Morphologische Filter

Industrielle Bildverarbeitung, Vorlesung No. 8[1]

M. O. Franz

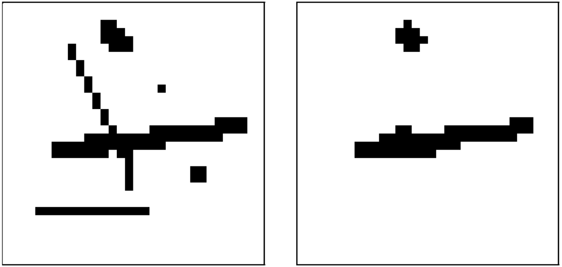
28.11.2007

[1] falls nicht anders vermerkt, sind die Abbildungen entnommen aus Burger & Burge, 2005.

Übersicht

Übersicht

Nichtlineare Filter: Beispiel 3 x 3-Medianfilter

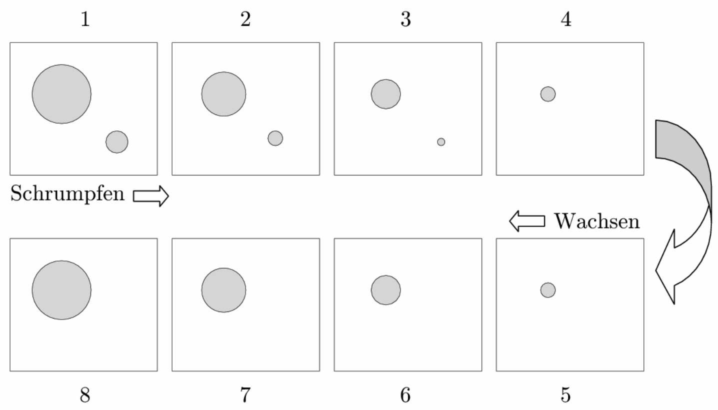


(a) (b)

- Abrundung von Ecken
- Kleine Strukturen verschwinden
- beeinflußt wird die Form der Bildregionen

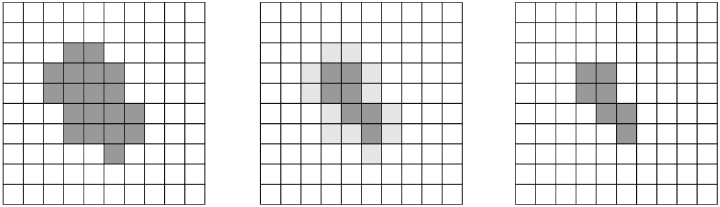
Ziel: Nichtlineare Filter zur gezielten Formveränderung von Bildstrukturen.

Grundidee: schrumpfen und wachsen

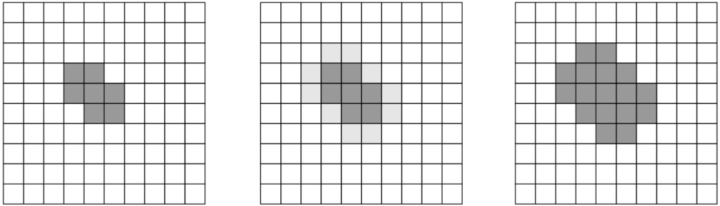


1. Schrittweises Schrumpfen durch Entfernen der Randpixel $\Rightarrow$ kleine Bildstrukturen verschwinden.
2. Übriggebliebene Regionen wieder wachsen lassen

Schrumpfen und Wachsen auf Pixelebene



(a) (b) (c)



(a) (b) (c)

Nachbarschaften bei rechteckigem Bildraster

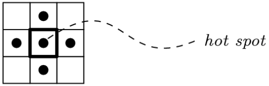
	N_2	
N_1	$\times$	N_4
	N_3	

N_2	N_3	N_4
N_1	$\times$	N_5
N_8	N_7	N_6

- 4er-Nachbarschaft: die vier Pixel, die in horizontaler und vertikaler Richtung angrenzen.
- 8er-Nachbarschaft: 4er-Nachbarschaft + vier diagonale Pixel

Binäre nichtlineare Filter

$H =$

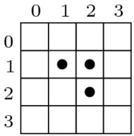


Ähnlich wie beim linearen Filter wird das Verhalten eines morphologischen Filters durch eine binäre Matrix beschrieben, dem sog. Strukturelement H mit

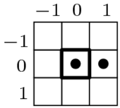
$$H(i,j) \in \{0,1\}.$$

Binärbilder und Strukturelement werden oft Mengen 2-dimensionaler Koordinatenpaare der Vordergrundpixel beschrieben:

$$Q_I = \{(u,v) | I(u,v) = 1\}$$



I



H

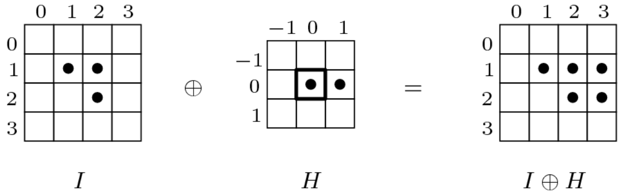
$Q_I = \{(1,1),(2,1),(2,2)\}$ $\quad$ $Q_H = \{(\mathbf{0},\mathbf{0}),(\mathbf{1},\mathbf{0})\}$

Operationen auf Binärbildern in Mengennotation

- Invertierung $I(u,v) \rightarrow \neg I(u,v)$ ist äquivalent zur Bildung der Komplementärmenge:
$$Q_{\neg I} = \overline{Q}_I$$
- Punktweise ODER-Operation $I_1 \vee I_2$ ergibt die Vereinigung der zugehörigen Punktemengen Q_1 und Q_2:
$$Q_{I_1 \vee I_2} = Q_{I_1} \cup Q_{I_2}$$
- Punktweise UND-Operation $I_1 \wedge I_2$ ergibt die Schnittmenge der zugehörigen Punktemengen Q_1 und Q_2:
$$Q_{I_1 \wedge I_2} = Q_{I_1} \cap Q_{I_2}$$
- Vereinfachte Darstellung $I_1 \cup I_2$ bedeutet $Q_{I_1} \cup Q_{I_2}$, $\bar{I}$ bedeutet $\overline{Q}_I$.

Übersicht

Dilatation



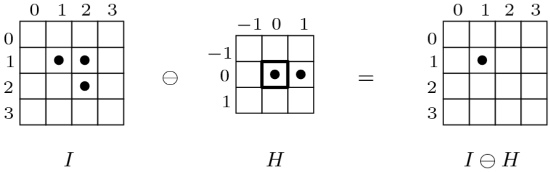
$$\boxed{\begin{aligned} I \oplus H = \{ \; & (1,1) + (\mathbf{0},\mathbf{0}) \;,\; (1,1) + (\mathbf{1},\mathbf{0}) \;, \\ & (2,1) + (\mathbf{0},\mathbf{0}) \;,\; (2,1) + (\mathbf{1},\mathbf{0}) \;, \\ & (2,2) + (\mathbf{0},\mathbf{0}) \;,\; (2,2) + (\mathbf{1},\mathbf{0}) \; \} \end{aligned}}$$

Dilatation führt zum Wachstum einer Bildregion:

$$I \oplus H = \{(u',v') = (u+i, v+j) \,|\, (u',v') \in Q_I, (i,j) \in Q_H\}.$$

Strukturelement H wird an jedem gesetzten Bildpixel repliziert (oder umgekehrt).

Erosion



$$I \ominus H = \{\,(1,1)\,\}\,, \text{weil}$$
$$(1,1) + (\mathbf{0},\mathbf{0}) = (1,1) \in Q_I \quad \text{und} \quad (1,1) + (\mathbf{1},\mathbf{0}) = (2,1) \in Q_I$$

Erosion führt zum Schrumpfen einer Bildregion:

$$I \ominus H = \{(u',v') \,|\, (u'+i, v'+j) \in Q_I, (i,j), \forall (i,j) \in Q_H\}.$$

Es werden nur die Pixel beibehalten, um die herum das Strukturelement vollständig in die Bildregion hineinpaßt.

Aufgabe 8.1

Berechnen Sie die Ergebnisse für die Dilatation und die Erosion zwischen dem folgenden Binärbild und den Strukturelementen H_1 und H_2:

$$I = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline & & & & \bullet & \\ \hline & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & & \bullet & \bullet & \\ \hline & & \bullet & & \bullet & \\ \hline & & & \bullet & & \\ \hline \end{array} \qquad H_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline \bullet & & \\ \hline & \bullet & \\ \hline & & \bullet \\ \hline \end{array} \qquad H_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & \bullet & \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline & \bullet & \\ \hline \end{array}$$

Eigenschaften von Dilatation und Erosion (1)

- Dilatation und Erosion bewirken zwar gegenteilige Effekte, aber sie sind i.A. nicht zueinander invers (z.B. können wegerodierte Details nicht durch eine Dilatation wiederhergestellt werden).
- Eine Dilatation des Vordergrundes kann durch eine Erosion des Hintergrundes erreicht werden und umgekehrt:

$$\bar{I} \oplus H = \overline{I \ominus H} \quad \text{und} \quad \bar{I} \ominus H = \overline{I \oplus H}$$

- Dilatation ist kommutativ:

$$I \oplus H = H \oplus I$$

- Neutrales Element der Dilatation:

$$I \oplus \delta = \delta \oplus I = I, \quad \text{wobei} \quad Q_\delta = \{(0,0)\}$$

Eigenschaften von Dilatation und Erosion (2)

- Dilatation ist assoziativ:

$$(I_1 \oplus I_1) \oplus I_3 = I_1 \oplus (I_2 \oplus I_3)$$

- Eine Dilatation mit einem großen Strukturelement $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n$ kann als Folge von mehreren Dilatationen mit kleinen Strukturelementen H_i dargestellt werden:

$$I \oplus H = (\ldots((I \oplus H_1) \oplus H_2) \oplus \ldots) \oplus H_n$$

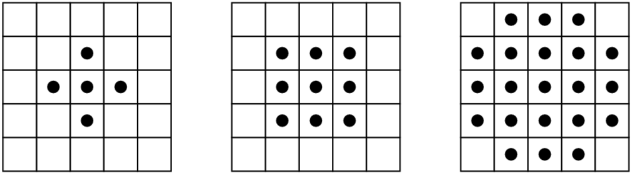
- Erosion ist nicht kommutativ:

$$I \ominus H \neq H \ominus I$$

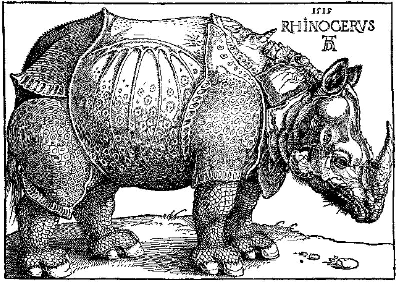
- Zweifache Erosion:

$$(I_1 \ominus I_2) \ominus I_3 = I_1 \ominus (I_2 \oplus I_3)$$

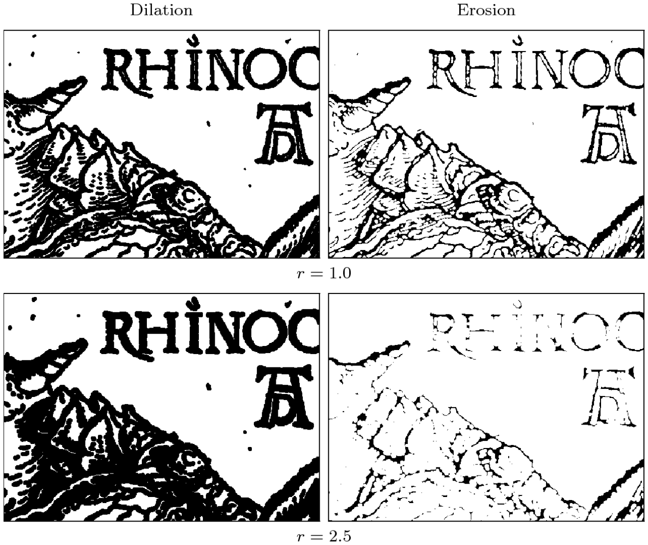
Beispiel: Isotrope Strukturelemente



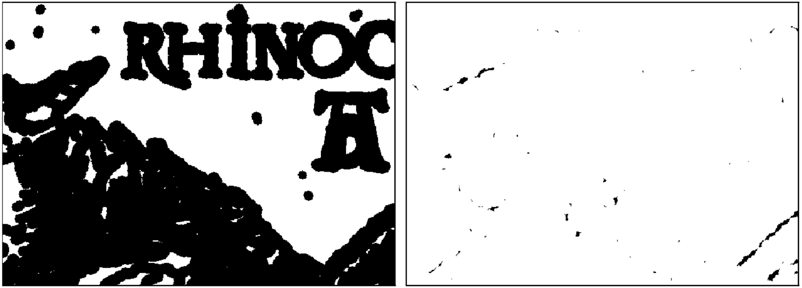
(a) (b) (c)



Beispiel: Unterschiedliche Größe des Strukturelements (1)

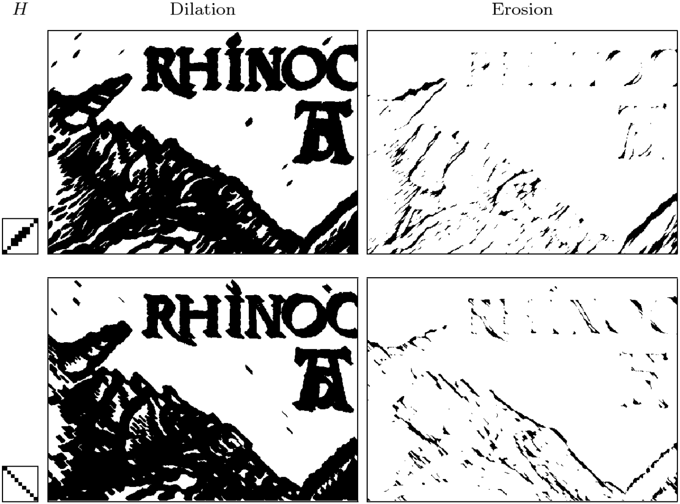


Beispiel: Unterschiedliche Größe des Strukturelements (2)

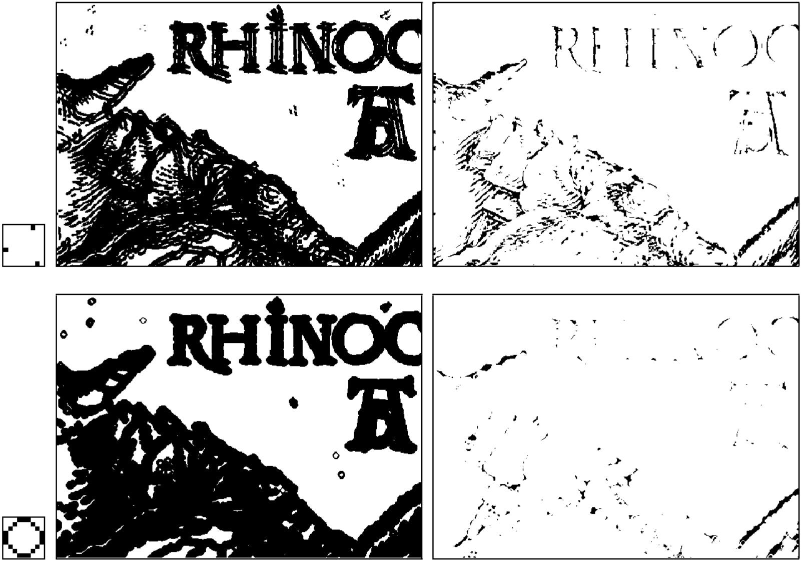


$r = 5.0$

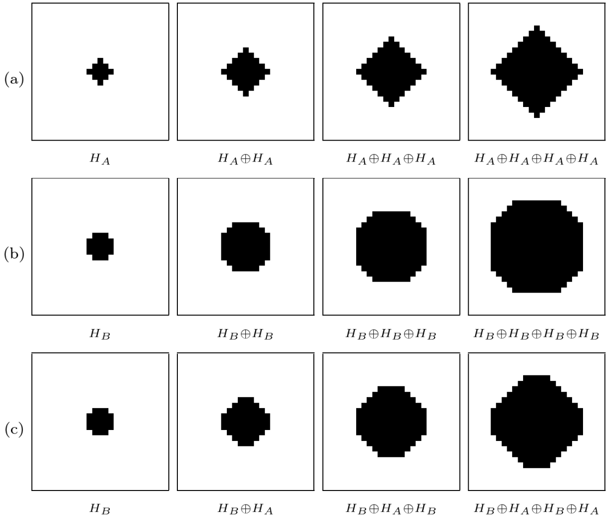
Beispiel: Frei gestaltete Strukturelemente (1)



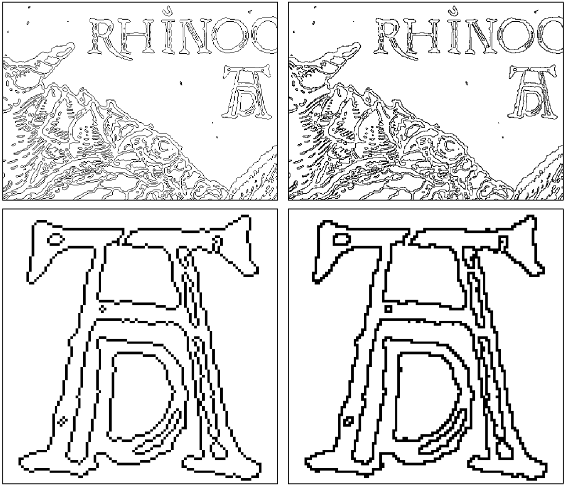
Beispiel: Frei gestaltete Strukturelemente (2)



Beispiel: Mehrfache Anwendung kleiner Strukturelemente



Beispiel: *Outline*



(a) (b)

1. Erosion der Randpixel:

$$I' = I \ominus H$$

2. Inversion $\overline{I'} \Rightarrow$ Hintergrund + Randpixel

3. Schnittmenge mit Originalbild

$$B = I \cap \overline{I'} = I \cap \overline{I \ominus H}$$

enthält nur die Randpixel.

Zusammengesetzte Operationen: *Opening* und *Closing*

Opening: Erosion gefolgt von Dilatation mit demselben H:

$$I \circ H = (I \ominus H) \oplus H$$

entfernt kleine Bildstrukturen.

Closing: Dilatation gefolgt von Erosion:

$$I \bullet H = (I \oplus H) \ominus H$$

füllt Löcher und Zwischenräume in Vordergrundstrukturen.

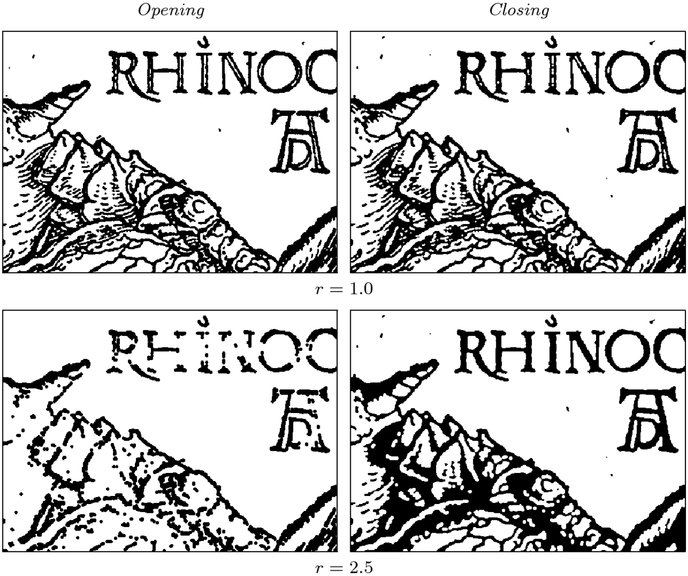
- Opening und Closing sind idempotent, d.h. jede weitere Anendung läßt das Bild unverändert:

$$(I \circ H) \circ H = I \circ H \quad \text{und} \quad (I \bullet H) \bullet H = I \bullet H$$

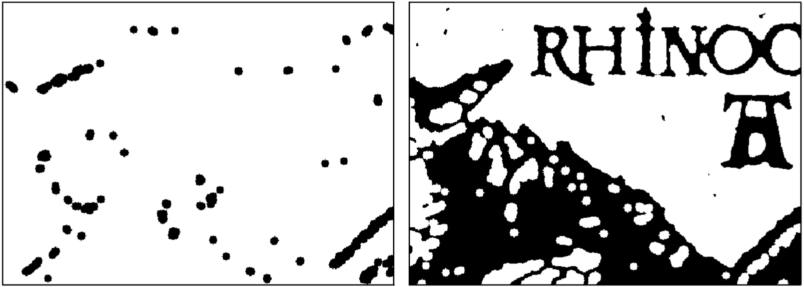
- Opening des Vordergrundes ist äquivalent zu Closing des Hintergrundes (und umgekehrt):

$$I \circ H = \overline{\overline{I} \bullet H} \quad \text{und} \quad I \bullet H = \overline{\overline{I} \circ H}$$

Beispiel: Opening und Closing (1)



Beispiel: Opening und Closing (2)



$r = 5.0$

Übersicht

Strukturelemente für morphologische Operatoren auf Grauwertbildern

Strukturelemente werden nicht als Punktemengen, sondern als diskrete 2D-Funktionen mit beliebigen reellen Werten definiert:

$$H(i,j) \in \mathbb{R}$$

Im Unterschied zur linearen Faltung beeinflussen auch Nullwerte das Ergebnis und dürfen daher nicht weggelassen werden. Leere Zellen werden durch $\times$ markiert:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & \mathbf{2} & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \neq \begin{array}{|c|c|c|}\hline \times & 1 & \times \\ \hline 1 & \mathbf{2} & 1 \\ \hline \times & 1 & \times \\ \hline \end{array}$$

Morphologische Operatoren für Grauwertbilder werden als Varianten des Maximum- bzw. Minimumfilters realisiert.

Grauwert-Dilatation

Grauwert-Dilatation: Ersetze Pixel durch Maximum der Summen aus dem Strukturelement H und der entsprechenden Bildregion I:

$$(I \oplus H)(u,v) = \max_{(i,j)\in H} \{ I(u+i, v+j) + H(i,j) \}$$

$$\overset{I}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 6 & 7 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 6 & 8 \\ \hline 6 & 4 & 5 & 2 \\ \hline 6 & 4 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}} \oplus \overset{H}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & \boxed{2} & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}} = \overset{I \oplus H}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline & 8 & 9 & \\ \hline & 7 & 9 & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}}$$

$$\overset{I+H}{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 7 & 8 & 4 \\ \hline 6 & \boxed{8} & 7 \\ \hline 7 & 5 & 6 \\ \hline \end{array}} \quad \text{max}$$

Grauwert-Erosion

Grauwert-Erosion: Ersetze Pixel durch Minimum der Differenzen aus dem Strukturelement H und der entsprechenden Bildregion I:

$$(I \ominus H)(u,v) = \min_{(i,j)\in H} \{I(u+i, v+j) - H(i,j)\}$$

I

6	7	3	4
5	6	6	8
6	4	5	2
6	4	2	3

$\ominus$

H

1	1	1
1	2	1
1	1	1

$=$

$I \ominus H$

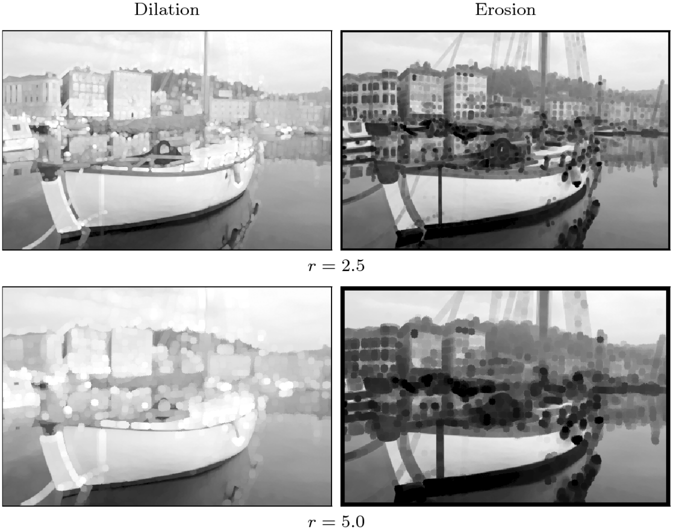
	2	1	
	1	1	

$I - H$

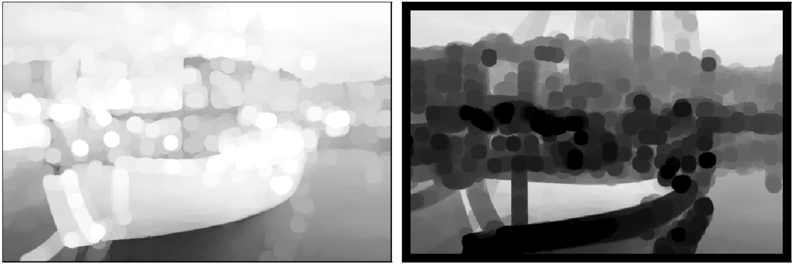
5	6	2
4	4	5
5	3	4

min

Beispiel: Grauwert-Dilatation und -Erosion (1)



Beispiel: Grauwert-Dilatation und -Erosion (2)

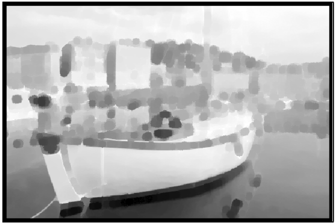


$r = 10.0$

Beispiel: Grauwert-Opening und -Closing (1)

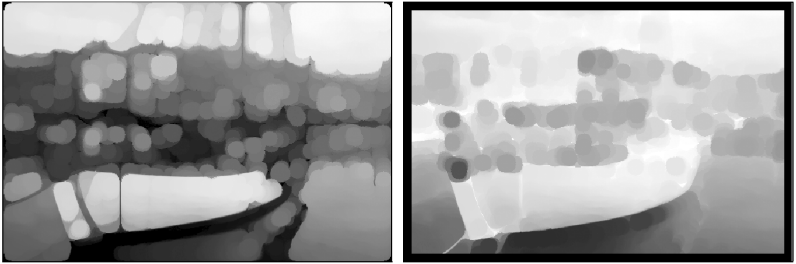
Opening | Closing


$r = 2.5$

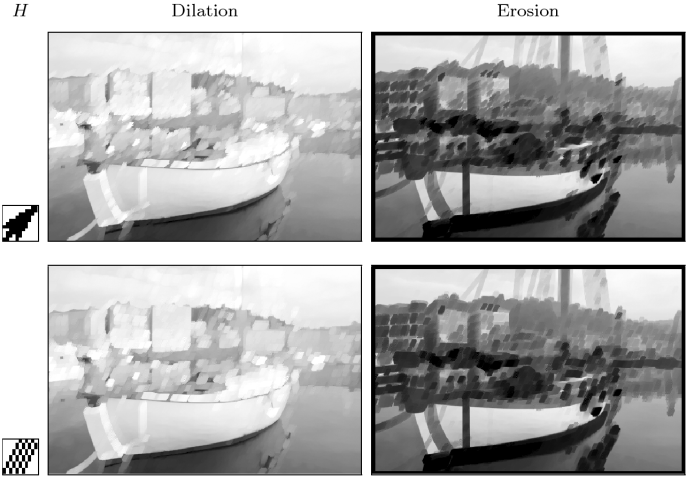
$r = 5.0$

Beispiel: Grauwert-Opening und -Closing (2)



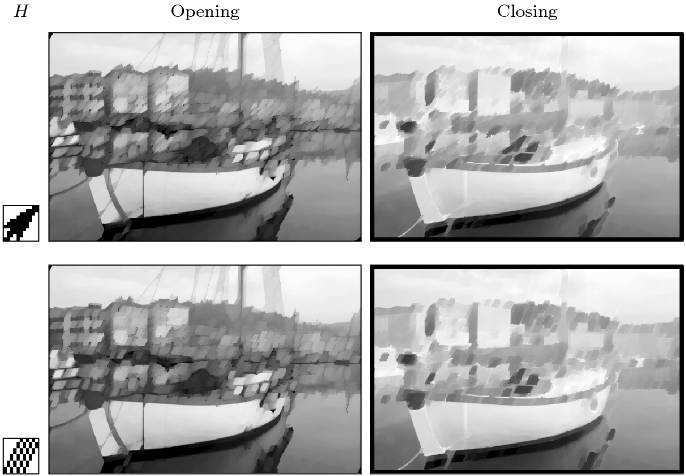
$r = 10.0$

Beispiel: Grauwert-Dilatation und -Erosion mit frei gestalteten Strukturelementen (1)



Beispiel: Grauwert-Dilatation und -Erosion mit frei gestalteten Strukturelementen (2)

Beispiel: Grauwert-Opening und -Closing mit frei gestalteten Strukturelementen (1)



Beispiel: Grauwert-Opening und -Closing mit frei gestalteten Strukturelementen (2)