Skriptum zur Vorlesung

Mathematik 1

- Diskrete Mathematik -

Jürgen Garloff
Hochschule für Technik, Wirtschaft und Gestaltung Konstanz
Fakultät für Informatik

Januar 2013

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Mengen und ihre Verknüpfungen

1.1.1 Mengenbegriff

In der naiven Mengenlehre geht man von folgendem Mengenbegriff aus:

Definition (Georg Cantor, 1845 - 1918): Unter einer **Menge** versteht man eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, **Elemente** der Menge genannt, zu einem Ganzen.

Schreibweise:	**Bedeutung:**
$M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$	Die Menge M enthält die Elemente $a_1, a_2, ..., a_n$.
$M = \{a_1, a_2, ...\}$	Die Menge M enthält die Elemente $a_1, a_2, ...$ (**aufzählende** Darstellung).
$M = \{x \mid E(x)\}$	M ist die Menge aller x, für die die Eigenschaft $E(x)$ gilt (**beschreibende** Darstellung).
$a \in M$	a ist Element der Menge M,
$a \notin M$	a ist nicht Element der Menge M.

Wichtige Mengen:

$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$	Menge der natürlichen Zahlen,
$\mathbb{N}_\circ := \{0, 1, 2, 3, ...\}$	Menge der natürlichen Zahlen zzgl. 0,
$\mathbb{Z} := \{0, +1, -1, +2, -2, ...\}$	Menge der ganzen Zahlen,
$\mathbb{Q} := \{r \mid r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$	Menge der rationalen Zahlen,

$\mathbb{R} := \{x \mid x$ ist endliche oder unendliche Dezimalzahl [1] (mit Vorzeichen (+/-))$\}$
Menge der reellen Zahlen.

[1] Hierbei sind allerdings noch alle Dezimalzahlen mit 9er-Periode geeignet zu identifizieren, z.B. $0.4\bar{9}$ mit 0.5.

Enthält die Menge M endlich viele Elemente, etwa n viele, so notieren wir $|M| = n$ und nennen M eine **endliche Menge**. $|M|$ heißt die **Kardinalität** (*Mächtigkeit*, *Kardinal-* oder *Elementzahl*) von M; sie wird auch mit card M oder $\#M$ bezeichnet. Nichtendliche Mengen heißen **unendlich**, und wir notieren $|M| = \infty$.

Mengen ohne Elemente heißen **leer**. Ist die Menge M leer, so notieren wir $M = \varnothing$ (oder auch $M = \{\ \}$).

1.1.2 Grundbegriffe der Aussagenlogik

Eine **Aussage** ist ein sprachliches Gebilde, von dem man entscheiden kann, ob es *wahr* oder *falsch* ist.

Junktoren:		E und F seien Aussagen. Die zusammengesetzte Aussage ist wahr genau dann, wenn
Konjunktion:	$E \wedge F$	E und F wahr sind;
Disjunktion:	$E \vee F$	mindestens eine der beiden Aussagen E und F wahr ist;
Negation:	$\neg E$	E falsch ist;
Implikation:	$E \Rightarrow F$ $F \Leftarrow E$	E falsch ist oder E und F wahr sind (gelesen als „*wenn E, dann F*“, „*Aus E folgt F.*“, „*E impliziert F.*“, „*F ist notwendig für E.*“ oder „*E ist hinreichend für F.*“);
Äquivalenz:	$E \Leftrightarrow F$	E und F wahr sind oder E und F falsch sind, also E und F den gleichen Wahrheitswert haben (gelesen als „*E genau dann, wenn F*“, „*E ist notwendig und hinreichend für F.*“ oder „*E und F sind äquivalent.*“).

Folgende Reihenfolge gilt, nach abnehmender Stärke der Bindung geordnet:

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \Rightarrow,\ \Leftrightarrow.$$

Die Negation hat die stärkste Bindung, die Äquivalenz die schwächste.

Tautologien:

$E \vee \neg E$ (Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten)

$\neg(E \wedge \neg E)$ (Gesetz der Kontradiktion)

$(E \Rightarrow F) \wedge (F \Rightarrow G) \quad \Rightarrow \quad (E \Rightarrow G)$ (Gesetz vom Syllogismus)

$E \Leftrightarrow \neg(\neg E)$ (Gesetz von der doppelten Verneinung)

$E \Rightarrow F \ \Leftrightarrow\ \neg F \Rightarrow \neg E$ (Gesetz der Kontraposition).

1.1.3 Grundbegriffe der Prädikatenlogik

Definition: Es sei M eine Menge von Objekten. Das Zeichen x heißt **Variable** über M, wenn x ein Zeichen ist, für das beliebige Elemente aus M eingesetzt werden dürfen.

Definition: A heißt **Aussageform** über M, wenn

a) in A wenigstens eine Variable über M auftritt,

b) beim Ersetzen von Objekten aus M für alle in A auftretenden Variablen eine Aussage entsteht.

Quantoren (auch *Quantifikatoren* genannt)

$\forall x \in M \;\; A(x)$	Für *alle* $x \in M$ gilt $A(x)$.	(Allquantor)
$\exists x \in M \;\; A(x)$	Es *existiert* (mindestens) ein $x \in M$, für das $A(x)$ gilt.	(Existenzquantor)

Grundregeln

$$
\begin{aligned}
\forall x \in M \ A(x) &\Leftrightarrow \neg(\exists x \in M \ \neg A(x)) \\
\exists x \in M \ A(x) &\Leftrightarrow \neg(\forall x \in M \ \neg A(x)) \\
\forall x \in M \ \ (A(x) \wedge B(x)) &\Leftrightarrow (\forall x \in M \ A(x)) \ \wedge \ (\forall x \in M \ B(x)) \\
\exists x \in M \ \ (A(x) \vee B(x)) &\Leftrightarrow (\exists x \in M \ A(x)) \ \vee \ (\exists x \in M \ B(x))
\end{aligned}
$$

Für die folgenden drei Aussagen seien M, N Mengen und $A(x, y)$ eine Aussageform ($(x, y) \in M \times N$, vgl. §1.2.2):

$$
\begin{aligned}
\forall x \in M \ (\forall y \in N \ A(x, y)) &\Leftrightarrow \forall y \in N \ (\forall x \in M \ A(x, y)) \\
\exists x \in M \ (\exists y \in N \ A(x, y)) &\Leftrightarrow \exists y \in N \ (\exists x \in M \ A(x, y)) \\
\exists x \in M \ (\forall y \in N \ A(x, y)) &\Rightarrow \forall y \in N \ (\exists x \in M \ A(x, y)) \ .
\end{aligned}
$$

1.1.4 Teilmengen

Definition (Inklusion): Es seien A und B Mengen.

a) A ist **Teilmenge** von B (i.Z. $A \subseteq B$), falls jedes Element von A auch Element von B ist, d.h. $A \subseteq B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$.

b) A und B sind **gleich** (i.Z. $A = B$), wenn jede Menge Teilmenge der anderen ist, d.h. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

c) A ist **echte Teilmenge** von B (i.Z. $A \subset B$), falls A Teilmenge von B, aber nicht gleich B ist, d.h. $A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \neq A$.

Folgerungen:

a) Für jede Menge A gilt $\varnothing \subseteq A$ und $A \subseteq A$.

b) Sind A, B und C Mengen, so gilt $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$.

Definition: Es sei M eine Menge. Dann heißt

$$\mathbb{P}(M) = \{A | A \subseteq M\} \qquad \text{(Menge aller Teilmengen von } M\text{)}$$

die **Potenzmenge** von M.

Es gilt $|\mathbb{P}(M)| = 2^{|M|}$ für endliche Mengen M.

1.1.5 Verknüpfungen von Mengen

Definition: Es seien A und B zwei Mengen.

a) Die Menge $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$, welche alle Elemente von A und B enthält, heißt **Vereinigung** von A und B.

b) Die Menge $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$, welche alle gemeinsamen Elemente von A und B enthält, heißt **Durchschnitt** (auch *Schnittmenge*) von A und B;

c) A und B heißen **disjunkt** (oder auch *elementfremd*), falls $A \cap B = \varnothing$.

d) Die Menge $A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$, welche alle Elemente von A enthält, die nicht Element von B sind, heißt **Differenz** von A und B.

Bezeichnung für die Vereinigung bzw. für den Durchschnitt von n Mengen $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

bzw. für Mengen A_i, $i \in I$ (Indexmenge): $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$.

Bezüglich der Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$ gelten folgende Gesetze:

Kommutativgesetz:

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}$$

Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

Für zwei endliche Mengen A und B gilt ferner:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad .$$

Definition: Ist M eine Menge, I eine Indexmenge sowie $A_i \subseteq M$, $i \in I$, so daß gilt $\bigcup_{i \in I} A_i = M$ und $A_i \cap A_j = \varnothing$ für $i \neq j$, $i, j \in I$, dann heißt $\{A_i \,|\, i \in I\}$ eine **Partition** (oder auch *disjunkte Zerlegung* oder *disjunkte Überdeckung*) von M.

Definition (Komplementbildung):
Ist G Grundmenge und A eine Teilmenge von G, dann nennt man $G\backslash A$ das **Komplement** von A (bezüglich G) und bezeichnet es mit $\overline{A}$:

$$\overline{A} = \{x|x \in G \wedge x \notin A\}$$

Es gelten die De Morganschen Gesetze

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

1.2 Relationen

1.2.1 Kartesisches Produkt

Definition: Für n Mengen A_1, A_2, ... , A_n heißt die Menge

$$A_1 \times ... \times A_n = \{(x_1, \ldots, x_n) |\ x_i \in A_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

das **kartesische Produkt** von A_1, A_2, ... , A_n. Anstelle von $A_1 \times ... \times A_n$ schreibt man auch $\bigtimes_{i=1}^{n} A_i$;
$(x_1, \ldots, x_n)$ heißt ***n*-Tupel**, für $n = 2$ spricht man von *Paaren*, für $n = 3$ von *Tripeln* und für $n = 4$ oder $n = 5$ auch von *Quadrupeln* bzw. *Quintupeln*;
x_i, $i = 1, \ldots, n$, heißt die i-te *Komponente* von $(x_1, \ldots, x_n)$.

Ist $|A_i| = m_i$, $i = 1, \ldots, n$, so gilt

$$|A_1 \times \ldots \times A_n| = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n.$$

Sind alle A_i identisch, d.h. $A_i = A$, $i = 1, \ldots, n$, dann heißt

$$A^n = A \times \ ... \ \times A$$

das *n-fache kartesische Produkt von A*. Es gilt dann $A^1 = A$ und man setzt $A^0 := \varnothing$. Ist $|A| = m$, dann ist $|A^n| = m^n$.

1.2.2 Relationen und ihre Darstellungen

Definition: Eine Teilmenge $R \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$ heißt (n-stellige) **Relation** auf $A_1 \times \ldots \times A_n$.

$n = 2$ (binäre Relation):
Bezeichnungsweisen für $R \subseteq A \times B$:

$$\left.\begin{array}{lr} (x,y) \in R & \text{Element-} \\ R(x,y) & \text{Präfix-} \\ xRy & \text{Infix-} \end{array}\right\} \text{Schreibweise}$$

Darstellungsmöglichkeiten, falls A und B endlich:

$$A = \{a_1, \ldots, a_m\},\ B = \{b_1, \ldots, b_n\}$$

- durch eine Matrix $M = (m_{ij})_{i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n}$ (s. §5):

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

- durch einen Graphen (s. §7):

$$\begin{array}{lcr} a_1 \bullet & & \bullet\ b_1 \\ a_2 \bullet & & \bullet\ b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_m \bullet & & \bullet\ b_n \end{array}$$

von a_i führt ein Pfeil zu b_j, falls $(a_i, b_j) \in R$.

1.2.3 Äquivalenzrelationen

Definition: Es sei R eine binäre Relation auf der Grundmenge A. Dann heißt R

a) **reflexiv**, wenn für alle $a \in A$ gilt aRa,

b) **symmetrisch**, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: $aRb \Rightarrow bRa$,

c) **antisymmetrisch**, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$,

d) **transitiv**, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

Definition: Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt **Ordnung** [1] auf A, wenn R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

[1] In der älteren Literatur auch *Halbordnung* genannt.

Definition: Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt **Äquivalenzrelation** auf A, wenn R reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Definition: Ist $R \subseteq A \times A$ eine Äquivalenzrelation und $a \in A$, dann heißt die Menge

$$[a]_R = \{b \in A |\, aRb\}$$

Äquivalenzklasse von R, a heißt **Repräsentant** der Äquivalenzklasse $[a]_R$.

Satz: Es sei $R \subseteq A \times A$ mit $A \neq \varnothing$ eine Äquivalenzrelation. Dann gilt

a) Für alle $a \in A$ ist $[a]_R$ nichtleer.

b) Für alle $b \in [a]_R$ gilt: $[b]_R = [a]_R$.

c) Falls $\neg(aRb)$, dann ist $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$;

d) $A = \bigcup_{a \in A} [a]_R$.

Folgerungen:

a) Jede Äquivalenzrelation auf A legt eine Partition von A fest.(Man spricht auch von einer *Klasseneinteilung* von A.)

b) Umgekehrt definiert jede Partition von A eine Äquivalenzrelation auf A.

1.3 Abbildungen

Definition: Es seien A und B Mengen; f heißt **Abbildung** (oder **Funktion**) **von A in/nach B** , falls f *jedem* Element von A *genau ein* Element von B zuordnet.

Schreibweise:

$$\begin{aligned} f:\quad & A \to B \\ & x \mapsto y\,, \quad y = f(x) \end{aligned}$$

A heißt **Definitionsbereich** von f und B **Zielmenge** von f; für A schreiben wir auch D_f; die Elemente von A heißen **Argumente** von f;

$W_f = \{y \in B \,|\, \exists x \in A : y = f(x)\}$ heißt **Wertebereich** von f, die Elemente von W_f heißen **Werte** von f;

$G_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\}$ heißt **Graph** oder **Schaubild** von f.

Gilt $M \subseteq A$, $N \subseteq B$, so heißt

$$\begin{aligned} f(M) &= \{y \in B \,|\, \exists x \in M : f(x) = y\} \\ &\ \text{das } \textbf{Bild} \text{ von } M \text{ unter } f, \\ f^{-1}(N) &= \{x \in A \,|\, \exists y \in N : f(x) = y\} \\ &\ \text{das } \textbf{Urbild} \text{ von } N \text{ unter } f; \end{aligned}$$

ist $A = \varnothing$, so heißt f **leer**;
ist $A = B$, so spricht man auch von einer *Selbstabbildung* von A.

Die Gleichheitsrelation definiert auf jeder Menge A eine Abbildung, nämlich die **identische Abbildung**, kurz auch **Identität** genannt. Sie wird mit 1_A oder id_A oder einfach mit id bezeichnet; es gilt also

$$\forall x \in A : \; id_A(x) = x \;.$$

f heißt **injektiv** (oder *eineindeutig* oder *umkehrbar [eindeutig]*), falls gilt:

$$\forall x_1, x_2 \in A: \; f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \; ;$$

in diesem Falle existiert die **Umkehrabbildung** f^{-1}:

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad & W_f \to A \\ & x = f^{-1}(y)\,, \text{ falls } y = f(x); \end{aligned}$$

f heißt **surjektiv** (oder Funktion *auf* B), falls $W_f = B$ gilt;
f heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Definition (**Gleichheit** und **Verkettung** von Funktionen):
Zwei Funktionen f und g heißen **gleich**, wenn $D_f = D_g$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt.
Es seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ Funktionen mit $W_f \subseteq C$. Dann heißt $g \circ f : A \to D$ definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ **verkettetete Funktion**.

Ferner gilt für die Verkettung von Funktionen das Assoziativgesetz, d. h. ist neben den Funktionen f und g aus obiger Definition $h : E \to F$ eine Funktion mit $W_g \subseteq E$, dann gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \; .$$

Ist $f : A \to B$ eine Funktion, dann ist f bijektiv genau dann, wenn es eine Funktion $g : B \to A$ gibt mit $g \circ f = id_A$ und $f \circ g = id_B$. Dabei liefert die Beziehung $g \circ f = id_A$ die Injektivität und $f \circ g = id_B$ die Surjektivität von f.

Kapitel 2

Komplexe Zahlen

Algebraische Eigenschaften der reellen Zahlen

Es gelten für die Addition auf $\mathbb{R}$ die folgenden vier Gesetze:

(A1) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a+b)+c = a+(b+c) =: \boldsymbol{a+b+c}$ („*Assoziativität der Addition*“)

(A2) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad a+b = b+a$ („*Kommutativität der Addition*“)

(A3) $\exists\, \mathbf{0} \in \mathbb{R} \ \ \forall\, a \in \mathbb{R} \quad a+0 = a$ („*Null* oder *Nullelement*“)

(A4) $\forall\, a \in \mathbb{R} \ \ \exists\, \boldsymbol{-a} \in \mathbb{R} \quad a+(-a) = 0$ („*Inverses Element zu a bezüglich +*“, meist gelesen als „*minus a*“)

Für die Multiplikation gelten ganz analog - bis auf die Sonderstellung der Null - :

(M1) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) =: \boldsymbol{a \cdot b \cdot c} =: \boldsymbol{abc}$ („*Assoziativität der Multiplikation*“)

(M2) $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad a \cdot b = b \cdot a$ („*Kommutativität der Multiplikation*“)

(M3) $\exists\, \mathbf{1} \in \mathbb{R} \ \ \forall\, a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = a$ („*Eins* oder *Einselement*“)

(M4) $\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \ \exists\, \boldsymbol{a}^{-1} \in \mathbb{R} \quad a \cdot a^{-1} = 1$ („*Inverses Element zu a bezüglich ·* “, meist gelesen als „*a hoch minus 1*“)

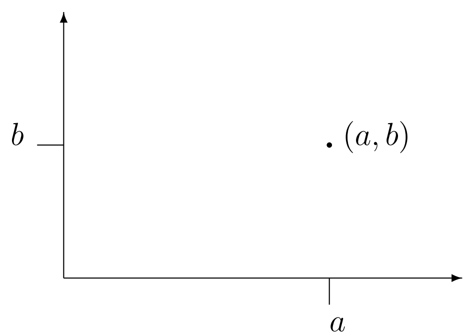
Für die Verbindung von Addition und Multiplikation gilt:

(D) $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ („*Distributivität*“)

2.1 Definition und Darstellung der komplexen Zahlen

2.1.1 Einführung der komplexen Zahlen

Definition: $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ Menge der **komplexen Zahlen**



Definition (Gleichheit, Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$):

Für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ wird definiert:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) :\Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

Satz: Für alle $(x_k, y_k), (x, y) \in \mathbb{C},\ k = 1, 2, 3$, gelten die folgenden Eigenschaften:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{(A1):} & ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3) & = & (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \\
\text{(A2):} & (x_1, y_1) + (x_2, y_2) & = & (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \\
\text{(A3):} & (x, y) + (0, 0) & = & (x, y) \\
\text{(A4):} & (x, y) + (-x, -y) & = & (0, 0) \\
\text{(M1):} & ((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) & = & (x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)) \\
\text{(M2):} & (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) & = & (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1) \\
\text{(M3):} & (x, y) \cdot (1, 0) & = & (x, y) \\
\text{(M4):} & (x, y) \cdot (\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}) & = & (1, 0) \\
\text{(D):} & ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) & = & (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) + (x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)\ .
\end{array}
$$

Beweis:
Zu (A1)-(M3) durch einfaches Nachrechnen
(M4):

$$(x, y) \cdot (\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}) = (\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{-y^2}{x^2 + y^2}, \frac{x(-y)}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2}) = (1, 0)$$

(D):

$$
\begin{aligned}
(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \cdot (x_3, y_3) &= ((x_1 + x_2) \cdot x_3 - (y_1 + y_2) \cdot y_3, (x_1 + x_2) \cdot y_3 + (y_1 + y_2) \cdot x_3) \\
&= (x_1x_3 + x_2x_3 - y_1y_3 - y_2y_3, x_1y_3 + x_2y_3 + y_1x_3 + y_2x_3) \\
(x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) + (x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3) &= (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) + (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + x_3y_2) \\
&= (x_1x_3 + x_2x_3 - y_1y_3 - y_2y_3, x_1y_3 + x_2y_3 + y_1x_3 + y_2x_3)
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Im folgenden werden wir häufig das Multiplikationszeichen fortlassen.

Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$:
$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
$x \longmapsto (x, 0)$

Bezeichnung: Wir schreiben x statt $(x, 0)$,
0 statt $(0, 0)$,
1 statt $(1, 0)$.

Insbesondere gilt: $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$.

Bezeichnung: Die komplexe Zahl $j := (0,1)$ heißt **imaginäre Einheit**.

Damit gilt: $j^2 = -1$.

$(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0)(1,0) + (0,1)(y,0) = x + jy$

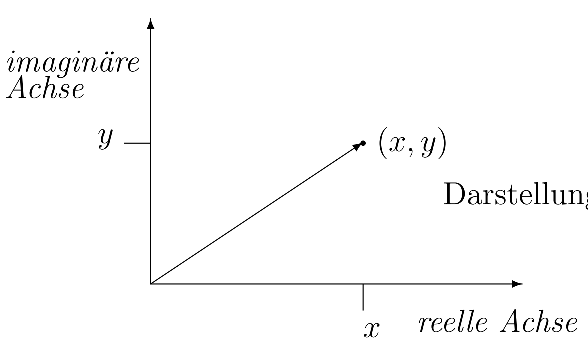
$z = x + jy$, $Re(z) = x$ heißt **Realteil** von z ,
$Im(z) = y$ **Imaginärteil** von z .

Damit besteht die Inklusionskette:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Die Gaußsche Zahlenebene

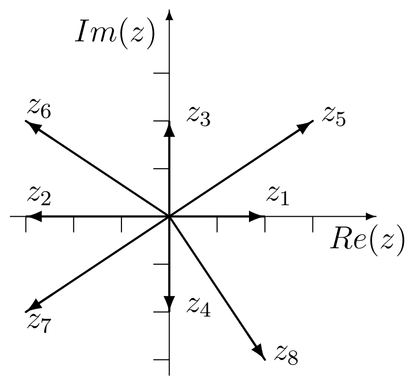
$z = x + jy$



Darstellung mittels Zeiger $\underline{z} = x + jy$

Beispiel:

$z_1 = 2,\ z_2 = -3,\ z_3 = 2j,\ z_4 = -2j,\ z_5 = 3 + 2j,\ z_6 = -3 + 2j,\ z_7 = -3 - 2j,\ z_8 = 2 - 3j$



Definition: Die komplexe Zahl $z^* = x - jy$ heißt die zu $z = x + jy$ **konjugiert komplexe** Zahl.

Es gilt:

$$(z^*)^* = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Im obigen Beispiel ist

$$z_3^* = z_4, \quad z_6^* = z_7, \quad z_1^* = z_1, \quad z_2^* = z_2.$$

Definition: Unter dem **Betrag** der komplexen Zahl $z = x + jy$ versteht man

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Im obigen Beispiel gilt

$$|z_8| = \sqrt{13}\ .$$

2.1.2 Darstellungsformen einer komplexen Zahl

Kartesische Form

$z \; = \; x \; + \; jy$

Trigonometrische Form

Sei $z \neq 0$.
Polarkoordinaten $(r, \varphi),\ r = |z|,\ \varphi \in [0, 2\pi),\ \varphi$ heißt **Argument**, **Winkel** oder **Phase** von z
$x = r\ \cos\varphi,\ y = r\ \sin\varphi$

$z \to z^* = x - jy = r\ \cos\varphi - jr\ \sin\varphi = r(\cos\varphi - j\ \sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + j\ \sin(-\varphi))$

Dem Übergang zum Konjugiert-komplexen einer komplexen Zahl entspricht also die Spiegelung des Zeigers der komplexen Zahl an der reellen Achse.

Exponentialform

Aufgrund der Eulersche Bezeichnung (siehe Mat 2) läßt sich schreiben

$$e^{j\varphi} \; = \; \cos\varphi + j\ \sin\varphi\ .$$

Damit ergibt sich die Darstellung $z = r\, e^{j\varphi}$.

$z \to z^* = r\, e^{-j\varphi}$

Spezielle Werte:

$$\begin{array}{llll}
\varphi = 0: & e^{j0} & = \cos 0 + j\ \sin 0 & = 1 \\
\varphi = \pi/2: & e^{j\pi/2} & = \cos(\pi/2) + j\ \sin(\pi/2) & = j \\
\varphi = \pi: & e^{j\pi} & = \cos\pi + j\ \sin\pi & = -1 \\
\varphi = 3/2\pi: & e^{j3/2\pi} & = \cos(3/2\pi) + j\ \sin(3/2\pi) & = -j \\
\varphi = 2\pi\ : & e^{j2\pi} & = \cos(2\pi) + j\sin(2\pi) & = 1
\end{array}$$

Ferner gilt:

$$\left|e^{j\varphi}\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$$

$$e^{j(\varphi+2\pi)} = \cos(\varphi + 2\pi) + j\ \sin(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi + j\ \sin\varphi = e^{j\varphi}$$

Für jedes Intervall für φ der Länge 2π wird also der Einheitskreis genau einmal, und zwar im Gegenuhrzeigersinn, durchlaufen.

"Polarform" ist die Sammelbezeichnung für die trigonometrische und die Exponentialform.

Umrechnung zwischen den Darstellungsformen

1. Umrechnung von der Polarform in die kartesische Form
   $z = r(\cos\varphi + j\,\sin\varphi) = r\,e^{j\varphi} \;\rightarrow\; z = x + jy$
   mittels $x = r\,\cos\varphi,\; y = r\,\sin\varphi$

   Beispiel:
   $z = 2e^{j3/4\pi} = 2(\cos 3/4\pi + j\sin 3/4\pi) = 2(-1/2\sqrt{2} + j1/2\sqrt{2}) = \sqrt{2}(-1+j)$

2. Umrechnung von der kartesischen Form in die Polarform
   mittels $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2},\;\; \tan\varphi = y/x$

Berechnungsformel für den Winkel φ

1. Quadrant:		$\varphi = \arctan\frac{y}{x}$
2.,3.	" :	$\varphi = \arctan\frac{y}{x} + \pi$
4.	" :	$\varphi = \arctan\frac{y}{x} + 2\pi$

Für die reellen Zahlen $z = x + j0$ ist

$$\varphi = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ \text{nicht def.} & x = 0 \\ \pi & x < 0 \end{cases} .$$

Für die imaginären Zahlen $z = 0 + jy$ ist

$$\varphi = \begin{cases} \pi/2 & y > 0 \\ 3/2\pi & y < 0 \end{cases} .$$

Herleitung der Formel für den 2. Quadranten:

$z = x + jy$

Hilfswinkel α:
$\tan\alpha = \frac{y}{|x|} = \frac{y}{-x}$
$\Rightarrow \alpha = \arctan\frac{-y}{x} = -\arctan\frac{y}{x}$
$\Rightarrow \varphi = 180^\circ - \alpha = 180^\circ + \arctan\frac{y}{x}$

Beispiel:

$z = -4 + 3j, \quad r = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$
$\varphi = \pi + \arctan\frac{-3}{4} \approx 2.5$
$z \approx 5 \cdot (\cos 2.5 + j\sin 2.5) = 5e^{j2.5}$

2.2 Komplexe Rechnung

2.2.1 Die vier Grundrechenarten in kartesischer Darstellung

Addition und Subtraktion

$z_1 = x_1 + jy_1, \quad z_2 = x_2 + jy_2$
$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + j(y_1 \pm y_2)$

Beispiel:

$z_1 = 3 - 7j, \quad z_2 = -1 + 2j$
$z_1 + z_2 = 3 - 1 + j(-7 + 2) = 2 - 5j$
$z_1 - z_2 = 3 + 1 + j(-7 - 2) = 4 - 9j$

Bemerkung: Sind die beiden komplexen Zahlen in der Polarform gegeben, so sind sie zur Addition in die kartesische Form zu überführen.

Multiplikation und Division

$$z_1 = x_1 + jy_1, \quad z_2 = x_2 + jy_2$$
$$z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + j(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Beispiele:

1. $z_1 = 3 - 2j, \quad z_2 = -5 + 4j$
   $z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot (-5) - (-2) \cdot 4 + j(3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-5)) = -7 + 22j$

2. $z = x + jy, \quad z \cdot z^* = (x + jy)(x - jy) = x^2 + y^2 + j(-xy + xy) = x^2 + y^2 = |z|^2,$
   d.h. es gilt $|z| = \sqrt{z \cdot z^*}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Beispiel:

$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{23}{41} - j\frac{2}{41}$

Kehrwert von j:
$\frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j$

2.2.2 Multiplikation und Division in Polarform

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$
$z_1 \cdot z_2 = (r_1 e^{j\varphi_1}) \cdot (r_2 e^{j\varphi_2}) = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)$
$= r_1 r_2 \underbrace{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}_{=\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + j\underbrace{(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)}_{=\sin(\varphi_1+\varphi_2)}$
$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$

Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Winkel addiert.

Analog erhält man:
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{j\varphi_1}}{r_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$

Zwei komplexe Zahlen werden dividiert, indem man ihre Beträge dividiert und ihre Winkel subtrahiert.

Geometrische Deutung:

$z_1 = r_1 e^{j\varphi_1}$
Spezialfälle:

1. Multiplikation mit einer reellen Zahl $r > 0$:
   $r\, z_1 = (r\, r_1) e^{j\varphi_1}$
   bedeutet eine Streckung des Zeigers von z_1 um das r-fache, wobei der Winkel φ_1 unverändert bleibt.

2. Multiplikation mit einer komplexen Zahl vom Betrag 1:
   $z = e^{j\varphi}, \quad z\, z_1 = e^{j\varphi} r_1 e^{j\varphi_1} = r_1 e^{j(\varphi+\varphi_1)}$
   bedeutet eine Drehung des Zeigers von z_1 um den Winkel φ, wobei die Länge von z_1 unverändert bleibt.
   $\varphi > 0$: Drehung im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn)
   $\varphi < 0$: Drehung im mathematisch negativen Sinn (Uhrzeigersinn)

Allgemeiner Fall:
Die Multiplikation von z_1 mit $z = re^{j\varphi}$ läßt sich zerlegen in:

1. Multiplikation mit der reellen Zahl r,
   d.h. zunächst wird der Zeiger von z_1 um das r-fache gestreckt.

2. Multiplikation mit $e^{j\varphi}$, d.h. der resultierende Zeiger wird um den Winkel φ gedreht.

Insgesamt erhält man eine *Drehstreckung*.
Die Division läßt sich auf die Multiplikation zurückführen:

$$\frac{z_1}{z} = z_1 \cdot \frac{1}{z} = r_1 e^{j\varphi_1} \cdot \frac{1}{re^{j\varphi}} = \frac{r_1}{r} e^{j(\varphi_1 - \varphi)}$$

Zuerst wird $\underline{z}_1$ um das $1/r$-fache gestreckt und der resultierende Zeiger dann um den Winkel φ zurückgedreht.

Anwendungen:

1. Multiplikation von $z \in \mathbb{C}$ mit $j = 1 \cdot e^{j\pi/2}$ bedeutet eine Drehung von $\underline{z}$ um 90° (im Gegenuhrzeigersinn).

2. Division von $z \in \mathbb{C}$ durch j bedeutet Multiplikation mit $e^{-j\pi/2}$ und somit ein Zurückdrehen von $\underline{z}$ um 90°.

Potenzieren:

$z = re^{j\varphi}$
$z^n = [r(\cos\varphi + j\sin\varphi)]^n = [re^{j\varphi}]^n = r^n e^{jn\varphi} = r^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi) = r^n e^{jn\varphi}$

Formel von Moivre:

$(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + j\sin n\varphi$

Eine komplexe Zahl wird in ihre n-te Potenz erhoben, indem man ihren Betrag in die n-te Potenz erhebt und ihren Winkel mit n multipliziert.

Beispiele:

1. $z = 2(\cos\pi/3 + j\sin\pi/3) \quad z^3 = ?$
   $z^3 = 2^3(\cos\pi + j\sin\pi) = -8$

2. Potenzen von j:
   $j^1 = j$
   $j^2 = -1$
   $j^3 = j^2 \cdot j = -j$
   $j^4 = (j^2)^2 = (-1)^2 = 1$
   $j^5 = j^4 \cdot j = j$

   allgemein gilt für $n \in \mathbb{N}$:
   $j^{4n} = 1, \quad j^{4n+2} = -1$
   $j^{4n+1} = j, \quad j^{4n+3} = -j$

Weitere Rechengesetze für komplexe Zahlen: Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
   Folgerung: $|z|^k = |z^k| \quad \forall k \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$

b) $|z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ Dreiecksungleichung

2.2.3 Radizieren

Definition: Eine komplexe Zahl z heißt ***n*-te Wurzel** von $a \in \mathbb{C}$, wenn sie der Gleichung $z^n = a$ genügt.

$z^n = a = a_0 e^{j\alpha}, \quad z = re^{j\varphi}$
$z^n = r^n e^{jn\varphi} = a_0 e^{j\alpha} = a_0 e^{j(\alpha+2k\pi)}$ mit $k \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow r^n = a_0$, also $r = \sqrt[n]{a_0}$, d.h alle Lösungen haben den gleichen Betrag $\sqrt[n]{a_0}$
$n\varphi = \alpha + 2k\pi, \quad \varphi_k = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$z_k = \sqrt[n]{a_0} e^{\frac{j(\alpha+2k\pi)}{n}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Für $k \geq n$ ergeben sich die bereits mit $k = 0, 1, \ldots, n-1$ berechneten Lösungen:
$z_n = \sqrt[n]{a_0} e^{\frac{j(\alpha+2n\pi)}{n}} = \sqrt[n]{a_0} e^{j\alpha/n} \cdot \underbrace{e^{j2\pi}}_{=1} = \sqrt[n]{a_0} e^{j\alpha/n} = z_0$
$z_{n+1} = z_1$, usw.
Analog für negative k.

Insgesamt gibt es also genau n verschiedene Lösungen der Gleichung $z^n = a$.

Spezialfall $a = 1$, d.h. $a_0 = 1$ und damit $r = 1$, $\alpha = 0$
Die Lösungen von $z^n = 1$ heißen die ***n*-ten Einheitswurzeln**.

$n = 1$: $z_0 = 1$
$n = 2$: $\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = \pi$, d.h. $z_0 = 1,\ z_1 = -1$
$n = 3$: $\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = 2/3\pi,\ \varphi_2 = 4/3\pi$
$n = 4$: $\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = \pi/2,\ \varphi_2 = \pi,\ \varphi_3 = 3/2\pi$, d.h. $z_0 = 1, z_1 = j, z_2 = -1, z_3 = -j$
$n = 5$: $\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = 2/5\pi,\ \varphi_2 = 4/5\pi,\ \varphi_3 = 6/5\pi,\ \varphi_4 = 8/5\pi$
$n = 6$: $\varphi_0 = 0,\ \varphi_1 = 1/3\pi,\ \varphi_2 = 2/3\pi,\ \varphi_3 = \pi,\ \varphi_4 = 4/3\pi,\ \varphi_5 = 5/3\pi$

Allgemein gilt:
1. $z_0 = 1$ ist stets Lösung.
2. Falls n gerade ist, ist $z_{n/2} = -1$ Lösung.

Beispiele:

1. $z^3 = -8 = 8e^{j\pi}$
   $z_0 = 2e^{j\pi/3} = 2(1/2 + j1/2\sqrt{3}) = 1 + j\sqrt{3},\ z_1 = 2e^{j\pi} = -2$
   $z_2 = 2e^{j5/3\pi} = 2e^{-j\pi/3} = 1 - j\sqrt{3} = z_0^*$

2. $z^4 = -1 + j = \sqrt{2}e^{j3/4\pi}$
   $z_0 = 2^{1/8}e^{j3/16\pi}, \quad z_1 = 2^{1/8}e^{(j3/16+j/2)\pi} = jz_0$
   $z_2 = -z_0, \quad z_3 = -jz_0$

Anwendung auf die Lösung quadratischer Gleichungen

Beispiel: $z^2 + z + 1 = 0$
Quadratische Ergänzung: $(z + 1/2)^2 + 3/4 = 0$ hat keine Lösung in $\mathbb{R}$
$(z + 1/2)^2 = -3/4$
Substitution: $u = z + 1/2$
$u^2 = -3/4 = 3/4 \cdot e^{j\pi}$
$u_0 = 1/2\sqrt{3}e^{j\pi/2} = 1/2\sqrt{3}j$
$u_1 = 1/2\sqrt{3}e^{j3/2\pi} = -1/2\sqrt{3}j$
$z_0 + 1/2 = u_0 \;\Rightarrow\; z_0 = -1/2 + 1/2\sqrt{3}j$
$z_1 + 1/2 = u_1 \;\Rightarrow\; z_1 = -1/2 - 1/2\sqrt{3}j$

Kapitel 3

Algebraische Strukturen

3.1 Gruppen

Definition: Es sei G eine nichtleere Menge, auf der eine binäre Operation $\circ$ definiert ist. $(G, \circ)$ heißt **Gruppe**, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

a) $\forall a,\, b,\, c \in G :$ $\quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ $\quad$ Assoziativgesetz

b) $\exists n \in G \, \forall a \in G :$ $\quad n \circ a = a \circ n = a$ $\quad$ Existenz eines neutralen Elements

c) $\forall a \in G \, \exists \, \overline{a} \in G :$ $\quad a \circ \overline{a} = \overline{a} \circ a = n$ $\quad$ Existenz eines inversen Elements.

Gilt ferner

d) $\forall a,\, b \in G :$ $\quad a \circ b = b \circ a,$ $\quad$ Kommutativgesetz

dann heißt die Gruppe **kommutativ** oder **abelsch**.

Bemerkungen:

1) Man bezeichnet $\overline{a}$ oft mit a^{-1} in multiplikativ und mit $-a$ in additiv geschriebenen Gruppen.

2) Gilt nur das Assoziativgesetz, so nennt man $(G, \circ)$ eine **Halbgruppe**.

Satz: Für eine Gruppe $(G, \circ)$ gelten die folgenden Eigenschaften:

1) Das neutrale Element von G ist eindeutig bestimmt.
2) Zu jedem Element von G gibt es genau ein inverses.
3) Das neutrale Element ist invers zu sich selbst.
4) Für alle Elemente $a \in G$ gilt $\quad \overline{\overline{a}} = a$.
5) *Kürzungsregeln*: Gilt in $G \quad a \circ b = a \circ c$, dann ist $b = c$.
   Ebenso gilt: Ist $b \circ a = c \circ a$, dann ist $b = c$.
6) Für alle a, $b \in G$ gilt: $\overline{a \circ b} = \overline{b} \circ \overline{a}$.
7) *Lösbarkeit von Gleichungen*: Zu zwei beliebigen Elementen a, $b \in G$ gibt es genau ein Element $x \in G$ mit $a \circ x = b$ und genau ein Element $y \in G$ mit $y \circ a = b$.

3.2 Ringe und Körper

Definition: Es sei R eine nichtleere Menge, auf der zwei binäre Operationen $+$ und $*$ defininiert sind. R heißt **Ring**, falls

a) $(R, +)$ eine abelsche Gruppe bildet,

b) $*$ assoziativ auf R ist,

c) die Distributivgesetze für $+$ und $*$ gelten:

$$\forall a,\, b,\, c \in R: \quad \begin{aligned} a * (b + c) &= a * b + a * c \\ (b + c) * a &= b * a + c * a\ . \end{aligned}$$

Ist die Operation $*$ ebenfalls kommutativ, dann heißt R ein **kommutativer Ring** (in diesem Fall genügt für die obige Definition nur eines der beiden Distributivgesetze).

Existiert bzgl. * ebenfalls ein neutrales Element, so bezeichnet man dieses mit 1 (Einselement) und nennt R einen **Ring mit Einselement**.

Das neutrale Element in $(R, +)$ bezeichnet man mit 0 (Nullelement) und das zu a inverse Element mit $-a$. Die Differenz $a - b$ ist durch $a - b := a + (-b)$ erklärt.

Eigenschaften: Für alle a, b, $c \in R$ gilt:

1) $a * 0 = 0 * a = 0$
2) $(-a) * b = a * (-b) = -(a * b)$.

Definition: Elemente a, b eines Ringes R mit $a \neq 0$, $b \neq 0$ und $a*b = 0$ heißen **Nullteiler** von R. Besitzt R keine Nullteiler, so heißt R **nullteilerfrei**.

Satz: Ist der Ring $(R, +, *)$ nullteilerfrei, so gelten die **Kürzungsregeln**

$$\forall\, a, x, y \in R,\ a \neq 0 : \left\{ \begin{array}{l} a * x = a * y \\ \text{oder} \\ x * a = y * a \end{array} \right\} \Rightarrow\ x = y\ .$$

Definition: Ein Ring $(R, +, *)$, für den $(R\backslash\{0\}, *)$ eine abelsche Gruppe ist, heißt **Körper**.

In einem Körper K gelten die von $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bekannten Rechenregeln. So ist eine lineare Gleichung $ax + b = c$ mit $a \neq 0$ in K eindeutig lösbar.
Wenn wir das bzgl. $*$ inverse Element zu $a \in K$ mit $\frac{1}{a}$ schreiben, gilt beispielsweise

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd} \qquad .$$

Satz: Ein Körper ist nullteilerfrei.

Kapitel 4

Vektorräume

4.1 Pfeile

In einer gegebenen Ebene, im folgenden mit ϵ bezeichnet, gibt es zu je zwei Punkten P und P' genau eine Verschiebung, die P in P' überführt. Diese wird mit $\overrightarrow{PP'}$ bezeichnet und als *Pfeil* mit Anfangspunkt P und Endpunkt P' dargestellt. Unter $\overrightarrow{PP'}$ werden aber auch andere Punkte, etwa Q und Q', ineinander übergeführt. Auf der Menge aller Pfeile führen wir die folgende Relation der **Parallelgleichheit** ein.

Definition: $\overrightarrow{PP'}$ ***pg*** $\overrightarrow{QQ'}$ $:\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{PP'}$ und $\overrightarrow{QQ'}$ sind parallel, gleichlang und gleichgerichtet.

Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Pfeile.
Unter der durch einen Pfeil $\overrightarrow{PP'}$ repräsentierten Verschiebung von ϵ verstehen wir $[\overrightarrow{PP'}]_{pg}$. Mit V_ϵ bezeichnen wir die Menge aller Verschiebungen von ϵ. Verschiebungen werden auch mit $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$, ... bezeichnet; $P' = P + \overrightarrow{a}$ ist derjenige Bildpunkt, den man erhält, wenn man $\overrightarrow{a}$ auf P anwendet; $\overrightarrow{a}$ ist eindeutig bestimmt, insbesondere folgt aus $P+\overrightarrow{a} = P+\overrightarrow{b}$, daß $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$ gilt. Ist $P' = P$, so gilt $P' = P + \overrightarrow{o}$ mit der *identischen Verschiebung* $\overrightarrow{o}$.

Definition: Es seien $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V_\epsilon$. Dann verstehen wir unter $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ die durch den Pfeil $\overrightarrow{PP''}$ repräsentierte Verschiebung, wobei $P' = P + \overrightarrow{a}$ und $P'' = P' + \overrightarrow{b}$ gilt.

Nachweis der Unabhängigkeit des Ergebnisses von den ausgewählten Repräsentanten:

Satz: $(V_\epsilon, +)$ ist eine kommutative Gruppe.

Beweis:

Wählt man in der Ebene ϵ einen festen Punkt O, so kann man jede Verschiebung durch einen in O beginnenden Pfeil (Ortsverschiebung) repräsentieren. Dann bestimmt jede Verschiebung $\overrightarrow{x}$ der Ebene ϵ bezüglich des Punktes O eindeutig einen Punkt $P = O + \overrightarrow{x}$, dessen Ortsveschiebung sie ist.

Es sei $\overrightarrow{a} \in V_\epsilon$, $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{o}$, und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq 0$. Dann bezeichnet $\lambda\overrightarrow{a}$ diejenige Verschiebung, die die Eigenschaft besitzt, daß die sie repräsentierenden Pfeile

a) parallel zu den $\overrightarrow{a}$ repräsentierenden Pfeilen sind,

b) $|\lambda|$-mal so lang wie die Pfeile von $\overrightarrow{a}$ sind,

c) gleichgerichtet zu den Pfeilen von $\overrightarrow{a}$ sind, falls $\lambda > 0$, und entgegengesetzt gerichtet zu diesen sind, falls $\lambda < 0$ gilt.

Ist $\lambda = 0$, so wird $\lambda\overrightarrow{a} := \overrightarrow{o}$ für alle $\overrightarrow{a} \in V_\epsilon$ und, falls $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{o}$, so wird $\lambda\overrightarrow{a} := \overrightarrow{o}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gesetzt. Die Verschiebung $\lambda\overrightarrow{a}$ wird das **λ-fache** von $\overrightarrow{a}$ genannt.

Satz: Für Verschiebungen gelten die folgenden Rechengesetze:

a) $\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$

b) $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$

c) $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$

d) $1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$.

4.2 Definition des Vektorraumes und Beispiele

Definition: Es sei K ein Körper. Unter einem **Vektorraum** (oder *linearem Raum*) $\vartheta = (V, +, \cdot)$ über K (K-*Vektorraum*) versteht man eine nichtleere Menge V zusammen mit einer Addition $+$ auf V und einer Verknüpfung $K \times V \to V$, der **skalaren Multiplikation**, die jedem Paar $(\lambda, a) \in K \times V$ genau ein $\lambda \cdot a \in V$ zuordnet, so daß $(V, +)$ eine kommutative Gruppe bildet und die folgenden Axiome für alle $\lambda, \mu \in K$ und a, $b \in V$ erfüllt sind:

a) $\lambda \cdot (\mu \cdot a) = (\lambda \cdot \mu) \cdot a$ Assoziativgesetz

b) $(\lambda + \mu) \cdot a = \lambda \cdot a + \mu \cdot a$ Distributivgesetze
$\lambda \cdot (a + b) = \lambda \cdot a + \lambda \cdot b$

c) $1 \cdot a = a$. (1 Einselement in K)

Bemerkungen:
Die Elemente von K heißen **Skalare**, diejenigen von V **Vektoren**.
Anstelle von $\lambda \cdot a$ schreiben wir auch kurz λa.
Das neutrale Element in V wird mit o bezeichnet und **Nullvektor** genannt, das zu a inverse Element wird mit $-a$ bezeichnet und **Gegenvektor** zu a genannt.
Häufig tritt $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) als Skalarkörper auf; wir sprechen dann von einem *reellen* (bzw. *komplexen*) Vektorraum.

Folgerungen: Für alle $a \in V$, $\lambda \in K$ gilt:

a) $\lambda o = o$

b) $0a = o$

c) $(-1)a = -a$

d) $\lambda a = o \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \vee a = o \quad .$

Definition: Unter einem **Unterraum** (auch *Teilraum* genannt) $\mathcal{U}$ eines K-Vektorraumes ϑ versteht man eine nichtleere Teilmenge U von V, die mit der auf V definierten Addition und skalaren Multiplikation selbst einen K-Vektorraum bildet.

Satz (Unterraumkriterium): Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ eines K-Vektorraumes ϑ bildet genau dann einen Unterraum von ϑ, wenn gilt:

$$\forall \lambda, \mu \in K;\ a,\ b \in U : \quad \lambda a + \mu b \in U.$$

Bemerkung: Jeder Vektorraum besitzt sich selbst und den nur aus dem Nullvektor bestehenden Raum als Unterraum.

4.3 Lineare Unabhängigkeit

Definition: Es sei ϑ ein K-Vektorraum sowie $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ und $a_1, \ldots, a_m \in V$. Dann heißt

$$a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m$$

Linearkombination von $a_1, \ldots, a_m$. Ist $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$, dann heißt die Linearkombination **trivial**, andernfalls **nichttrivial**.
Die Vektoren $a_1, \ldots, a_m$ heißen **linear abhängig**, falls es eine nichttriviale Linearkombination gibt mit $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m = o$. Sie heißen **linear unabhängig**, falls sie nicht linear abhängig sind, d.h. der Nullvektor läßt sich nur dann als Linearkombination $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m$ darstellen, wenn $\lambda_i = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$ gilt.

Satz: Es sei ϑ ein K-Vektorraum und $a_1, \ldots, a_m \in V$. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

a) Die Vektoren $a_1, \ldots, a_m$ sind linear abhängig.

b) Mindestens ein Vektor a_j ist Linearkombination der übrigen, d.h.

$$a_j = \sum_{i=1,\, i \neq j}^{m} \lambda_i a_i \quad .$$

Folgerungen: In einem Vektorraum gilt:

a) Jedes Teilsystem eines linear unabhängigen Systems ist linear unabhängig.

b) Wenn ein Teilsystem eines gegebenen Vektorsystems linear abhängig ist, so ist das gesamte System linear abhängig.

c) Ein linear unabhängiges System enthält den Nullvektor nicht und umgekehrt ist jedes Vektorsystem, welches den Nullvektor enthält, linear abhängig.

4.4 Basis und Dimension

Definition: Eine Menge $B = \{a_1, \ldots, a_r\}$ von Vektoren aus V heißt **Basis**[1] von ϑ, falls gilt

a) B ist linear unabhänig.

b) Jedes Element aus V läßt sich als Linearkombination von Elementen aus B darstellen.

Bemerkungen: Es läßt sich zeigen, daß jeder Vektorraum eine Basis besitzt und daß eine Basis eine minimale Menge von Erzeugenden liefert, d.h. je $r + 1$ verschiedene Vektoren sind linear abhängig. Ferner gilt, daß die Darstellung eines Vektors in einer gegebenen Basis eindeutig ist. Je zwei Basen eines Vektorraums haben die gleiche Anzahl von Elementen.

Definition: Ist ϑ ein Vektorraum und ist $\{a_1, \ldots, a_r\}$ eine Basis von ϑ, so heißt r die **Dimension** von ϑ: $r = \dim \vartheta$. In diesem Fall sprechen wir von einem r-*dimensionalen* Vektorraum. Zusätzlich setzen wir $\dim\{o\} := 0$. Gibt es dagegen keine aus endlich vielen Vektoren bestehene Basis, so heißt der Vektorraum *unendlichdimensional*.

Folgerung: Ist $\dim \vartheta = n$, so ist jedes System von n linear unabhängigen Vektoren aus V eine Basis von ϑ.

[1] Wir betrachten hier nur den Fall von endlichen Basen.

4.5 Das Standardskalarprodukt

Definition: Wir definieren in $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ ein **Skalarprodukt** (auch *inneres Produkt* genannt), durch

$$(a, b) \;:= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \qquad \text{für alle } a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

Weitere Bezeichnungen sind $a \cdot b$, $< a, b >$, ...

Dies *Standardskalarprodukt* besitzt die folgenden Eigenschaften:

a) $\forall a,\, b \in \mathbb{R}^n :$ $\quad (a, b) \;=\; (b, a)$ Symmetrie

b) $\forall a,\, b,\, c \in \mathbb{R}^n :$ $\quad (a + b, c) \;=\; (a, c) + (b, c)$ Additivität

c) $\forall a,\, b \in \mathbb{R}^n;\, \lambda \in \mathbb{R} :$ $\quad (\lambda a, b) \;=\; \lambda(a, b)$ Homogenität

d) $\forall a \in \mathbb{R}^n :$ $\quad 0 \leq (a, a) \quad \text{und} \quad (a, a) = 0 \Leftrightarrow a = o$.

Definition: Zwei Vektoren $a,\, b \in \mathbb{R}^n$ heißen **orthogonal** (bezeichnet mit $a \perp b$), falls $(a, b) \;=\; 0$ gilt.

Satz: Jedes Vektorsystem, das aus paarweise orthogonalen Vektoren besteht und den Nullvektor nicht enthält, ist linear unabhängig.

Definition: Die reelle Zahl

$$\|a\| := \sqrt{(a,a)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

heißt die **Norm** von a. Der Vektor a heißt **Einheitsvektor**, falls $\|a\| = 1$ ist.
Eine System $\{a_1, \ldots, a_n\}$ von paarweise orthogonalen Einheitsvektoren bildet ein **Orthonormalsystem** (i.Z. **ONS**), d.h. es gilt für alle $i, j = 1, \ldots, n$

$$(a_i, a_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 0 \text{ , falls } i \neq j \\ 1 \text{ , falls } i = j \end{cases} \quad ;$$

δ heißt **Kronecker-Symbol**.

Satz: Für alle a, $b \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

a) $0 \leq \|a\|$

b) $\|a\| = 0 \;\Leftrightarrow\; a = o$

c) $\|\lambda a\| = |\lambda| \, \|a\|$

d) $(a,b) \;=\; \|a\| \, \|b\| \cos\angle(a,b)$

e) $|(a,b)| \leq \|a\| \, \|b\|$ (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

f) $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (Dreiecksungleichung) .

4.6 Lineare Abbildungen

Es seien $(V, +, \cdot)$ und $(W, +, \cdot)$ zwei K-Vektorräume.

Definition: Eine Abbildung $\phi: V \to W$ heißt **linear** (oder auch [*Vektorraum-*] *Homomorphismus*), falls gilt

$$\phi(\lambda a + \mu b) = \lambda\phi(a) + \mu\phi(b) \qquad \forall\, \lambda,\, \mu \in K,\;\; a,\, b \in V.$$

Ist ϕ zudem bijektiv, so heißt ϕ ein [*Vektorraum-*] *Isomorphismus.*

Satz: Es sei $\phi: V \to W$ linear. Dann gilt:

a) $\phi(o) = o$;

b) sind $a_1, \ldots, a_m$ linear abhängige Vektoren (in V), so sind die Vektoren $\phi(a_1), \ldots, \phi(a_m)$ linear abhängig (in W).

c) Ist U ein Unterraum von V, so ist $\phi(U)$ ein Unterraum von W und es gilt $\dim \phi(U) \leq \dim U$.

Bemerkung: I. allg. werden linear unabhängige Vektoren nicht in linear unabhängige Vektoren überführt (siehe aber die Aussage b) des nachfolgenden Satzes).

Definition: Ist $\phi: V \to W$ linear, so heißt

$$\text{ke}\,\phi := \phi^{-1}(\{o\})$$

der **Kern** von ϕ und

$$\text{rg}\,\phi := \dim \phi(V)$$

der **Rang** von ϕ.

Satz: Es sei $\phi: V \to W$ linear. Dann gilt

a) $\text{ke}\,\phi$ ist ein Unterraum von V,

b) Die Abbildung ϕ ist genau dann injektiv, wenn $\text{ke}\,\phi = \{o\}$ gilt; in diesem Fall werden linear unabhängige Vektoren in linear unabhängige überführt.

c) Ist V endlichdimensional, so gilt

$$\dim \text{ke}\,\phi + \text{rg}\,\phi = \dim(V)\ .$$

Kapitel 5

Matrizen

5.1 Definitionen und Verknüpfungen von Matrizen

Zugrundegelegt wird ein Körper K, hier zumeist $K = \mathbb{R}$; m, n seien natürliche Zahlen.

Definition: Unter einer $m \times n$-Matrix A versteht man ein rechteckiges Schema von $m \cdot n$ Elementen aus K:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Man schreibt kurz

$$A = (a_{ik})_{i=1,\dots,m;\; k=1,\dots,n}$$

i heißt	**Zeilenindex**
k heißt	**Spaltenindex**

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \quad \textbf{\textit{i}-ter Zeilenvektor}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \quad \textbf{\textit{k}-ter Spaltenvektor}$$

Die Elemente a_{ik} heißen die **Koeffizienten** von A.

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über K bezeichnen wir mit $K^{m,n}$.

Die Matrix A heißt **quadratisch**, wenn $m = n$; die Koeffizienten a_{ii}, $i = 1, \dots, n$, bilden die **Hauptdiagonale** von A.

Definition (Gleichheit): Zwei Matrizen $A = (a_{ik})$ und $B = (b_{ik})$ über K heißen **gleich**, wenn sie beide $m \times n$-Matrizen sind und wenn gilt

$$a_{ik} = b_{ik} \qquad \text{für alle } i, k.$$

Definition (Transposition): Es sei $A = (a_{ik})$ eine $m \times n$-Matrix. Dann nennt man

$$A^T := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

die zu A **transponierte** Matrix.

Es gilt $(A^T)^T = A$.

Definition (Symmetrie): $A \in K^{n,n}$ heißt **symmetrisch**, falls $A^T = A$.

Definition (Addition): Sind $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik}) \in K^{m,n}$, so ist die Summe

$$D = A + B$$

erklärt als die Matrix

$$D = (d_{ik})$$

mit $\quad d_{ik} := a_{ik} + b_{ik} \quad$ für alle i, k.

Definition (Skalare Multiplikation): Ist $\lambda \in K$ und $A = (a_{ik}) \in K^{m,n}$, so ist das skalare Produkt $\lambda \cdot A$ definiert durch

$$\lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{ik}).$$

Bemerkung: Unter Verwendung der entsprechenden Eigenschaften in K zeigt man durch Nachrechnen, daß mit der Addition und der skalaren Multiplikation $K^{m,n}$ einen Vektorraum bildet. Somit kann man auf Matrizen alle Begriffsbildungen für Vektorräume anwenden, wie z.B. lineare Abhängigkeit, Basis oder Dimension.

Definition (Multiplikation zweier Matrizen): Es seien $A = (a_{ij})$ eine $m \times p$-Matrix und $B = (b_{ik})$ eine $p \times n$-Matrix.
Die Produktmatrix $D = A \cdot B = (d_{ik})$ ist eine $m \times n$-Matrix mit

$$d_{ik} := a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{ip}b_{pk} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}.$$

Falk-Schema:

Definition (Potenzen einer Matrix): Es sei A eine $n \times n$-Matrix. Dann definiert man

$$A^0 := I \ , \quad A^1 := A \, ,$$
$$A^k := A^{k-1} \cdot A \ , \ k = 2, 3, \ldots \ .$$

Falls die entsprechenden Produkte definiert sind, gelten die folgenden Beziehungen:

$$
\begin{aligned}
(A \cdot B) \cdot C &= A \cdot (B \cdot C) && \text{Assoziativgesetz} \\
\left.\begin{aligned}(A + B) \cdot C &= AC + BC \\ A \cdot (B + C) &= AB + AC\end{aligned}\right\} & && \text{Distributivgesetze} \\
(A + B)^T &= A^T + B^T \\
(\lambda A)^T &= \lambda A^T \\
(AB)^T &= B^T \cdot A^T \\
A0 &= 0A = O \\
A \cdot I &= I \cdot A = A \, .
\end{aligned}
$$

5.2 Darstellung linearer Abbildungen durch Matrizen

Es seien V und W K-Vektorräume mit $\dim V = n$ und $\dim W = m$. Wir wählen Basen in V und W:

$$\begin{aligned} B_V &:= \{v_1, \ldots, v_n\}, \\ B_W &:= \{w_1, \ldots, w_m\}. \end{aligned}$$

Im folgenden wird gezeigt werden, daß man jeder linearen Abbildung $\phi : V \to W$ bezüglich der Basen B_V und B_W eine $m \times n$-Matrix so zuordnen kann, daß durch diese die lineare Abbildung ϕ eindeutig bestimmt ist.

Die Abbildung $\phi : V \to W$ ist eindeutig bestimmt, wenn man alle Bilder

$$\phi(v_j) = a_j \qquad , \; j = 1, \ldots, n \, ,$$

der Basisvektoren $v_j \in B_V$ kennt. Denn für ein beliebiges $x \in V$ mit

$$x = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \ldots + \xi_n v_n$$

gilt

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2 + \ldots + \xi_n v_n) \\ &= \xi_1 \phi(v_1) + \xi_2 \phi(v_2) + \ldots + \xi_n \phi(v_n) \\ &= \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \ldots + \xi_n a_n \\ &= \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j \qquad \in W \, . \end{aligned}$$

Weiterhin läßt sich jeder der n Bildvektoren

$$a_j = \phi(v_j) \in W \qquad , \; j = 1, \ldots, n \, ,$$

eindeutig durch seine Koordinaten bezüglich der Basis B_W von W darstellen

$$\begin{aligned} a_j &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = a_{1j} w_1 + a_{2j} w_2 + \ldots + a_{mj} w_m \\ &= \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}_{B_W} \quad , \; j = 1, \ldots, n \, . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \xi_j a_{ij} w_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j w_i \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \xi_j \right) w_i \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\xi_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\xi_j \end{pmatrix}_{B_W} = A \cdot x
\end{aligned}$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad .$$

Es gilt also

$$\phi(x) = A \cdot x \quad .$$

Merke: In der j-ten Spalte von A steht das Bild des j-ten Basisvektors v_j, dargestellt in der Basis B_W.

Es sei Z ein weiterer (endlichdimensionaler) K-Vektorraum und $\psi : W \to Z$ eine lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix B bzgl. der Basis B_W und einer Basis B_Z von Z. Dann ist $\psi \circ \phi : V \to Z$ eine lineare Abbildung, die bzgl. der Basen B_V und B_Z die Darstellungsmatrix $B \cdot A$ besitzt.

5.3 Spezielle Abbildungen

5.3.1 Lineare Abbildungen in 2D

Betrachtet werden Abbildungen $w = Av$, $A \in \mathbb{R}^{2,2}$, $v, w \in \mathbb{R}^2$

a) **Skalierungen**

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} ;$$

b) **(Parallel-)Projektionen**

auf die $e^{(1)}$-Achse $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

auf die $e^{(2)}$-Achse $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

c) **Spiegelungen**

an der $e^{(1)}$-Achse $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

an der $e^{(2)}$-Achse $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

am Ursprung $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

an der ersten Winkelhalbierenden $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

d) **Scherungen**
längs der

- $e^{(1)}$-Achse $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

- $e^{(2)}$-Achse $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$;

e) **Rotationen**

um den Ursprung mit Winkel α $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

5.3.2 Lineare Abbildungen in 3D

a) **Skalierungen**

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} ;$$

b) **(orthographische) Projektionen**

z.B. in die $e^{(1)}, e^{(2)}$ -Ebene
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

c) **Spiegelungen**

z.B. an der $e^{(2)}, e^{(3)}$ -Ebene
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und an der $\xi_1{=}\xi_3$ -Ebene
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

d) **Scherungen**

z.B. besitzt die Abbildung, die $e^{(1)}$ und $e^{(2)}$ auf sich selbst und $e^{(3)}$ auf den Vektor $(\alpha, \beta, 1)^T$ abbildet, die Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

e) **Rotationen**

mit Winkel α

- um die $e^{(1)}$-Achse $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

- um die $e^{(2)}$-Achse $$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

- um die $e^{(3)}$-Achse $$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- um einen beliebigen Vektor $m = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$

$$A = \begin{pmatrix} \mu_1^2 + C(1-\mu_1^2) & \mu_1\mu_2(1-C) - \mu_3 S & \mu_1\mu_3(1-C) + \mu_2 S \\ \mu_1\mu_2(1-C) + \mu_3 S & \mu_2^2 + C(1-\mu_2^2) & \mu_2\mu_3(1-C) - \mu_1 S \\ \mu_1\mu_3(1-C) - \mu_2 S & \mu_2\mu_3(1-C) + \mu_1 S & \mu_3^2 + C(1-\mu_3^2) \end{pmatrix},$$

wobei $C := \cos\alpha$ und $S := \sin\alpha$ gesetzt ist. Es ist notwendig, dass $\|m\| = 1$ gilt, damit die Rotation ohne gleichzeitige Skalierung abläuft.

5.3.3 Affine Abbildungen

Affine Abbildungen sind das grundlegende Werkzeug, um Objekte zu bewegen und auszurichten. Sie sind von der Form

$$w = u + Av \ ,$$

bestehen also aus einer *Translation*, die durch u gegeben ist, und einer linearen Abbildung mit der Darstellungsmatrix A.

Affine Abbildungen

- erhalten Teilverhältnisse;
- bilden parallele Ebenen auf parallele Ebenen ab;
- bilden einander schneidende Ebenen auf einander schneidende Ebenen ab; dabei ist die Schnittgerade der Bildebenen das Bild der ursprünglichen Schnittgerade;
- erhalten *Affinkombinationen*:

  Für $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$ gilt

  $$w = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \alpha_4 w_4 \ .$$

5.4 Äquivalente Matrizen, Rang einer Matrix

Definition: Der **Zeilenrang** (bzw. **Spaltenrang**) einer Matrix ist die maximale Zahl linear unabhängiger Zeilenvektoren (bzw. Spaltenvektoren).

Es gilt: Zeilenrang = Spaltenrang

Man spricht daher nur vom **Rang** (abgekürzt rg) einer Matrix.

Satz: Eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$ sei bezüglich fest gewählter Basen in V und W durch die Matrix A dargestellt. Dann gilt $\operatorname{rg}(\phi) = \operatorname{rg}(A)$.

Elementare Umformungen

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Bestimmung des Ranges einer Matrix und zur Lösung von linearen Gleichungssystemen sind die sogenannten elementaren Umformungen:

1) Vertauschen zweier Zeilen (Spalten).
2) Multiplikation aller Elemente einer Zeile (Spalte) mit einem Element $0 \neq c \in K$.
3) Addition einer mit $0 \neq c \in K$ multiplizierten Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte).

Äquivalente Matrizen

Definition: Zwei $m \times n$-Matrizen A, B heißen **äquivalent**, i.Z. $A \sim B$, wenn sie durch endlich viele elementare Umformungen auseinander hervorgehen.

Bemerkung: Durch $A \sim B$ ist auf $K^{m,n}$ eine Äquivalenzrelation erklärt.

Satz: Äquivalente Matrizen besitzen den gleichen Rang.

Satz: Jede $m \times n$-Matrix A mit $\mathrm{rg}(A) = r$ ist äquivalent zu der Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Kapitel 6

Determinanten

6.1 Laplace-Entwicklung

Wir definieren die Determinante rekursiv:
Für $A = (a_{11}) \in K^{1,1}$ setzen wir $\det A := a_{11}$.
Wir nehmen an, wir hätten bereits die Determinante für Matrizen aus $K^{n-1,n-1}$ definiert.
Für $A = (a_{ik}) \in K^{n,n}$ und $i,\, k \in \{1, \ldots, n\}$ bezeichne A_{ik} diejenige Untermatrix von A, die durch Streichung der i-ten Zeile und k-ten Spalte aus A hervorgeht, d.h.

$$A_{ik} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

A_{ik} wird auch das *algebraische Komplement* von a_{ik} genannt. Dann gilt für alle $i,\, k = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} && \text{(Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile)} \\ = & \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} && \text{(Entwicklung nach der } k\text{-ten Spalte).} \end{aligned}$$

Dieser gemeinsame Wert wird die **Determinante** von A genannt und mit $\det A$ oder $|A|$ bezeichnet. Man nennt $(-1)^{i+k} \det A_{ik}$ die **Adjunkte** von a_{ik}.

Insbesondere gilt:

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,, \\
\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \quad ,
\end{aligned}
$$

Sarrussche Regel:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & - & & - & & - \\
 & & & & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
\left|\right. a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & \vdots & a_{11} & & a_{12} \left.\right| & & \\
 & \searrow & & \times & & \times & & \nearrow & & & \\
\left|\right. a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & \vdots & a_{21} & & a_{22} \left.\right| & & . \\
 & \nearrow & & \times & & \times & & \searrow & & & \\
\left|\right. a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & \vdots & a_{31} & & a_{32} \left.\right| & & \\
 & & & & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
 & & & & & & + & & + & & +
\end{array}
$$

6.2 Eigenschaften der Determinante

Satz: Für alle A, $B \in K^{n,n}$ gilt

a) $\det A^T = \det A$,

b) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Bemerkung: Die Aussage a) erlaubt es, jede Aussage über Determinanten, die sich auf die Zeilen bezieht, als analoge Aussage auch für die Spalten zu formulieren.

Rechenregeln für Determinanten: Es seien $A \in K^{n,n}$ und $c \in K$.

1) Vertauscht man in A zwei Zeilen (Spalten), so ändert die Determinante ihr Vorzeichen.

2) Folg. aus (1): Sind in A zwei Zeilen (Spalten) gleich, so gilt $\det A = 0$.

3) Multipliziert man alle Elemente einer Zeile (Spalte) von A mit c, so wird die Determinante mit c multipliziert.

4) Folg. aus (3): $\det(cA) = c^n \det A$.

5) Läßt sich die i-te Zeile von A darstellen als $a_{ik} = b_{ik} + c_{ik}$ mit $b_{ik}, c_{ik} \in K$, $k = 1, \ldots, n$, so gilt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \vdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \vdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \vdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

6) Folg. aus (3) und (5): Addiert man zu einer Zeile (Spalte) von A ein Vielfaches einer anderen Zeile (Spalte), so ändert die Determinante ihren Wert nicht.

Satz: Ist $A \in K^{n,n}$, so läßt sich A durch die elementaren Umformungen

a) Zeilen- und Spaltenvertauschungen,

b) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

auf die Gestalt bringen

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & & & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \\ 0 & \cdots & & 0 & b_{nn} \end{pmatrix} .$$

Es gilt dann

$$\det A = (-1)^p \det B = (-1)^p \, b_{11} \cdot b_{22} \cdot \ldots \cdot b_{nn} \, ,$$

wobei p die Anzahl der bei der Umformung vorgenommenen Zeilen- und Spaltenvertauschungen ist.

Satz: Ist $A \in K^{n,n}$, so gilt $\det A \neq 0$ genau dann, wenn A den Rang n besitzt.

Definition: Eine Matrix A heißt **regulär** (oder auch *nichtsingulär*), falls $\det A \neq 0$, und **singulär**, falls $\det A = 0$ ist.

Kapitel 7

Lineare Gleichungssysteme

7.1 Definitionen

Es sei K ein Körper (hier $K = \mathbb{R}$).
Ein Gleichungssystem der Gestalt

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \qquad\qquad (*) \\ \ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \quad , \end{array}$$

in dem die Koeffizienten a_{ik} und b_k gegebene Elemente von K sind, nennt man ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) über K. Die Aufgabe, ein solches System zu lösen, besteht darin, für die zunächst unbekannten Größen $x_1, \ldots, x_n$ Werte in K zu finden, die die Gleichungen des Systems erfüllen. Im Zusammenhang mit dieser Aufgabe ergeben sich folgende Fragestellungen, die anschließend behandelt werden sollen:

a) *Existenzproblem:* Unter welchen Bedingungen besitzt ein lineares Gleichungssystem überhaupt Lösungen? Gesucht sind Lösbarkeitskriterien.

b) *Allgemeine Lösung, Eindeutigkeit:* Das lineare Gleichungssystem besitze mindestens eine Lösung. Welche Struktur besitzt dann die Menge aller Lösungen des Systems? Unter welchen Bedingungen besitzt das System nur genau eine Lösung?

c) *Lösungsverfahren:* Wie kann man die Lösungen eines gegebenen linearen Gleichungssystems praktisch berechnen?

In Matrixnotation[1]:

Seien $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ die Koeffizientenmatrix,

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ die rechte Seite und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Lösungsvektor,

dann läßt sich das LGS schreiben in der Form

$$A \cdot x = b \quad .$$

Definition: Die Matrix

$$(A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix} ,$$

die man durch Hinzufügen der rechten Seite erhält, heißt die **erweiterte Matrix** des LGS;

$L(A, b) := \{x \in K^n | A \cdot x = b\}$ heißt die **Lösungsmenge** von $(*)$.
Ist $L(A, b) \neq \emptyset$, so heißt $(*)$ **lösbar**, andernfalls nicht lösbar.

Ist $b = o$, so heißt das LGS **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

[1] Die Komponenten von Vektoren werden wir fortan mit kleinen lateinischen Buchstaben notieren.

7.2 Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Wir betrachten zunächst den Sonderfall, in dem die Koeffizientenmatrix $A \in K^{n,n}$ regulär und eine **obere Dreiecksmatrix** ist. Das LGS $(*)$ lautet dann

$$\begin{array}{rcccl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \vdots & & & \\ a_{ii}x_i + & \dots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ & & \vdots & & & \\ & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1,n}x_n & = & b_{n-1} \\ & & & a_{nn}x_n & = & b_n \quad . \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \neq 0 \ , \ \text{d.h. } a_{ii} \neq 0 \ , \ i = 1, \ldots .n \, .$$

Die Komponenten des Lösungsvektors x lassen sich durch **Rückwärtseinsetzen** berechnen:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} \ , \\ x_{n-1} &= \frac{1}{a_{n-1,n-1}}(b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n) \ , \\ &\vdots \\ x_i &= \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k) \ , \\ &\vdots \\ x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - \sum_{k=2}^{n} a_{1k}x_k) \ . \end{aligned}$$

Im Fall, daß A eine reguläre **untere** Dreiecksmatrix ist, das LGS $(*)$ also die folgende Gestalt besitzt

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = & b_2 \\ \quad \cdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \quad ,$$

bestimmt man die Komponenten des Lösungsvektors entsprechend durch **Vorwärtseinsetzen**.

Sei nun $A \in K^{m,n}$ beliebig gewählt. Ziel des Gauß-Algorithmus ist die systematische Elimination der Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Das LGS $(*)$ wird dabei in ein LGS mit einer oberen Dreiecksmatrix als Koeffizientenmatrix umgeformt. Grundlage ist der Sachverhalt, daß sich die Lösungsmenge eines LGS nicht ändert, wenn elementare Zeilenumformungen (s. § 3.4) vorgenommen werden. Zusätzlich können gegebenenfalls noch Spaltenvertauschungen erforderlich sein; diese entsprechen allerdings einer Umnumerierung der Komponenten des Lösungsvektors! Die Elimination wird an der erweiterten Matrix $(A^{(1)}, b^{(1)}) = (A, b)$ vorgenommen.

1. Schritt: Wir nehmen an, daß $a_{11}^{(1)} \neq 0$. Das ist keine Einschränkung: Läßt sich im Fall $a_{11}^{(1)} = 0$ in der ersten Spalte von $A^{(1)}$ ein nichtverschwindender Koeffizient $a_{k1}^{(1)}$ finden, so wird die k-te mit der ersten Zeile vertauscht und die Zeilen neu numeriert. Andernfalls werden noch Spalten vertauscht (mit entsprechender Umnumerierung der Variablen).

Nun wird die erste Zeile von $(A^{(1)}, b^{(1)})$ mit $(-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}})$ multipliziert und die resultierende Zeile zur i-ten Zeile von $(A^{(1)}, b^{(1)})$ addiert, $i = 2, \ldots, m$. Das Ergebnis ist das LGS

$$(A^{(2)}, b^{(2)}) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & | & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} & | & b_m^{(2)} \end{pmatrix} \quad .$$

2. Schritt: Die erste Zeile von $(A^{(2)}, b^{(2)})$ bleibt unverändert. Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $a_{22}^{(2)} \neq 0$. Andernfalls wird, falls es ein $a_{k2}^{(2)} \neq 0\,, k = 3, \dots, m$, gibt, die zweite mit der k-ten Zeile vertauscht. Gegebenenfalls sind vorher noch Spalten zu vertauschen. Nun wird die Variable x_2 aus der dritten bis m-ten Gleichung eliminiert. Dazu wird die 2. Zeile von $(A^{(2)}, b^{(2)})$ mit $(-\frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}})$ multipliziert und zur i-ten Zeile addiert. Das resultierende LGS $(A^{(3)}, b^{(3)})$ lautet dann

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & | & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & | & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & | & b_3^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(3)} & \cdots & a_{mn}^{(3)} & | & b_m^{(3)} \end{pmatrix} \quad .$$

***j*-ter Schritt:** Unter der Vorraussetzung $a_{jj}^{(j)} \neq 0$ werden die Koeffizienten von $(A^{(j+1)}, b^{(j+1)})$ gemäß der folgenden Vorschrift gebildet

$$\left.\begin{array}{lll} a_{ik}^{(j+1)} & := a_{ik}^{(j)} - \frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}} a_{jk}^{(j)} & ,k = j+1, \dots, n\,, \\ & & \\ b_i^{(j+1)} & := b_i^{(j)} - \frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}} b_j^{(j)} & , \end{array}\right\} \; i = j+1, \dots, m \quad .$$

Die ersten j Zeilen von $(A^{(j+1)}, b^{(j+1)})$ stimmen mit denjenigen von $(A^{(j)}, b^{(j)})$ überein. Die restlichen Koeffizienten von $A^{(j+1)}$ verschwinden.
Der Koeffizient $a_{jj}^{(j)}$ wird auch als ***j*-tes Pivotelement** bezeichnet.

Nach r Schritten erhält man ein LGS mit der folgenden erweiterten Matrix, welches die gleiche Lösungsmenge wie das Ausgangssystem $A \cdot x = b$ besitzt:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(1)} & & & & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & & & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{rr}^{(r)} & \cdots & a_{rn}^{(r)} & b_r^{(r)} \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & b_{r+1}^{(r)} \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & b_m^{(r)} \end{array}\right) . \qquad (**)$$

Dann gilt:

1) Die Matrix A hat den Rang r oder $r + 1$.

2) Ist einer der $b_i^{(r)} \neq 0$, $i = r + 1, \ldots, m$, so besitzt $A \cdot x = b$ keine Lösung.

Unter der Vorraussetzung $b_i^{(r)} = 0$, $i = r + 1, \ldots, m$ gilt:

3) Ist $r = n$, so hat das LGS $(**)$ eine obere Dreiecksmatrix als Koeffizientenmatrix. Da $a_{ii}^{(i)} \neq 0$, $i = 1, \ldots, r$, besitzt $A \cdot x = b$ eine eindeutig bestimmte Lösung.

4) Ist $r < n$, dann gibt es unendlich viele Lösungen. Man wählt die $n - r$ Unbekannten $x_{r+i} = \lambda_{r+i} \in K$ beliebig, $i = 1, \ldots, n - r$, und erhält dann für x_i durch Rückwärtseinsetzen

$$x_i = \left(b_i^{(i)} - \sum_{k=i+1}^{r} a_{ik}^{(i)} x_k - \sum_{k=r+1}^{n} a_{ik}^{(i)} \lambda_k \right) / a_{ii}^{(i)} \ ,$$

$i = r, r - 1, \ldots, 1$ (vgl. §7.3.2). Für eine spezielle Wahl der Parameter $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$ spricht man von einer *speziellen Lösung.*

Zu beachten ist, daß im Fall, daß Spaltenvertauschungen vorgenommen wurden, die erhaltenen Komponenten des Lösungsvektors wieder in die ursprüngliche Reihenfolge gebracht werden müssen!

7.3 Lösbarkeit und Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Wir betrachten das LGS $A \cdot x = b$ mit $A \in K^{m,n}, b \in K^m$. Es sei $r = \mathrm{rg}(A)$. Zunächst behandeln wir den homogenen Fall.

7.3.1 Das homogene lineare Gleichungssystem

Satz: Die Lösungsmenge $L(A, o)$ bildet einen Vektorraum über K der Dimension $n - r$.

7.3.2 Das inhomogene lineare Gleichungssystem

Den Ausführungen zum Gauß-Algorithmus können wir unmittelbar entnehmen, daß $A \cdot x = b$ genau dann lösbar ist, wenn der Rang von A mit dem Rang der erweiterten Matrix übereinstimmt.

Satz: Es sei $x^* \in L(A, b)$. Dann lässt sich jede Lösung $x \in L(A, b)$ darstellen als $x = x^* + x^{(0)}$ mit $x^{(0)} \in L(A, o)$.

Damit läßt sich die allgemeine Lösung von $A \cdot x = b$ darstellen als

$$x = x^* + \lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)} + \ldots + \lambda_{n-r} x^{(n-r)} \text{ mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in K \ ,$$

wobei die Vektoren $\{x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n-r)}\}$ eine Basis von $L(A, o)$ bilden.

Im **Sonderfall $\boldsymbol{m = n}$** gilt für das LGS $A \cdot x = b$:

1) Falls $\det A = 0$:

   a) $A \cdot x = o$ besitzt nichttriviale Lösungen, d.h. $x \neq o$.

   b) $A \cdot x = b$ ist nicht für jedes $b \in K^n$ lösbar; existiert eine Lösung, so ist sie mehrdeutig.

2) Falls $\det A \neq 0$, so besitzt $A \cdot x = b$ für jedes $b \in K^n$ eine eindeutig bestimmte Lösung x ; für diese gilt

$$x_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} / |A| \qquad , \; k = 1, \ldots, n \; .$$

(**Cramersche Regel**)

Beweis der Cramerschen Regel:

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{array}{c}
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
\begin{array}{ccccccc}
\cdot x_1 & & \cdot x_{k-1} & & \cdot x_{k+1} & & \cdot x_n \\
\ominus & \longrightarrow & \ominus & & \ominus & \longleftarrow & \ominus
\end{array}
\end{array}
$$

$$
= \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k}x_k & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k}x_k & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk}x_k & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
\underset{\text{Regel 3)}}{=} \quad x_k \ \det A
$$

Mittels Division durch $\det A$ folgt die Behauptung. $\square$

7.4 Die inverse Matrix

Ist A eine reguläre $n \times n$-Matrix, so existiert eine Matrix A^{-1} mit der Eigenschaft $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Sie ist eindeutig bestimmt und wird die **inverse Matrix** zu A genannt. Damit bildet die Menge der regulären Matrizen in $K^{n,n}$ bzgl. der Matrizenmultiplikation eine Gruppe.

Die k-te Spalte von A^{-1} erhält man als Lösung des LGS $A \cdot x = e^{(k)}$, wobei $e^{(k)}$ den k-ten Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Satz: Für reguläre Matrizen A, $B \in K^{n,n}$ gilt

a) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$,

b) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$,

c) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

Die Lösung von $A \cdot x = b$ kann dann auch in der Form $x = A^{-1} \cdot b$ dargestellt werden.

7.5 Überbestimmte Systeme (*)

Lineare Gleichungssysteme mit mehr Gleichungen als Unbekannten besitzen im allgemeinen keine Lösung.
Es sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ und $\mathrm{rg}(A) = n$. Wir multiplizieren die Gleichung

$$Ax = b$$

von links mit der Matrix A^T. Dies liefert das LGS

$$(A^T A)x = A^T b$$

mit der symmetrischen Matrix $A^T A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Die Lösung dieses LGS besitzt die Eigenschaft, daß sie die *Fehlerquadratsumme* $\|b - Ax\|^2$ minimiert. Sie wird als **Kleinste-Quadrate-Lösung** (*least-squares solution*) des Ausgangssystems bezeichnet.

Kapitel 8

Eigenwerte

Definition: Es sei φ eine lineare Abbildung des K-Vektorraumes V in sich selbst. Ein Element $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von φ, wenn es einen Vektor $a \in V, a \neq o$, mit $\varphi(a) = \lambda a$ gibt. Der Vektor a heißt dann zum Eigenwert λ gehöriger **Eigenvektor** ($a \neq o$); die Menge

$$E_\lambda := \{v \in V \,\big|\, \varphi(v) = \lambda v\}$$

heißt **Eigenraum** zum Eigenwert λ.

Bemerkungen:

1) E_λ ist ein Untervektorraum von V. Die Eigenvektoren zu φ sind genau die vom Nullvektor verschiedenen Vektoren in E_λ.

2) Es gilt: $E_\lambda = \mathrm{ke}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_V)$.

Satz: Sind $a^{(i)}, i = 1, \ldots, m$, die zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ von ϕ gehörige Eigenvektoren, so sind $a^{(1)}, \ldots, a^{(m)}$ linear unabhängig.

Es sei V nun ein n-dimensionaler Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ (oder $K = \mathbb{C}$).

Satz: Die lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ werde bei fest gewählter Basis von V durch die Matrix A dargestellt. Dann ist $\lambda \in K$ genau dann ein Eigenwert von φ, wenn gilt

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Definition: Das Polynom $p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

heißt das **charakteristische Polynom** der Matrix A.

Definition: $\operatorname{spur} A := a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ heißt **Spur** von A.

Lemma: Es sei $A \in K^{n,n}$. Dann gilt

$$p_A(\lambda) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0$$

mit $c_n = (-1)^n, \;\; c_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{spur} A \;$ und $c_0 = \det A$.

Bemerkungen:

1) Geht man zu einer anderen Basis von V über, so erhält man i.a. auch eine andere Darstellungsmatrix. Das charakteristische Polynom bleibt allerdings davon unberührt. Es ist daher sinnvoll, vom *Eigenwert einer Matrix* zu sprechen.

2) Das charakteristische Polynom braucht im Fall $K = \mathbb{R}$ überhaupt keine Nullstellen in K besitzen, oder die Anzahl der Nullstellen kann geringer als der Grad des Polynoms sein. Im Fall $K = \mathbb{C}$ liegen sämtliche Nullstellen von p_A in K.

Um die Eigenwerte und -vektoren einer Matrix A über $K = \mathbb{R}$ (oder $K = \mathbb{C}$) zu berechnen, kann wie folgt vorgegangen werden:

1) Bestimme alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_A in K. Dies sind die Eigenwerte von A in K.

2) Ermittle zu jedem Eigenwert λ alle nichttrivialen Lösungen des LGS $(A - \lambda I)x = o$. Diese sind die Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

Definition: Die Vielfachheit der Nullstelle λ von p_A heißt **algebraische Vielfachheit** von λ, während $\dim E_\lambda$ die **geometrische Vielfachheit** genannt wird.

Bemerkung: Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes ist stets kleiner oder gleich seiner algebraischen.

Satz: Die Eigenwerte einer symmetrischen reellen Matrix sind reell, für jeden Eigenwert ist seine algebraische Vielfachheit gleich seiner geometrischen und die zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren sind zueinander orthogonal.

Satz (Geršgorin) (*): Jeder Eigenwert der Matrix $A \in K^{n,n}$ liegt in einer der n Kreisscheiben

$$\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z - a_{ii}| \leq r_i\}$$

mit

$$r_i := \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{ik}| \quad , \quad i = 1, \ldots, n \; .$$

Das gleiche gilt auch für die Kreisradien

$$\tilde{r}_i := \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} |a_{ki}| \quad , \quad i = 1, \ldots, n \; .$$

anstelle der r_i .

Kapitel 9

Graphen (*)

9.1 Grundbegriffe

Gerichteter Graph

Definition: Ein **gerichteter Graph** $G = (V, E)$ ist eine Struktur, die aus einer Menge V und einer Relation $E \subseteq V \times V$ über dieser Menge V besteht. Die Elemente v der Menge V werden **Knoten** (engl. *vertices*) genannt, die Elemente $e = (u, v)$ der Menge E sind die **Kanten** (engl. *edges*) des Graphen. Die Kante e verbindet die Knoten u und v; u heißt deshalb auch **Anfangsknoten** und v **Endknoten** von e. Zwei Knoten, die in einem Graphen durch eine Kante verbunden sind, heißen **adjazent**. Eine **Schlinge** ist eine Kante, für die Anfangs- und Endknoten identisch sind.

Wir werden uns hier beschränken auf Graphen,

- mit der Eigenschaft, daß es zu zwei Knoten $u, v \in V$ höchstens eine Kante $(u, v) \in E$ gibt,
- deren Knotenmenge endlich ist.

Wird im Folgenden das Wort 'Graph' verwendet, so ist es, falls nicht anders gesagt ist, stets in diesem Sinne zu verstehen.

Graphen werden gewöhnlich mit Hilfe geometrischer Diagramme dargestellt. Dabei wird für jeden Knoten $u \in V$ ein Punkt P_u gezeichnet. Eine Kante $e = (u, v)$ wird durch einen Pfeil veranschaulicht, der von Punkt P_u zu Punkt P_v führt.

Definition: Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **vollständig**, wenn für jedes Paar $(u, v) \in V \times V$ eine Kante in G existiert, die u mit v verbindet. Der vollständige Graph mit n Knoten wird mit K_n bezeichnet.

Ungerichteter Graph

Besitzt die Kantenmenge E eines Graphen $G = (V, E)$ die Eigenschaft, als Relation $E \subseteq V \times V$ betrachtet, symmetrisch zu sein, mit jedem $(u, v) \in E$ also auch $(v, u) \in E$ zu enthalten, dann sprechen wir von einem **ungerichtetem Graphen**. In der Diagrammdarstellung wird das deutlich gemacht, indem anstelle der zwei Pfeile von u nach v bzw. von v nach u eine einzige ungerichtete Verbindungslinie gezeichnet wird. Die Kanten eines ungerichteten Graphen können als zweielementige Knotenmenge geschrieben werden, also beispielsweise $\{u, v\} \in E$. Bei ungerichteten Graphen sind Schlingen nicht zugelassen.

Bipartiter Graph

Definition: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt **bipartite**, wenn sich V in zwei disjunkte Mengen V_1 und V_2 so zerlegen läßt, daß jede Kante in G einen Knoten von V_1 mit einem Knoten von V_2 verbindet; G heißt **vollständig bipartite**, wenn jeder Knoten aus V_1 mit jedem Knoten aus V_2 verbunden ist. Besteht V_1 aus n Knoten und V_2 aus m Knoten, dann wird G mit $K_{n,m}$ bezeichnet.

Untergraphen

Definition: Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.
$H = (V_H, E_H)$ heißt **Unter-** oder **Teilgraph** von G, falls $V_H \subseteq V$ und $E_H \subseteq E$ gilt.
Ist $V' \subseteq V$, dann heißt der Graph $G[V'] = (V', E')$ mit

$$E' = \{(u, v) \,|\, u, v \in V' \text{ und } (u, v) \in E\}$$

der durch V' **induzierte Teilgraph** von G.
Für $G[\,V \setminus \{v\}\,]$ bzw. für den Graphen $(V, E \setminus \{e\})$ wird oft auch $G \setminus \{v\}$ bzw. $G \setminus \{e\}$ geschrieben oder noch kürzer $G \setminus v$ bzw. $G \setminus e$.

Knotengrad

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph und v ein Knoten von G. Der **Ausgrad** $outdeg(v)$ von v ist die Zahl der Kanten, die v als Anfangsknoten besitzen, der **Ingrad** $indeg(v)$ von v ist die Zahl der Kanten, die in v enden. Ist G ein ungerichteter Graph, dann stimmen Ingrad und Ausgrad von v überein und es wird kurz von **Grad** $deg(v)$ gesprochen.

Satz:

a) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{|V|} indeg(v_i) = \sum_{i=1}^{|V|} outdeg(v_i) = |E| \ .$$

b) Ist G ungerichtet, dann gilt das **Handschlaglemma**

$$\sum_{i=1}^{|V|} deg(v_i) = 2 \cdot |E| \ .$$

Folgerung: In einem ungerichteten Graphen ist die Zahl der Knoten mit ungeraden Grad gerade.

9.2 Wege

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $u, v \in V$. Ein **Weg** von u nach v ist eine Folge jeweils adjazenter Knoten $v_0, v_1, \ldots, v_l$ mit $u = v_0$ und $v = v_l$ ($l = 0$ ist dabei auch erlaubt und liefert den *trivialen Weg*, der nur aus dem Knoten u besteht). Die *Länge* dieses Weges ist l, u und v sind seine *Endknoten*.
Ein Weg heißt **geschlossen**, falls seine Endknoten gleich sind.

Zusammenhang

Definition: Zwei Knoten u und v eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ heißen **zusammenhängend**, wenn es in G einen Weg von u nach v gibt.

Die Eigenschaft des Zusammenhangs definiert eine Relation auf der Knotenmenge eines ungerichteten Graphen, die als **Zusammenhangsrelation** bezeichnet wird und die eine Äquivalenzrelation bildet.

Definition: Der (ungerichtete) Graph G heißt **zusammenhängend**, wenn die Zusammenhangsrelation lediglich eine Äquivalenzklasse besitzt, wenn es also zu jedem Paar seiner Knoten einen Weg in G gibt, der diese beiden Knoten miteinander verbindet.
Die Äquivalenzklassen der Zusammenhangsrelation heißen **Zusammenhangskomponenten** von G.

Eine Zusammenhangskomponente von G ist also ein Untergraph H mit den folgenden Eigenschaften: H ist zusammenhängend und es gibt keinen zusammenhängenden Untergraphen von G, der H echt umfaßt, also mehr Knoten oder mehr Kanten als H enthält.

9.3 Darstellung von Graphen durch Matrizen

Die Eigenschaft der Graphen, Informationen und Sachverhalte visuell darstellen zu können, hat sie zu einem universellen Beschreibungswerkzeug in den verschiedensten Anwendungsgebieten werden lassen. Um die mit Hilfe von Graphen beschriebenen, mitunter sehr komplexen Informationen und Sachverhalte auch einer Bearbeitung durch den Computer zugänglich machen zu können, bedarf es einer Repräsentation der Graphen - einer so genannten *Datenstruktur* -, die die einfache und effiziente Speicherung und Manipulation von Graphen im Computer erlaubt. Aus vielerlei Gründen hat sich dazu die Matrixdarstellung als besonders geeignet erwiesen.

Definition: Sei $G = (V, E)$ ein (gerichteter) Graph mit der Knotenmenge $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Die $n \times n$-Matrix $A_G = (a_{ik})_{i,k=1,\ldots,n}$ mit

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } (v_i, v_k) \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt *Adjazenzmatrix* von G.

Ist G ungerichtet, so ist A_G symmetrisch.

Besitzt ein ungerichteter Graph mit n Knoten k Zusammenhangskomponenten G_i , $i = 1, \ldots, k$, mit jeweils n_i Knoten, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, dann besitzt A_G auf der Hauptdiagonalen k Blöcke A_{G_i} der Größe $n_i \times n_i$; die übrigen Koeffizienten von A_G verschwinden.

Satz: Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit den Knoten $v_1, \ldots, v_n$ und A_G seine Adjazenzmatrix. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gibt der Koeffizient b_{rs} , $r, s = 1, \ldots, n$, der k-ten Potenz von A_G

$$A_G^k = (b_{rs})_{r,s=1,\ldots,n}$$

die Zahl der Wege der Länge k in G an, die von v_r nach v_s führen.

9.4 Isomorphie auf Graphen

Sowohl bei der geometrischen Darstellung von Graphen durch Diagramme als bei ihrer Repräsentation durch Adjazenzmatrizen hatten wir beobachten können, dass die Art der Zuordnung von Nummern zu den Knoten des Graphen von ganz erheblichen Einfluss war. So ergab eine geänderte Zuordnung der Knoten des Graphen zu den geometrischen Punkten im allgemeinen ein völlig verändertes Diagramm des Graphen; eine veränderte Numnerierung der Knoten führte zu einer andersgestaltigen Adjazenzmatrix, obwohl sich an der Struktur des Graphen eigentlich nichts geändert hatte. Dieses merkwürdige Phänomen aufzuklären, hilft das Konzept der *Graphenisomorphie*.

Definition: Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung $\phi : V \to V'$ gibt, so dass $(\phi(u), \phi(v)) \in E'$ genau dann, wenn $(u, v) \in E$. Die Abbildung ϕ heißt **Graphenisomorphismus**.
Ist $H = (V_H, E_H)$ ein Untergraph von G, so schreiben wir auch kurz $\phi(H)$ für den durch $\phi(V_H)$ induzierten Teilgraphen von G'.

Satz: Sei ϕ ein Graphenisomorphismus von $G = (V, E)$ nach $G' = (V', E')$.

a) Ist H ein Untergraph von G, dann besitzt $\phi(H)$ gleiche Knoten- und Kantenzahl.

b) Ist G ungerichtet, so ist auch G' ungerichtet.

c) Ist v ein Knoten von G mit dem Ingrad/Ausgrad/Grad d, dann hat sein Bildknoten $\phi(v)$ den gleichen Ingrad/Ausgrad/Grad d.

d) Die Abbildung ϕ überführt Wege von G in Wege von G' gleicher Länge.

e) Ist Z eine Zusammenhangskomponente von G, dann ist $\phi(Z)$ eine Zusammenhangskomponente von G' gleicher Größe.

Satz: Die Graphenisomorphie definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Graphen.

9.5 Bäume

In diesem Abschnitt werden nur *ungerichtete* Graphen betrachtet.

Definition: Es sei G ein Graph.

a) Ein **Kreis** in G ist ein geschlossener Weg in G $\{v_0, v_1, \ldots, v_l\}$ $(v_l = v_0)$ mit der Eigenschaft, daß alle Kanten $\{v_k, v_{k+1}\}$, $k = 0, 1, \ldots, l-1$, verschieden sind.

b) G heißt **kreisfrei** (oder *Wald*), wenn er keinen nichttrivialen Kreis enthält.

c) G heißt **Baum**, wenn er kreisfrei und zusammenhängend ist.

Blätter

Definition: Ein Knoten eines Baumes vom Grad 1 wird **Blatt** genannt; die Knoten vom Grad größer als 1 heißen *innere Knoten*.

Satz: Jeder Baum mit mindestens zwei Knoten besitzt wenigstens zwei Blätter.

Satz: Für einen Baum T mit n Knoten gelten die folgenden Aussagen:

a) Je zwei Knoten von T sind durch genau einen Weg verbunden;

b) für jede Kante e von T ist $T \smallsetminus e$ nicht zusammenhängend;

c) für je zwei nicht adjazente Knoten v, w von T enthält $T \cup \{v, w\}$ genau einen Kreis ($T \cup \{v, w\}$ bezeichnet den Graphen, der aus T durch Zufügen der Kante $\{v, w\}$ entsteht);

d) T hat genau $n - 1$ Kanten.

Wurzelbäume

Definition: Ein Wurzelbaum ist ein Baum $T = (V, E)$ zusammen mit einem ausgezeichneten Knoten $r \in V$, der **Wurzel** von T. Ein Knoten $v \in V$ heißt **Nachfolger** von $u \in V$, $v \neq u$, wenn es einen Weg von r nach v gibt, der u enthält. Wenn zusätzlich $\{u, v\} \in E$, heißt er **unmittelbarer Nachfolger** von u. Entsprechend heißt u **Vorgänger**, beziehungsweise **unmittelbarer Vorgänger**, von v.
Als **Höhe** $h(v)$ eines Knotens v von T wird die Länge des (eindeutig existierenden) Weges von r nach v bezeichnet. Alle Knoten der gleichen Höhe i von T bilden die **Schicht** i. Die **Höhe** von T ist

$$h(T) := \max_{v \in V} h(v) .$$

Ein Wurzelbaum kann repräsentiert werden durch ein Array der Länge n, der sog. **Vorgängerliste**, in der für jeden Knoten sein unmittelbarer Vorgänger abgelegt ist, bzw. für die Wurzel sie selbst.

Bemerkungen:

a) Wenn $\deg(r) = 1$ für die Wurzel r gilt, wird r trotzdem nicht als Blatt aufgefaßt. Ist hingegen $\deg(r) = 0$, so wird r als Blatt gezählt.

b) Ein Wurzelbaum zeichnet sich durch folgende Eigenschaften aus:

   - Jeder Knoten außer der Wurzel hat genau einen unmittelbaren Vorgänger.
   - Die Wurzel hat keinen unmittelbaren Vorgänger.

Binäre Bäume

Definition: Ein Wurzelbaum heißt **binär**, falls jeder Knoten höchstens zwei unmittelbare Nachfolger hat.

Satz: Es sei $T = (V, E)$, mit $|V| = n$ ein binärer Wurzelbaum der Höhe h mit b Blättern. Dann gilt:

a) Die i-te Schicht enthält höchstens 2^i Knoten, $i = 0, 1, \ldots, h$.

b) Es gilt $n \leq 2^{h+1} - 1$ und damit $\log_2 n - 1 < h$.

c) Es bestehen die Ungleichungen $b \leq \frac{1}{2}(n-1) + 1$ und

$$b \cdot \log_2 b \leq \sum_{v \text{ ist Blatt}} h(v) \ .$$

Bemerkung: Die in der Teilaussage c) des Satzes rechts des Ungleichheitszeichens auftretende Summe wird **Blätterhöhensumme** genannt und mit $H(T)$ bezeichnet.

9.6 Planare Graphen

Um möglichst übersichtliche Diagramme von Graphen zu erhalten, wird man oft versuchen, Schnittpunkte der Kanten soweit wie möglich zu vermeiden. Es stellt sich unmittelbar die Frage, welche Graphen sich zeichnen lassen, ohne daß sich die Kanten schneiden.

Definition: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt genau dann **planar**, wenn es eine Darstellung von G in der Ebene gibt, in der sich keine zwei verschiedenen Kanten kreuzen, sich diese also höchstens in einem gemeinsamen Endknoten berühren. Eine solche Darstellung heißt *planare Einbettung* und zerlegt die Ebene in zusammenhängende Gebiete, die **Facetten** genannt werden. Genau eines dieser Gebiete ist unbeschränkt.

Satz (Eulersche Polyederformel): Es sei f die Anzahl der Facetten eines ebenen Diagramms eines zusammenhängenden planaren Graphen mit n Knoten und m Kanten. Dann gilt

$$n + f = m + 2\ .$$