alle Spektrallinien die Hüllkurve  $\tilde{F}(u) = 2T_1 \frac{\sin u}{u}$  mit den Nullstellen  $u = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$



$$\{c_k T\} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \tilde{F}(u) = 2T_1 \frac{\sin u}{u}$$

$S(\omega) = \tilde{F}(\omega T_1)$  ist die Spektraldichte (des Rechteckimpulses).

Berechnung der Spektraldichte des Rechteckimpulses mit Hilfe der Definition:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq T_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für  $\omega \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \left. \frac{-e^{-j\omega t}}{j\omega} \right|_{-T_1}^{T_1} \\ &= -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1}) = \frac{2}{\omega} \underbrace{\frac{e^{j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}}{2j}}_{\sin \omega T_1} \\ &= 2T_1 \frac{\sin \omega T_1}{\omega T_1}. \end{aligned}$$

Sinus cardinalis

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{für } t \neq 0 \\ 1 & \text{für } t = 0 \end{cases}$$

Achtung! Zuweilen findet man auch die Definition  $\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ .

## 4.2 Vorbereitungen

**Bemerkung:** Die graphischen Veranschaulichungen sind vom Leser einzutragen.

### 4.2.1 Einheitssprungfunktion

**Definition** (Einheitssprungfunktion, Heaviside-Funktion):

$$\sigma(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

**Beispiel 1:**

Rechteckimpuls:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -T \leq t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(t) = \sigma(t + T) - \sigma(t - T)$$

$$t + T \geq 0 \Leftrightarrow t \geq -T$$

$$t - T \geq 0 \Leftrightarrow t \geq T$$

**Beispiel 2:**

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } -T \leq t < 0 \\ -1 & \text{für } 0 \leq t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(t) = \sigma(t + T) - 2\sigma(t) + \sigma(t - T)$$

**Beispiel 3:**

$$f(t) = \begin{cases} m(t - a) & \text{für } a \leq t \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(t) = m(t - a)\sigma(t - a)$$

### 4.2.2 Einheitsimpuls

$$d_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} [\sigma(t) - \sigma(t - \varepsilon)]$$

$$\text{Es gilt: } \int_{-\infty}^{\infty} d_\varepsilon(t) dt = 1.$$

**Definition** (Einheitsimpuls, Dirac-Impuls, Dirac-Stoß):

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\sigma(t) - \sigma(t - \varepsilon)]$$

$\delta$  ist eine verallgemeinerte Funktion (Distribution)

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{falls } t = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$\delta(t)$  wird durch einen nach oben gerichteten Pfeil der Länge 1 dargestellt.

Der Einheitsimpuls an der Stelle  $t_0$  wird beschrieben durch  $\delta(t-t_0)$ .

**Eigenschaften von  $\delta$ :**

Es gilt  $\delta(-t) = \delta(t)$ , d.h.  $\delta$  ist gerade.

Ausblendeigenschaft:  $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$

Insbesondere gilt für  $t_0 = 0$ :  $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

**Beispiel:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos t \delta(t + \frac{\pi}{2})dt = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$$

**Zusammenhang zwischen  $\sigma$  und  $\delta$ :**

**Definition:**

Die Einheitssprungfunktion  $\sigma$  lässt sich approximieren durch die Rampenfunktion  $s_\varepsilon$ .

$$s_\varepsilon(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{t}{\varepsilon} & \text{für } 0 \leq t < \varepsilon \\ 1 & \text{für } \varepsilon \leq t \end{cases}$$

Damit gilt:

$$\delta(t) = \dot{\sigma}(t)$$

**Beispiel** (Dreieckimpuls):

$$u(t) = \left(1 + \frac{t}{T}\right) [\sigma(t+T) - \sigma(t)] + \left(1 - \frac{t}{T}\right) [\sigma(t) - \sigma(t-T)]$$

Formales Differenzieren liefert:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \frac{du}{dt} = \frac{1}{T} [\sigma(t+T) - \sigma(t)] + \left(1 + \frac{t}{T}\right) [\delta(t+T) - \delta(t)] \\ &\quad - \frac{1}{T} [\sigma(t) - \sigma(t-T)] + \left(1 - \frac{t}{T}\right) [\delta(t) - \delta(t-T)] \\ &= \frac{1}{T} [\sigma(t+T) - 2\sigma(t) + \sigma(t-T)] + \delta(t+T) - \delta(t-T) \\ &\quad + \frac{1}{T} \left[ \underbrace{t\delta(t+T)}_{-T\delta(t+T)} - \underbrace{2t\delta(t)}_{=0\delta(t)} + \underbrace{t\delta(t-T)}_{T\delta(t-T)} \right] \\ &\quad \text{(Ausblendeigenschaft)} \\ \dot{u}(t) &= \frac{1}{T} [\sigma(t+T) - 2\sigma(t) + \sigma(t-T)] \end{aligned}$$

siehe Beispiel 2 in § 4.2.1. Ferner gilt

$$\ddot{u}(t) = \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{T} [\delta(t+T) - 2\delta(t) + \delta(t-T)].$$

### 4.2.3 Faltung

**Definition:**

Unter der Faltung der beiden Funktionen  $f_1, f_2$  versteht man die Operation  $f_1 * f_2$  definiert durch

$$f_1 * f_2(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$$

**Satz:**

Das Faltungsprodukt ist kommutativ, d.h. es gilt

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} f_2 * f_1(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(u) f_1(t - u) du \stackrel{\text{Subst: } \tau=t-u}{\underset{du=-d\tau}{=}} - \int_{\infty}^{-\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = f_1 * f_2(t) \end{aligned}$$

□

**Satz (o.B.):**

Die Faltung ist assoziativ und distributiv bezüglich der Addition, d.h. es gilt:

$$\begin{aligned} f_1 * (f_2 * f_3) &= (f_1 * f_2) * f_3 \\ f * (g_1 + g_2) &= f * g_1 + f * g_2 \end{aligned}$$

**Beispiel 1:**

$$\begin{aligned} f_1(t) = f_2(t) = f(t) &= e^{-t} \cdot \sigma(t) \\ f * f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) f(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \sigma(\tau) e^{-(t-\tau)} \sigma(t - \tau) d\tau \\ &= \sigma(t) \int_0^t e^{-\tau} e^{-(t-\tau)} d\tau = \sigma(t) e^{-t} \int_0^t 1 d\tau = t e^{-t} \sigma(t) \end{aligned}$$





**Definition** (Fourier-Transformation):

Es sei  $s$  eine auf  $\mathbb{R}$  definierte reellwertige Funktion. Existiert das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt$  für alle  $f \in \mathbb{R}$ , so wird hierdurch auf  $\mathbb{R}$  eine Funktion  $S$  mit

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

definiert.  $S$  heißt die **Fourier-Transformierte** zu  $s$ . Die hierdurch gegebene Zuordnung  $s(t) \rightarrow S(f)$  heißt **Fourier-Transformation**.

**Bemerkungen:**

1. Die Fourier-Transformation ist nicht eindeutig, denn sind  $s_1$  und  $s_2$  auf  $\mathbb{R}$  definierte reellwertige Funktionen, deren Funktionswerte sich nur an endlich vielen Stellen voneinander unterscheiden, so besitzen doch beide die gleiche Fourier-Transformierte, da sich der Wert eines Integrals nicht ändert, wenn man den Integranden an endlich vielen Stellen abändert.
2. Nicht für jede auf  $\mathbb{R}$  definierte Funktion existiert das Fourier-Integral. Als Beispiel wählen wir  $s(t) = 1 \forall t \in \mathbb{R}$ . Um die Frage der Konvergenz des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{zu entscheiden, betrachten wir}$$

$$\int_0^a e^{-j2\pi ft} dt = -\frac{1}{j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_0^a.$$

Der Grenzwert für  $a \rightarrow \infty$  existiert nicht, da  $e^{-j2\pi fa} = \cos 2\pi fa - j \sin 2\pi fa$  für  $a \rightarrow \infty$  unbestimmt divergent ist.

**Satz:**

Ist die Funktion  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  *absolut integrierbar*, d.h. gilt  $\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$ , dann besitzt  $s$  eine Fourier-Transformierte, welche überdies beschränkt ist.

*Beweis:* Für alle  $f \in \mathbb{R}$  gilt

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)e^{-j2\pi ft}| dt \underbrace{=}_{\substack{|e^{-j2\pi ft}|=1 \\ \forall t \in \mathbb{R}}} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < \infty$$

□

### 4.3.2 Umkehrformel

**Satz** (o.B.):

Die Funktion  $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei absolut integrierbar mit der Eigenschaft, dass auf jedem beschränkten Intervall sowohl  $s$  als auch  $s'$  bis auf endlich viele Sprungstellen stetig sind.

Es gelte für alle  $t_0 \in \mathbb{R}$ :  $s(t_0) = \frac{1}{2} \left( \lim_{t \rightarrow t_0^-} s(t) + \lim_{t \rightarrow t_0^+} s(t) \right)$ .

Dann gilt für alle  $t \in \mathbb{R}$ :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft} df.$$

**Bemerkung:** Das Integral in der Umkehrformel ist als der sogenannte *Cauchysche Hauptwert* zu verstehen:

$\int_{-\infty}^{\infty} \dots df = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \dots df$ , d.h. die Grenzübergänge gegen  $\pm\infty$  sind in der gleiche Weise vorzunehmen.

**Definition:**

Die Zeitfunktion  $s(t)$  und die Frequenzfunktion  $S(f)$  bilden ein

**Fourier-Transformationspaar**, wenn sie den folgenden Gleichungen genügen:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)e^{j2\pi ft} df.$$

Bezeichnung:  $s(t) \circ \text{---} \bullet S(f)$   
 $s$  heißt *Original-/Oberfunktion*  
 $S$  heißt *Bild-/Unterfunktion*

### 4.3.3 Darstellungen der Spektraldichte

Aufspalten in Real- und Imaginärteil:

Mit  $e^{-j2\pi ft} = \cos 2\pi ft - j \sin 2\pi ft$  folgt

$$\begin{aligned}
 S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) [\cos 2\pi ft - j \sin 2\pi ft] dt \\
 &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos 2\pi ft dt}_{R(f)} + j \left( \underbrace{- \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin 2\pi ft dt}_{I(f)} \right) \\
 &\quad \text{Fourier-Cosinus-Transformation} \qquad \text{Fourier-Sinus-Transformation}
 \end{aligned}$$

Kartesische Darstellung:  $S(f) = R(f) + jI(f)$

$R(f), I(f)$  sind reellwertig

$R$  ist gerade:  $R(-f) = R(f)$

$I$  ist ungerade:  $I(-f) = -I(f)$

Ferner gilt:

$$s(t) \text{ gerade} \Rightarrow S(f) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos 2\pi ft dt$$

$$s(t) \text{ ungerade} \Rightarrow S(f) = -2j \int_0^{\infty} s(t) \sin 2\pi ft dt$$

### Darstellung in der Exponentialform

$$S(f) = |S(f)| e^{j\varphi(f)}$$

$$|S(f)| = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)}$$

Betrag (Amplitude)

$$\varphi(f) = \arctan \frac{I(f)}{R(f)}$$

Argument(Phase)

$|S(f)|$  und  $\varphi(f)$  sind reellwertig

$|S(f)|$  ist gerade

$\varphi(f)$  ist ungerade

### Beispiel:

$$s(t) = e^{-\alpha t} \cdot \sigma(t), \quad 0 < \alpha$$

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} dt = -\frac{1}{\alpha + j2\pi f} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{-e^{-\alpha t}}{\alpha + j2\pi f} [\cos 2\pi f t - j \sin 2\pi f t] \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{-1}{\alpha + j2\pi f} \left[ \underbrace{\lim_{u \rightarrow \infty} \{ e^{-\alpha u} [\cos 2\pi f u - j \sin 2\pi f u] \}}_{=0} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \cdot \frac{\alpha - j2\pi f}{\alpha - j2\pi f} = \underbrace{\frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}_{R(f)} + j \underbrace{\frac{-2\pi f}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}_{I(f)} \end{aligned}$$

$$e^{-\alpha t} \sigma(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{\alpha - j2\pi f}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

$$|S(f)| = \sqrt{\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)^2} + \frac{4\pi^2 f^2}{(\alpha^2 + 4\pi^2 f^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}}$$

$$\varphi(f) = \arctan \left( -\frac{2\pi f}{\alpha} \right) = -\arctan \frac{2\pi f}{\alpha}$$

## 4.4 Eigenschaften der Fourier-Transformation

**Satz** (Additionssatz):

$$\mathcal{F}\{\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2\} = \alpha_1 \mathcal{F}\{s_1\} + \alpha_2 \mathcal{F}\{s_2\} \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

**Bemerkung:** Gilt für  $\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i$  entsprechend;  $\mathcal{F}^{-1}$  ist ebenfalls linear.

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha_1 s_1(t) + \alpha_2 s_2(t)) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \alpha_1 \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j2\pi ft} dt + \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \alpha_1 \mathcal{F}\{s_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{F}\{s_2(t)\}. \end{aligned}$$

□

**Satz** (Vertauschungssatz):

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} \quad \Rightarrow \quad s(-f) = \mathcal{F}\{S(t)\}$$

**Beispiel** (vgl. Beispiel in § 4.1):

$$r(t) = \sigma(t+T) - \sigma(t-T) \quad \circ \rightarrow \bullet \quad \begin{cases} 2T \frac{\sin 2\pi f T}{2\pi f T} & f \neq 0 \\ 2T & f = 0 \end{cases}$$

$$R(t) = \begin{cases} 2T \frac{\sin(2\pi t T)}{2\pi t T} & \text{falls } t \neq 0 \\ 2T & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\{R(t)\} = r(-f) = \sigma(-f+T) - \sigma(-f-T)$$

**Satz:**

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} \Rightarrow S(-f) = \mathcal{F}\{s(-t)\}$$

*Beweis:*  $\int_{-\infty}^{\infty} s(-t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(u)e^{-j2\pi(-f)u} du = S(-f)$  Substitution:  
 $u = -t \Rightarrow du = -dt$  □

**Beispiel** (Fortsetzung):  $s(t) = e^{-\alpha t}\sigma(t)$

$$s(-t) = e^{\alpha t}\sigma(-t) \quad \mathcal{F}\{s(-t)\} = S(-f) = \frac{1}{\alpha - j2\pi f} = \frac{\alpha + j2\pi f}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

$$e^{-\alpha|t|} = \begin{cases} e^{-\alpha t}\sigma(t) + e^{\alpha t}\sigma(-t) & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{e^{-\alpha|t|}\} &= \mathcal{F}\{e^{-\alpha t}\sigma(t)\} + \mathcal{F}\{e^{\alpha t}\sigma(-t)\} \\ &= \frac{1}{\alpha + j2\pi f} + \frac{1}{\alpha - j2\pi f} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \end{aligned}$$

**Satz** (Zeitverschiebungssatz):

$$\mathcal{F}\{s(t - t_0)\} = e^{-j2\pi f t_0} \mathcal{F}\{s(t)\}$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{s(t - t_0)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0) e^{-j2\pi f t} dt && \begin{array}{l} \text{Subst: } u=t-t_0 \\ t=u+t_0 \\ dt=du \end{array} = \int_{-\infty}^{\infty} s(u) e^{-j2\pi f(u+t_0)} du \\ &= e^{-j2\pi f t_0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s(u) e^{-j2\pi f u} du}_{\mathcal{F}\{s(t)\}} \end{aligned}$$

□

**Beispiel:**

$$s(t) = e^{-\alpha t} \sigma(t), \quad S(f) = \frac{1}{\alpha + j2\pi f} \quad (\text{vgl. § 4.3.3})$$

$$\mathcal{F}\{e^{\alpha(t-t_0)} \sigma(t - t_0)\} = \frac{e^{-j2\pi f t_0}}{\alpha + j2\pi f}$$

**Satz** (Frequenzverschiebungssatz):

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} \quad \Rightarrow \quad S(f - f_0) = \mathcal{F}\{s(t) e^{j2\pi f_0 t}\}$$

*Beweis:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = S(f - f_0).$$

□

**Beispiel:**

$$\begin{aligned}
 r(t) = \sigma(t+T) - \sigma(t-T) & \quad \circ \text{---} \bullet \quad \begin{cases} 2T \frac{\sin 2\pi fT}{2\pi fT} & f \neq 0 \\ 2T & f = 0 \end{cases} \\
 r(t)e^{j2\pi f_0 t} & \quad \circ \text{---} \bullet \quad \begin{cases} 2T \frac{\sin 2\pi(f-f_0)T}{2\pi(f-f_0)T} & \text{falls } f \neq f_0 \\ 2T & \text{falls } f = f_0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Anwendung:**

$$\begin{aligned}
 S(f - f_0) &= \mathcal{F} \{s(t)e^{j2\pi f_0 t}\} \\
 S(f + f_0) &= \mathcal{F} \{s(t)e^{-j2\pi f_0 t}\} \\
 S(f - f_0) + S(f + f_0) &= \mathcal{F} \left\{ s(t) \underbrace{(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})}_{2 \cos 2\pi f_0 t} \right\}
 \end{aligned}$$

Damit folgt

$$S(f) = \mathcal{F} \{s(t)\} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(S(f - f_0) + S(f + f_0)) = \mathcal{F} \{s(t) \cos 2\pi f_0 t\}.$$

**Satz** (Ähnlichkeitssatz):

$$S(f) = \mathcal{F} \{s(t)\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} \{s(at)\} = \frac{1}{|a|} S\left(\frac{f}{a}\right) \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

*Beweis:* Siehe Übung. □

**Beispiel:**

$$\begin{aligned}
 r(t) = \sigma(t+T) - \sigma(t-T) & \quad \circ \text{---} \bullet \quad \begin{cases} 2T \frac{\sin(2\pi fT)}{2\pi fT} & f \neq 0 \\ 2T & f = 0 \end{cases} \\
 a = \frac{1}{2} : \quad r\left(\frac{t}{2}\right) = \sigma\left(\frac{t}{2} + T\right) - \sigma\left(\frac{t}{2} - T\right) & \quad \circ \text{---} \bullet \quad \begin{cases} 4T \frac{\sin(4\pi fT)}{4\pi fT} & f \neq 0 \\ 4T & f = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$



**Satz** (Differentiation im Zeitbereich):

$$\underbrace{s(t) \circ \bullet S(f)}_{\text{Fourier-Transformationspaar}} \Rightarrow \frac{d^n s}{dt^n} \circ \bullet (j2\pi f)^n S(f)$$

*Beweis:* Aufgrund der Umkehrformel gilt

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$\dot{s}(t) = \frac{ds}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) j2\pi f e^{j2\pi ft} df \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Umkehrformel}} \dot{s}(t) \circ \bullet j2\pi f S(f)$$

Für die höheren Ableitungen analog. □

**Satz** (Differentiation im Frequenzbereich):

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} \Rightarrow \frac{d^n S}{df^n} = \mathcal{F}\{(-j2\pi t)^n s(t)\}$$

*Beweis:* Durch Differentiation der Definitionsgleichung. □

**Folgerung** (Multiplikationssatz):

$$\left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n S}{df^n} = \mathcal{F}\{t^n s(t)\}$$

**Beispiel:**

$$r(t) = \sigma(t+T) - \sigma(t-T) \circ \bullet \begin{cases} 2T \frac{\sin 2\pi f T}{2\pi f T} & f \neq 0 \\ 2T & f = 0 \end{cases}$$

$$tr(t) \circ \bullet \begin{cases} \frac{j}{2\pi^2 f^2} [2\pi f T \cos 2\pi f T - \sin 2\pi f T] & f \neq 0 \\ 0 & f = 0 \end{cases}$$

**Satz (1. Faltungssatz):**

$$S_i(f) = \mathcal{F}\{s_i(t)\}, \quad i = 1, 2 \quad \Rightarrow \quad S_1 \cdot S_2 = \mathcal{F}\{s_1 * s_2\}$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{s_1 * s_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau \right) e^{-j2\pi ft} dt \\ &\stackrel{\substack{= \\ \text{Vertauschen der} \\ \text{Integrationsreihenfolge} \\ \text{ist erlaubt}}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) \left( \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt \right) d\tau \\ &\stackrel{*}{=} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) e^{-j2\pi f\tau} S_2(f) d\tau \\ &= S_2(f) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau}_{S_1(f)} = S_1(f) \cdot S_2(f) \end{aligned}$$

\* Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} s_2(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt \\ \underbrace{\substack{\text{Subst: } u=t-\tau \\ \Rightarrow t=u+\tau \\ du=dt}}_{=} \int_{-\infty}^{\infty} s_2(u) e^{-j2\pi f(u+\tau)} du &= e^{-j2\pi f\tau} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} s_2(u) e^{-j2\pi fu} du}_{S_2(f)} \end{aligned}$$

□

**Beispiel:**

$$s_1(t) = s_2(t) = e^{-\alpha t} \sigma(t)$$

Dann gilt (vgl. § 4.3.3)  $\mathcal{F}\{s(t)\} = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$

und (vgl. § 4.2.3)  $s * s(t) = te^{-\alpha t} \sigma(t)$

und damit  $\mathcal{F}\{te^{-\alpha t} \sigma(t)\} = \frac{1}{(\alpha + j2\pi f)^2}$

**Satz** (2.Faltungssatz):

$$S_i(f) = \mathcal{F}\{s_i(t)\}, \quad i = 1, 2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{s_1 \cdot s_2\} = S_1 * S_2$$

*Beweis:* Analog zum 1. Faltungssatz. □

**Satz** (Integrationsatz):

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j2\pi f} S(f) + \frac{1}{2} S(0) \cdot \delta(f)$$

*Beweis:* Folgt in § 4.5.3 □

**Satz** (Parsevalsche Gleichung):

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df$$

*Beweis:* Wir wählen im 2. Faltungssatz  $s_1 = s_2 =: s$ , dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) e^{-j2\pi f_0 t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) S(f_0 - f) df$$

Speziell für  $f_0 = 0$  ergibt sich:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \cdot S(-f) df$$

Nun gilt (vgl. § 4.3.3):

$$\begin{aligned} S(f) &= R(f) + jI(f) \\ S(-f) &= R(-f) + jI(-f) = R(f) - jI(f) = S^*(f) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S(f) \cdot S(-f) = R^2(f) + I^2(f) = |S(f)|^2$$

□

**Folgerung:**

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 d\omega = \frac{\pi}{2}$$

*Beweis:*

Wir wählen  $r(t) = \sigma(t+1) - \sigma(t-1)$ ; dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} r^2(t) dt = \int_{-1}^1 1 dt = 2$$

Anwendung der Parsevalschen Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R^2(f) df &= \int_{-\infty}^{\infty} r^2(t) dt = 2 \\ &\parallel \\ 4 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin 2\pi f}{2\pi f} \right)^2 df &= \frac{4}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 d\omega \end{aligned}$$

Substitution:  
 $\omega = 2\pi f; \frac{d\omega}{df} = 2\pi$

Beachtet man, dass der Integrand gerade ist, so folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 d\omega = 2 \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 d\omega$$

und damit

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{\sin \omega}{\omega} \right)^2 d\omega = \frac{2 \cdot 2\pi}{4 \cdot 2} = \frac{\pi}{2}$$

□

## 4.5 Weitere Beispiele und Anwendungen

### 4.5.1 Fourier-Transformierte des Einheitsimpulses

Mittels der Ausblendeigenschaft des Einheitsimpulses erhält man

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi 0f} = 1 \quad \boxed{\delta(t) \circ \bullet 1}$$

Mittels Vertauschungssatz folgt:  $\boxed{1 \circ \bullet \delta(-f) = \delta(f)}$

### 4.5.2 Fourier-Transformierte der Einheitssprungfunktion

Konstruktion der Spektraldichte von  $\sigma(t)$  über die Spektraldichte  $\tilde{S}$  der Signum-Funktion  $\text{sgn}(t)$ :

$$\text{sgn}(t) = \sigma(t) - \sigma(-t) \quad \circ \bullet \quad \tilde{S}(f)$$

Verallgemeinerte Ableitung (vgl. § 4.2.2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \text{sgn}(t) &= \delta(t) - (-\delta(-t)) = 2\delta(t) \\ \frac{d}{dt} \text{sgn}(t) &\circ \bullet 2; \end{aligned}$$

andererseits liefert der Differentiationsatz:

$$\frac{d}{dt} \text{sgn}(t) \circ \bullet j2\pi f \tilde{S}(f)$$

Der Vergleich der rechten Seiten ergibt

$$\tilde{S}(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

Die Einheitssprungfunktion  $\sigma$  lässt sich mit Hilfe der Signum-Funktion darstellen:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) + \frac{1}{2} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

Damit folgt:

$$\sigma(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(t)$$

### 4.5.3 Beweis des Integrationsatzes

Faltung der Zeitfunktion  $s(t)$  mit der Einheitssprungfunktion liefert

$$(s * \sigma)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\sigma(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^t s(\tau)d\tau.$$

Anwendung des 1. Faltungssatzes ergibt

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t s(\tau)d\tau \right\} \stackrel{4.5.2}{=} S(f) \left( \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f) \right)$$

$$\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{Ausblendeigenschaft} \\ \text{von } \delta(f)}}{=} \frac{1}{j2\pi f} S(f) + \frac{1}{2} S(0)\delta(f).$$

### 4.5.4 Fourier-Transformierte des Dreieckimpulses

Für die 2. Ableitung von  $s$  gilt nach § 4.2.2

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{1}{T} [\delta(t + T) - 2\delta(t) + \delta(t - T)] \stackrel{\substack{\text{(Zeitverschie-} \\ \text{bungssatz)}}}{\circ \rightarrow \bullet} \frac{1}{T} [e^{j2\pi fT} - 2 + e^{-j2\pi fT}]$$

$$= \frac{1}{T} [e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}]^2$$

$$= \frac{1}{T} [2j \sin \pi f T]^2 = -\frac{4}{T} \sin^2(\pi f T)$$

Andererseits gilt nach dem Differentiationsatz

$$\frac{d^2 s}{dt^2} \quad \circ \text{---} \bullet \quad (j2\pi f)^2 S(f) = -4\pi^2 f^2 \cdot S(f)$$

Durch Vergleich der beiden Bildfunktionen erhält man:

$$S(f) = \begin{cases} T \left( \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} \right)^2 & \text{für } f \neq 0 \\ T & \text{für } f = 0 \end{cases} .$$

#### 4.5.5 Fourier-Transformierte periodischer Funktionen

Mit  $\delta(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad 1$  und  $s(t) \equiv 1 \quad \circ \text{---} \bullet \quad S(f) = \delta(f)$  folgt unter Verwendung des Frequenzverschiebungssatzes:

$$S(f - f_0) = \delta(f - f_0) \quad \bullet \text{---} \circ \quad s(t)e^{j2\pi f_0 t} = e^{j2\pi f_0 t} \\ e^{j2\pi f_0 t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \delta(f - f_0)$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad \circ \text{---} \bullet \quad S(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(f - k f_0)$$

Fourier-Reihe der periodischen Funktion  $s$  mit der Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f_0}$

Die Fourier-Transformierte einer Fourier-Reihe besteht aus Einheitsimpulsen der Intensität  $c_k$  an den Stellen  $k \cdot f_0$ .



Zusammenhang zwischen der Spektraldichte eines Einzelimpulses und den komplexen Fourierkoeffizienten der zugehörigen periodischen Impulsfunktion:

Wir betrachten den Einzelimpuls  $s_0(t)$

$$s_0(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad S_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_0(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Für die komplexen Fourierkoeffizienten der durch periodische Fortsetzung entstehenden Funktion  $s(t)$  gilt

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t) e^{-j2\pi k f_0 t} dt \quad \text{mit} \quad T = \frac{1}{f_0}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0.$$

Der Vergleich der beiden Darstellungen liefert

$$c_k = \frac{1}{T} S_0(k f_0), \quad k \in \mathbb{Z}$$

d.h. die normierten komplexen Fourierkoeffizienten  $\{c_k T\}$  sind die Funktionswerte der Spektraldichte des zugrundeliegenden Einzelimpulses  $s_0$  an den Stellen  $k f_0$ . Damit erhält man für die Fourier-Transformierte der periodischen Impulsfunktion  $s(t)$  die Darstellung

$$S(f) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_0(k f_0) \delta(f - k f_0).$$

**Beispiel:**

$$s_0(t) = \begin{cases} t, & -\pi \leq t < \pi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt (vgl. Beispiel in § 4.4)

$$S_0(f) = \frac{j}{2\pi^2 f^2} \left[ 2\pi^2 f \cos(2\pi^2 f) - \sin(2\pi^2 f) \right].$$

Mit  $T = 2\pi$ , d.h.  $kf_0 = \frac{k}{2\pi}$ , folgt

$$\begin{aligned} S_0(kf_0) &= \frac{2j}{k^2} \left[ k\pi \underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} - \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} \right] \\ &= (-1)^k \frac{2\pi j}{k} \\ c_k &= \frac{1}{T} S_0(kf_0) = (-1)^k \cdot \frac{j}{k}. \end{aligned}$$

## 5 Laplace-Transformation

### 5.1 Herleitung aus der Fourier-Transformation

Um die Laplace-Transformierte aus der Fouriertransformierten herzuleiten, multiplizieren wir die gegebene Zeitfunktion  $s(t)$  mit dem konvergenzerzeugenden Faktor  $e^{-\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$  hinreichend groß gewählt:

$$\tilde{s}(t) = \begin{cases} s(t)e^{-\alpha t} & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\{\tilde{s}(t)\} = \int_0^{\infty} s(t)e^{-\alpha t} e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{\infty} s(t)e^{-(\alpha+j2\pi f)t} dt.$$

Mit  $\omega = 2\pi f$  und  $p = \alpha + j\omega$  folgt

$$\mathcal{F}\{\tilde{s}(t)\} = \int_0^{\infty} s(t)e^{-pt} dt = S(p), \quad p \in \mathbb{C}. \quad (1)$$

Wendet man auf  $S(p) = S(\alpha + j\omega)$  die Fourier-Rücktransformation an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha + j\omega)e^{j2\pi ft} df && \left( \frac{d\omega}{df} = 2\pi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha + j\omega)e^{j\omega t} d\omega && \left| * e^{\alpha t} \right. \\ s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha + j\omega)e^{(\alpha+j\omega)t} d\omega && \begin{array}{l} \text{Subst.: } p=\alpha+j\omega \Rightarrow \frac{dp}{d\omega}=j \\ \omega \rightarrow \pm\infty \Rightarrow p \rightarrow \alpha \pm j\infty \end{array} \\ s(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} S(p)e^{pt} dp && (2) \end{aligned}$$

Die Integration erfolgt dabei in der komplexen Ebene längs einer Parallelen zur imaginären Achse.

In der Praxis führt man die Transformationen (1), (2) mit Hilfe bekannter Korrespondenzen (s. Tabelle) und der Eigenschaften der Laplace-Transformation (s. § 5.3) durch.

## 5.2 Definitionen und Beispiele

Wir werden die Frequenzvariable fortan mit  $s$  statt mit  $p$  bezeichnen (wie auch in anderen Vorlesungen üblich).

Die Transformationsgleichungen (1) und (2) führen zu folgender Definition:

**Definition:**

Die Zeitfunktion  $f(t)$  mit  $f(t) = 0$  für  $t < 0$  und die Frequenzfunktion  $F(s)$  bilden ein **Laplace-Transformationspaar**, wenn sie den folgenden Gleichungen genügen:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s)e^{st} ds.$$

**Bezeichnung:**  $f(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(s)$

Die Funktion  $f(t)$  heißt **Original-/Oberfunktion** und  $F(s)$  **Bild-/Unterfunktion**.

Grundsätzlich gilt  $s \in \mathbb{C}$ ; wir beschränken uns hier auf  $s \in \mathbb{R}$ .

Zu einer gegebenen Funktion  $f(t)$  existiert die **Laplace-Transformierte**

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

nur unter gewissen Voraussetzungen:

Gilt beispielsweise

- 1) In jedem endlichen Intervall besitzt  $f$  nur endlich viele Sprungstellen,
- 2)  $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$  für alle  $0 \leq t$  ( $M, \alpha$  seien Konstanten);

dann existiert

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

für

$$s > \alpha$$

**Beispiele:**

### 5.3 Eigenschaften der Laplace-Transformation

**Satz** (Linearität der Laplace-Transformation):

Für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  gilt

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}.$$

**Anmerkung:** Gilt auch für

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$$

entsprechend;  $\mathcal{L}^{-1}$  ist ebenfalls linear.

*Beweis:* Wie beim Additionssatz der Fourier-Transformation (s. § 4.4).

**Ähnlichkeitssatz:**

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0.$$

*Beweis:* Wie beim Ähnlichkeitssatz der Fourier-Transformation (s. § 4.4).

**1. Verschiebungssatz** (Verschiebung nach rechts):

$$\mathcal{L}\{f(t-T)\sigma(t-T)\} = e^{-sT} F(s) \quad , T > 0.$$

*Beweis:* Mittels der Substitution  $u = t - T$  ähnlich wie beim Zeitverschiebungssatz der Fourier-Transformation (s. § 4.4).

**2. Verschiebungssatz** (Verschiebung nach links):

$$\mathcal{L}\{f(t+T)\sigma(t+T)\} = e^{sT} \left( F(s) - \int_0^T f(t) e^{-st} dt \right).$$

*Beweis:* Mittels der Substitution  $u = t + T$  ähnlich wie beim Zeitverschiebungssatz der Fourier-Transformation (s. § 4.4).

**Dämpfungssatz:**

$$\mathcal{L}\{f(t) e^{-at}\} = F(s+a).$$

**1. Differentiationssatz** (Differentiation im Zeitbereich):

Die Funktion  $f$  sei hinreichend oft differenzierbar und es gelte

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) e^{-st} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) e^{-st} = 0, \dots \quad (*)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= s F(s) - f(0), \\ \mathcal{L}\{f''(t)\} &= s^2 F(s) - f(0)s - f'(0), \\ &\vdots \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n F(s) - f(0) s^{n-1} - f'(0) s^{n-2} - \dots - f^{(n-2)}(0) s - f^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Hat  $f^{(k)}$  eine Sprungstelle bei  $t = 0$ , so ist für  $f^{(k)}(0)$  jeweils der rechtsseitige Grenzwert einzusetzen.

**2. Differentiationssatz** (Differentiation im Frequenzbereich):

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$



**Faltungssatz:** Es gelte  $f_i(t) = 0$  für  $t < 0$  und  $\mathcal{L}\{f_i(t)\} = F_i(s)$ ,  $i = 1, 2$ .  
Dann ist

$$\mathcal{L}\{f_1 * f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s).$$

**Bemerkung:** Nach § 4.2.3 gilt

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \sigma(t) \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

**Integrationsatz:**

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s).$$

**Satz** (Laplace-Transformierte periodischer Funktionen):  
Es sei  $f$  periodisch mit der Periode  $T$ . Dann gilt

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T f(t) e^{-st} dt.$$

## 5.4 Lösung von linearen DGLen mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe der Laplace-Transformation

Gegeben sei eine lineare DGL (mit konstanten Koeffizienten)

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t) = g(t). \quad (1)$$

Unter Anwendung der Linearität der Laplace-Transformation und des 1. Differentiationsatzes ergibt sich

$$\begin{aligned} & s^n Y(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \dots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0) \\ & + a_{n-1} [ s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - s^{n-3}y'(0) - \dots - y^{(n-2)}(0) ] \\ & + \dots + a_1 [ sY(s) - y(0) ] + a_0Y(s) = G(s) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} & \underbrace{[s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0]}_{= p(s) \text{ (charakteristisches Polynom der DGL)}} Y(s) = G(s) \\ & \left. \begin{aligned} & + [s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_1] y(0) \\ & + [s^{n-2} + a_{n-1}s^{n-3} + \dots + a_2] y'(0) \\ & + \dots + [s + a_{n-1}] y^{n-2}(0) + y^{(n-1)}(0) \end{aligned} \right\} =: z(s) \end{aligned}$$

und schließlich die Bildfunktion zu der Lösung von (1) zu

$$Y(s) = \frac{G(s)}{p(s)} + \frac{z(s)}{p(s)}.$$

Diese Bildfunktion ist dann unter Verwendung von Eigenschaften der Laplace-Transformation und bekannter Korrespondenzen in den Zeitbereich zurückzutransformieren. Der Quotient  $\frac{z(s)}{p(s)}$  in der Darstellung der Bildfunktion ist echt gebrochenrational. Ist  $G(s)$  gebrochenrational, so ist auch  $\frac{G(s)}{p(s)}$  und damit  $Y(s)$  gebrochenrational. Bei der Rücktransformation in den Zeitbereich ist häufig die Partialbruchdarstellung des bzw. der Quotienten nützlich.

Löst man das Anfangswertproblem mit Hilfe der Laplace-Transformation, so werden Anfangsbedingungen an der Stelle 0 bei der Anwendung des Differentiationsatzes sofort berücksichtigt. Damit ist diese Methode häufig schneller als die Methode, die in Kap. 3 dargestellt ist. Bei dieser wird zuerst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen

DGL ermittelt und zu dieser eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL addiert, die man mit Hilfe von bekannten Lösungsansätzen gewonnen hat.

Anschließend werden dann aus den Anfangsbedingungen die Integrationskonstanten ermittelt.

Möchte man mit Hilfe der Laplace-Transformation die allgemeine Lösung der DGL bestimmen, so lässt man die Funktionswerte der Lösung und deren Ableitungen an der Stelle 0 in der Darstellung der Lösung stehen.

Sind Anfangsbedingungen an einer Stelle  $t_0 \neq 0$  gegeben, so bestimmt man zunächst die allgemeine Lösung der DGL, in der die Anfangswerte an der Stelle 0 die Rolle von Integrationskonstanten spielen. Aus den Anfangsbedingungen an der Stelle  $t_0$  erhält man Gleichungen, mit deren Hilfe die Anfangswerte an der Stelle 0 und damit die spezielle Lösung des Anfangswertproblems bestimmt werden können.

Vorteilhaft ist die Methode der Laplace-Transformation bei DGLn mit stückweise definierter Störfunktion.

**Beispiel:**

$$y' + 2y = 4, \quad y(0) = 4$$

1. Schritt: Transformation der Differentialgleichung in den Bildbereich

$$\mathcal{L}\{y' + 2y\} = \mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{4\} = 4\mathcal{L}\{1\}$$

Der Differentiationssatz liefert für  $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$

$$sY(s) - y(0) + 2Y(s) = \frac{4}{s} \quad \boxed{1 \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s}}$$

$$(s + 2)Y(s) - 4 = \frac{4}{s}$$

2. Schritt: Lösung der algebraischen Gleichung

$$Y(s) = \frac{\frac{4}{s} + 4}{s + 2} = \frac{4}{s(s + 2)} + \frac{4}{s + 2}$$

3. Schritt: Rücktransformation

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \{Y(s)\}$$

$$= 4\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s+2)} \right\} + 4\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\}$$

$e^{at}$	○—●	$\frac{1}{s-a}$
$\frac{e^{at}-1}{a}$	○—●	$\frac{1}{s(s-a)}$

$$= 4 \left( \frac{e^{-2t}-1}{-2} + e^{-2t} \right) = 2e^{-2t} + 2 = 2(e^{-2t} + 1)$$

## 6 Differentialgeometrie ebener Kurven (\*)

### 6.1 Darstellungsformen ebener Kurven

implizite Darstellung:  $F(x, y) = 0$

explizite Darstellung:  $y = f(x)$

Parameterdarstellung:  $\{x = x(t), y = y(t)\}$

Darstellung mittels Polarkoordinaten:  $r = r(\varphi)$

#### Beispiel: Darstellung eines Ursprungskreises vom Radius R

implizit (kartesische Koordinaten):  $x^2 + y^2 - R^2 = 0$

explizit (kartesische Koordinaten):  $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$

+ für den oberen, - für den unteren Halbkreis

Parameterdarstellung:  $\{x = R \cos t, y = R \sin t, t \in [0, 2\pi)\}$

explizit mittels Polarkoordinaten:  $r(\varphi) = R, \varphi \in [0, 2\pi)$

#### Differentiation von Funktionen in impliziter Darstellung

Vorgehensweise:

1. Differentiation der Gleichung  $F(x, y) = 0$  nach  $x$ , wobei  $y$  als Funktion von  $x$  anzusehen ist. Funktionsterme  $h(y)$  sind dabei nach der Kettenregel zu differenzieren:

$$\frac{dh(y)}{dx} = \frac{dh}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dh}{dy} \cdot y'$$

2. Auflösen der differenzierten Gleichung ergibt  $y'$  in Abhängigkeit von  $x$  und  $y$ :  
 $y' = y'(x, y)$ .
3. Die Steigung  $m_P$  im Kurvenpunkt  $P(x_P, y_P)$  erhält man durch Einsetzen von  $x_P$  und  $y_P$  in die Gleichung für  $y'$ .

**Beispiel:** Anstieg der Kurventangente an den Kreis  $x^2 + y^2 = 25$  im Punkt  $(3, 4)$ .

1. Möglichkeit: Berechnung von  $y'$  in expliziter Form

$$y = \sqrt{25 - x^2}, \quad y' = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$x = 3 : \quad y' = -\frac{3}{4}$$

2. Möglichkeit: Implizite Differentiation

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\Rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

Einsetzen der Punktkoordinaten liefert  $y' = -\frac{3}{4}$ .

## 6.2 Vektorielle Darstellung von Kurven

### Parameterdarstellung einer ebenen bzw. räumlichen Kurve

Betrachtet wird das kartesische Koordinatensystem mit den Basisvektoren  $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}$ . Dann kann eine Kurve  $C$  durch Vektorfunktionen dargestellt werden:

$$\mathbb{R}^2 : \vec{r}(t) = x(t)e^{(1)} + y(t)e^{(2)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbb{R}^3 : \vec{r}(t) = x(t)e^{(1)} + y(t)e^{(2)} + z(t)e^{(3)} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Äquivalente Darstellung der Kurven

$$(1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right\}, \quad (2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\}$$

### Beispiel:

$x = \cos \varphi, \quad y = \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$ , beschreibt einen Kreis der, beginnend in  $(1, 0)$ , im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird.

Bei der Darstellung  $x = \sin \varphi, \quad y = \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$ , wird, beginnend in  $(0, 1)$ , der Kreis im mathematisch negativen Sinn durchlaufen.

**Annahme:**

Die Funktionen  $x, y, z$  seien differenzierbar nach  $t$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Tangentenvektor } \vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} e^{(1)} + \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} e^{(2)} + \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} e^{(3)} \right\} \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} e^{(1)} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} e^{(2)} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} e^{(3)} \\
 &= \frac{dx}{dt} e^{(1)} + \frac{dy}{dt} e^{(2)} + \frac{dz}{dt} e^{(3)}.
 \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}.$$

### 6.3 Ebene Kurven in Parameterdarstellung

#### 6.3.1 Steigung und Krümmung

Gegeben sei die Kurve  $\{x = x(t), y = y(t)\}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
 y' &= \tan \alpha = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \\
 y'' &= \frac{d}{dx} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{(\dot{x})^2} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{1}{(\dot{x})^3} \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

**Satz: (Steigung und Krümmung in Parameterdarstellung)**

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad y'' = \frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \dot{y} \cdot \ddot{x}}{(\dot{x})^3}, \quad k = \frac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$



### 6.3.2 Untersuchung von Kurven in Parameterdarstellung

**Definition: (Geschlossene Kurve):** Ist der zugrundeliegende Parameterbereich ein abgeschlossenes Intervall  $I = [t_1, t_2]$  und gilt  $x(t_1) = x(t_2)$ ,  $y(t_1) = y(t_2)$  und sind  $x$  und  $y$  stetig auf  $I$ , so heißt die Kurve  $\{x = x(t), y = y(t), t \in I\}$  **geschlossen**.

**Definition: (Symmetrie):** Die Kurve  $\{x = x(t), y = y(t), t \in D\}$  ist symmetrisch in dem folgenden Sinne, wenn es zu jedem Parameterwert  $t \in D$  einen Wert  $\tau \in D$  gibt, so dass die Punkte  $P(t)$  und  $P(\tau)$  den folgenden Beziehungen genügen:

1.  $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x(\tau) \\ y(t) = -y(\tau) \end{array} \right\} \Rightarrow$  Symmetrie zur  $x$ -Achse
2.  $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = -x(\tau) \\ y(t) = y(\tau) \end{array} \right\} \Rightarrow$  Symmetrie zur  $y$ -Achse
3.  $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = -x(\tau) \\ y(t) = -y(\tau) \end{array} \right\} \Rightarrow$  Symmetrie zum Ursprung

Für ebene Kurven gilt  $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ .

Wir betrachten hier drei Fälle:

$\dot{y}(t_0) = 0, \dot{x}(t_0) \neq 0$ : waagerechte Tangente in  $P(t_0)$

$\dot{y}(t_0) \neq 0, \dot{x}(t_0) = 0$ : senkrechte Tangente in  $P(t_0)$

$\dot{y}(t_0) = 0, \dot{x}(t_0) = 0$ : in Punkt  $P(t_0)$  ist kein Tangentenvektor definiert,  
 $P(t_0)$  heißt **singulärer Punkt**.

## 6.4 Ebene Kurven in Polarkoordinaten

Wir betrachten die Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  mit

$$r = \overline{0P},$$

$\varphi =$  Winkel zwischen  $\overrightarrow{0P}$  und der positiven reellen Achse.

Ist  $r = \text{const}$ , dann ergibt sich ein Ursprungskreis.

Ist  $\varphi = \text{const}$ , dann ergibt sich eine Ursprungshalbgerade.

### Steigung und Krümmung

Gegeben sei die Gleichung einer Kurve  $r = r(\varphi)$  in Polarkoordinaten.

Die kartesischen Koordinaten erhalten wir durch

$$x = x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi, \quad y = y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi.$$

Bezeichnen wir  $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}$ ,  $\dot{x} = \frac{dx}{d\varphi}$ , ..., so ergibt sich

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi$$

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2\dot{r} \sin \varphi - r \cos \varphi, \quad \ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi$$

### Satz: (Steigung und Krümmung in Polarkoordinaten)

Die Steigung im Kurvenpunkt  $P(r, \varphi)$  ist gegeben durch

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi}{\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi}.$$

Für die Krümmung gilt

$$k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{2\dot{r}^2 - r\ddot{r} + r^2}{(r^2 + \dot{r}^2)^{3/2}}.$$

### Winkel $\alpha$ zwischen der Kurventangente in $P(r, \varphi)$ und der Ursprungshalbgeraden $OP$

Steigung der Ursprungshalbgeraden:  $m_1 = \frac{y}{x} = \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} = \tan \varphi$

Steigung der Kurventangente:  $m_2 = y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi}{\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi} = \tan \psi$

$$\tan \alpha = \tan(\psi - \varphi) = \frac{\tan \psi - \tan \varphi}{1 + \tan \psi \cdot \tan \varphi} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Mit der Setzung  $s := \sin \varphi$  und  $c := \cos \varphi$  folgt

$$\tan \alpha = \frac{\frac{\dot{r}s+rc}{\dot{r}c-rs} - \frac{s}{c}}{1 + \frac{s}{c} \cdot \frac{\dot{r}s+rc}{\dot{r}c-rs}} = \frac{c \cdot (\dot{r}s + rc) - s \cdot (\dot{r}c - rs)}{c \cdot (\dot{r}c - rs) + s(\dot{r}s + rc)} = \frac{\dot{r}cs + rc^2 - \dot{r}cs + rs^2}{\dot{r}c^2 - rcs + \dot{r}s^2 + rcs} = \frac{r}{\dot{r}}$$

**Beispiel:** Wir untersuchen die archimedische Spirale  $r(\varphi) = a\varphi$  für den Winkel  $\varphi = 0$ .

$$\tan \alpha_0 = \left. \frac{a \cdot \varphi}{a} \right|_{\varphi=0} = 0,$$

d.h. die archimedische Spirale läuft mit waagerechter Kurventangente aus 0 heraus.

## 6.5 Integration von Kurven

### 6.5.1 Flächenberechnung

#### a) Fläche zwischen einer Kurve und den Koordinatenachsen

Gegeben: Kurve in Parameterdarstellung

$$\{x = x(t), y = y(t); t_1 \leq t \leq t_2\},$$

die **schlicht** über der  $x$ -Achse verläuft, d. h. jede Parallele zur  $y$ -Achse schneidet die Kurve maximal einmal.

**Satz:** Die Fläche  $A_x$  zwischen der Kurve, der  $x$ -Achse und den beiden Parallelen zur  $y$ -Achse durch die Punkte  $P(t_1)$  und  $P(t_2)$  ist gegeben durch

$$A_x = - \int_{t_1}^{t_2} y(t) \dot{x}(t) dt ,$$

wobei die Kurve so zu durchlaufen ist, dass die Fläche links von der Kurve liegt.

Entsprechend gilt auch der folgende Satz:

**Satz:** Für die Fläche  $A_y$  zwischen einer schlicht über der  $y$ -Achse verlaufenden Kurve, der  $y$ -Achse und den beiden Parallelen zur  $x$ -Achse durch die Punkte  $P(t_1)$  und  $P(t_2)$  gilt

$$A_y = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \dot{y}(t) dt ,$$

wobei die Kurve so zu durchlaufen ist, dass die Fläche links von der Kurve liegt.

**b) Sektorfläche in Polarkoordinaten**

Gegeben: Kurve  $r = r(\varphi)$  in Polarkoordinaten.

Gesucht: Fläche  $A_S$  berandet von der Kurve und Ursprunghalbgeraden, die mit der positiven  $x$ -Achse die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  einschließen ( $\varphi_1 < \varphi_2$ ).

Vorgehensweise: Man zerlegt den Winkelbereich zwischen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  in Sektoren mit Flächeninhalt  $\Delta A_k$  mit konstantem Öffnungswinkel  $\Delta\varphi$  und ersetzt die Kurve in jedem Sektor durch Kreisbögen vom Radius  $r_k$ , wobei  $r_k$  der Abstand vom Pol des Schnittpunktes der Kurve mit der Winkelhalbierenden des Sektors ist ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\varphi$$

$$A_S \approx \sum_{k=1}^n \Delta A_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n r_k^2 \Delta\varphi$$

Der Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$ , d. h.  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ , liefert

$$A_S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

**c) Sektorfläche in Parameterdarstellung**

Gegeben: Kurve in Parameterdarstellung  
 $\{x = x(t), y = y(t); t_1 \leq t \leq t_2\}$

Gesucht: Fläche  $A_S$  wie in b)

**Satz (Leibnizsche Sektorformel):**

$$A_S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (xy - \dot{x}y) dt,$$

wobei die Kurve mit wachsendem  $t$  so zu durchlaufen ist, dass die Fläche links von der Kurve liegt ( $\varphi_2 > \varphi_1$ ).

**Folgerung:** Ist die Kurve für  $I = [t_1, t_2]$  geschlossen, so erhält man den Inhalt der eingeschlossenen Fläche  $A$  durch

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (xy - \dot{x}y) dt.$$

**Bemerkung:** Diese Formel gilt auch, wenn der Ursprung außerhalb der umschlossenen Fläche liegt.

### 6.5.2 Bogenlängenberechnung

Die Länge  $s$  einer Kurve ist gegeben durch:

- falls die Kurve explizit in kartesischen Koordinaten  $y = f(x)$  gegeben ist (s. Analysis Teil 1, § 18.2)

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad \begin{array}{l} \text{Länge zwischen den Kurvenpunkten} \\ (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \end{array}$$

- falls die Kurve in Parameterdarstellung  $\{x = x(t), y = y(t)\}$  gegeben ist:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \quad \begin{array}{l} \text{Länge zwischen den Kurvenpunkten} \\ P(t_1), P(t_2) \end{array}$$

- falls die Kurve in Polarkoordinaten  $r = r(\varphi)$  gegeben ist:

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\varphi \quad \left( \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \right)$$

Länge zwischen den Kurvenpunkten  $P(\varphi_1), P(\varphi_2)$