


Spektraltechniken

Industrielle Bildverarbeitung, Vorlesung No. 11¹

M. O. Franz

19.12.2007

¹ falls nicht anders vermerkt, sind die Abbildungen entnommen aus Burger & Burge, 2005. 

Übersicht

- 1 Diskrete Signale
- 2 Diskrete Fouriertransformation
- 3 Diskrete 2D-Fouriertransformation

Übersicht

- 1 Diskrete Signale
- 2 Diskrete Fouriertransformation
- 3 Diskrete 2D-Fouriertransformation

Impulsfunktion

Impulsfunktion (auch Dirac- oder Deltafunktion):

$$\delta(x) = 0 \quad \text{für } x \neq 0 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

- einzelner Puls am Ursprung
- unendlich dünn und unendlich hoch
- endliche Fläche unter der Kurve

Verhalten bei Skalierung $\delta(x) \rightarrow \delta(sx)$:

$$\delta(sx) = \frac{1}{|s|} \delta(x) \quad \text{für } s \neq 0$$

Benötigt wird die Impulsfunktion u.a. zur formalen Beschreibung des Abtastvorgangs.

Abtastung mit Impulsfunktion (1)

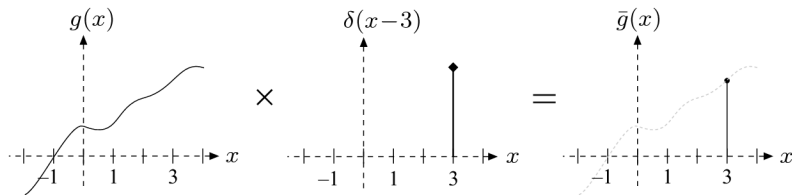
Wird eine kontinuierliche Funktion punktweise mit der Impulsfunktion multipliziert, so erhält man

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \delta(x) = \begin{cases} g(0) & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d.h. einen einzelnen, **diskreten Abtastwert** bei 0.

Durch Verschiebung von $\delta(x)$ an x_0 kann $g(x)$ an **beliebigen Stellen** abgetastet werden:

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \delta(x - x_0) = \begin{cases} g(x_0) & \text{für } x = x_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Abtastung mit Impulsfunktion (2)

Um eine Funktion an mehreren Stellen abzutasten (z.B. x_1 und x_2), werden zuerst 2 verschobene Exemplare von $\delta(x)$ mit $g(x)$ multipliziert und dann addiert:

$$\begin{aligned}\bar{g}(x) &= g(x)\delta(x - x_1) + g(x)\delta(x - x_2) \\ &= g(x)[\delta(x - x_1) + \delta(x - x_2)] \\ &= \begin{cases} g(x_1) & \text{für } x = x_1 \\ g(x_2) & \text{für } x = x_2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

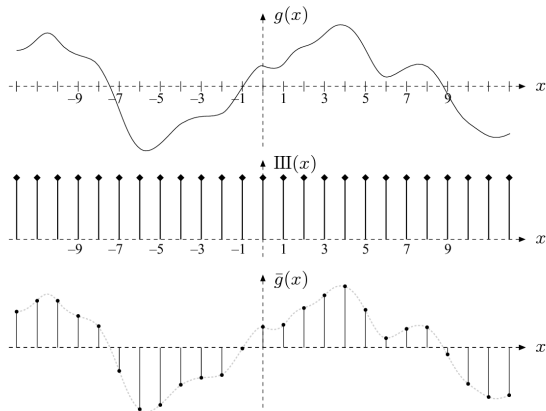
Die Abtastung einer Funktion an einer **Folge** von N Positionen $x_i = 1, 2, \dots, N$ kann daher als Summe von N Einzelabtastungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned}g(x) &= g(x)[\delta(x - 1) + \delta(x - 2) + \dots + \delta(x - N)] \\ &= g(x) \sum_{i=1}^N \delta(x - i)\end{aligned}$$

Abtastung mit der Kammfunktion

Kammfunktion: Verlängerung der Pulsfolge nach ∞ und $-\infty$

$$\text{III}(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(x - i)$$



Abtastung:

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \text{III}(x)$$

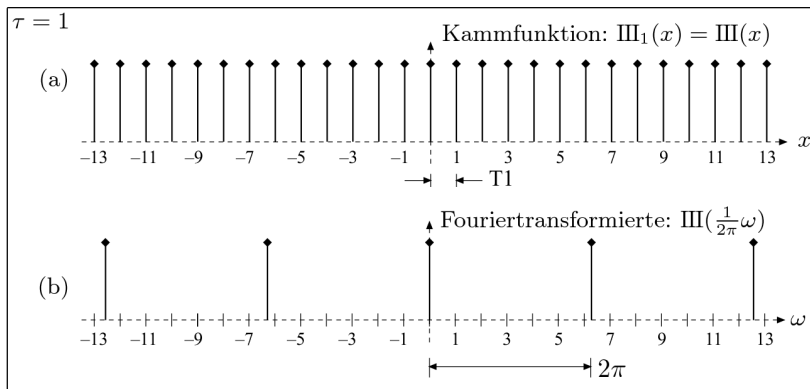
Abtastung im Abstand τ :

$$\bar{g}(x) = g(x) \cdot \text{III}\left(\frac{x}{\tau}\right)$$

Fouriertransformierte der Kammfunktion (1)

Die Fouriertransformierte der Kammfunktion ist wieder eine Kammfunktion:

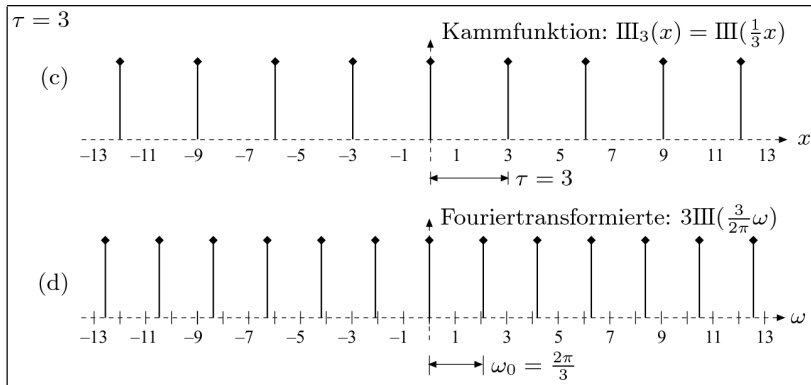
$$\text{III}(x) \circlearrowright \text{III}\left(\frac{1}{2\pi}\omega\right)$$



Fouriertransformierte der Kammfunktion (2)

Kammfunktion mit Abtastintervall τ :

$$\text{III}\left(\frac{x}{\tau}\right) \longleftrightarrow \tau \text{III}\left(\frac{\tau}{2\pi}\omega\right)$$



Fouriertransformierte einer abgetasteten Funktion (1)

- Dem Produkt im Ortsraum entspricht die Faltung im Spektralraum:

$$g(x) \cdot \text{III} \left(\frac{x}{\tau} \right) \circ \bullet g(\omega) * \tau \text{III} \left(\frac{\tau}{2\pi} \omega \right)$$

- Faltung mit der Impulsfunktion ergibt wieder die Originalfunktion:

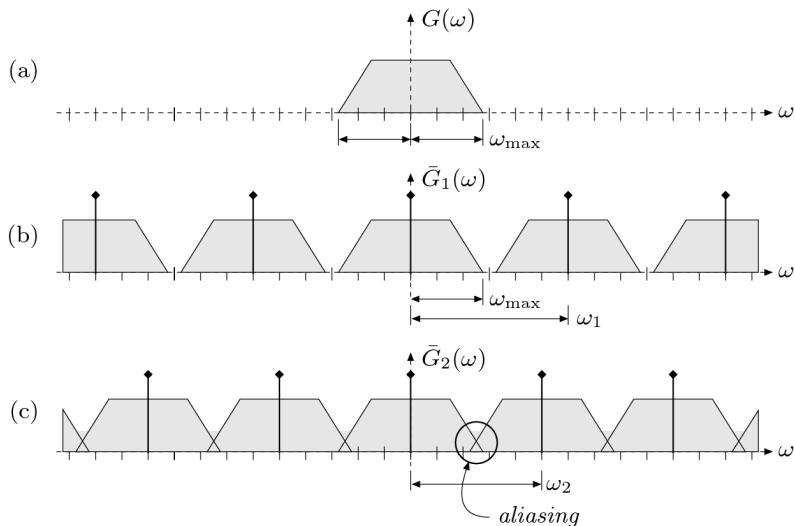
$$f(x) * \delta(x) = f(x)$$

- Faltung mit einem um d verschobenen Impuls reproduziert ebenfalls die Funktion, aber verschoben um Distanz d :

$$f(x) * \delta(x - d) = f(x - d)$$

- Fouriertransformierte einer abgetasteten Funktion: **Spektrum des ursprünglichen, nicht abgetasteten Signals wird unendlich oft an jedem Puls der Kammfunktion repliziert.** Das resultierende Spektrum ist also **periodisch mit Periode $\omega_s = \frac{2\pi}{\tau}$** (Abtastfrequenz).

Fouriertransformierte einer abgetasteten Funktion (2)



Aliasing und Abtasttheorem

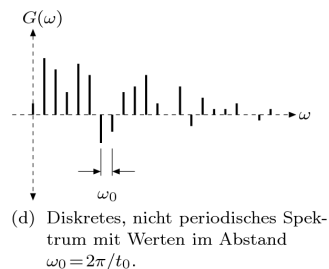
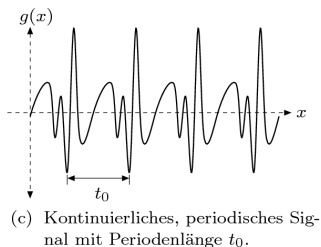
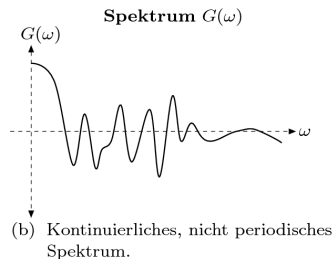
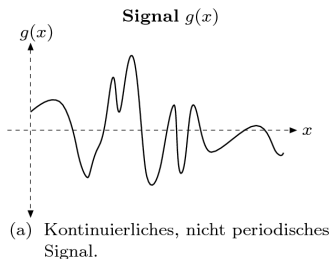
- Solange sich die replizierten Spektren des Originalsignals nicht überlappen, kann das ursprüngliche Signal **ohne Verlust** aus einer der Kopien im Spektrum bzw. aus dem abgetasteten Signal rekonstruiert werden.
- Spektrum muß dafür bandbegrenzt sein: Maximalfrequenz ω_{\max} darf also die halbe Abtastfrequenz ω_s nicht überschreiten:

$$\omega_{\max} \leq \frac{1}{2}\omega_s \quad \text{bzw.} \quad \omega_s \geq 2\omega_{\max}$$

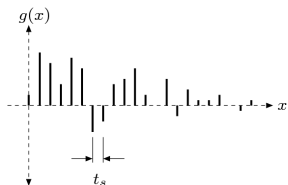
Abtastfrequenz muß mindestens das Doppelte der Bandbreite betragen (**Abtasttheorem**).

- Wird diese Bedingung nicht eingehalten, kann das kontinuierliche Signal nicht mehr fehlerfrei aus dem abgetasteten Signal rekonstruiert werden: **Aliasing**.

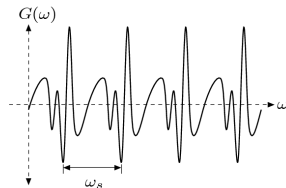
Diskrete und periodische Funktionen (1)



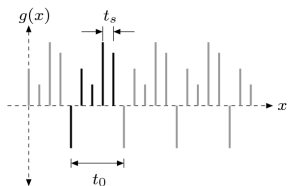
Diskrete und periodische Funktionen (2)



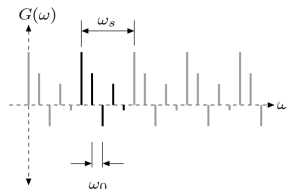
(e) Diskretes, nicht periodisches Signal mit Abtastwerten im Abstand t_s .



(f) Kontinuierliches, periodisches Spektrum mit der Periodenlänge $\omega_s = 2\pi/t_s$.



(g) Diskretes, periodisches Signal, abgetastet im Abstand t_s mit der Periodenlänge $t_0 = t_s M$.



(h) Diskretes, periodisches Spektrum mit Werten im Abstand $\omega_0 = 2\pi/t_0$ und Periodenlänge $\omega_s = 2\pi/t_s = \omega_0 M$.

Übersicht

- 1 Diskrete Signale
- 2 Diskrete Fouriertransformation**
- 3 Diskrete 2D-Fouriertransformation

Diskrete Fouriertransformation

Diskrete, periodische Signale haben ein diskretes, periodisches Spektrum.

Geg.: diskretes Signal $g(u)$ der Länge M ($u = 0, 1, \dots, M - 1$).

Vorwärtstransformation (DFT):

$$G(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g(u) e^{-i2\pi \frac{mu}{M}} \quad \text{für } 0 \leq m < M$$

Inverse Transformation (DFT⁻¹):

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=0}^{M-1} G(m) e^{i2\pi \frac{mu}{M}} \quad \text{für } 0 \leq u < M$$

DFT - Beispiel

u	$g(u)$			$G(m)$		m
0	1.0000	0.0000		14.2302	0.0000	0
1	3.0000	0.0000	DFT	-5.6745	-2.9198	1
2	5.0000	0.0000	→	*0.0000	*0.0000	2
3	7.0000	0.0000		-0.0176	-0.6893	3
4	9.0000	0.0000		*0.0000	*0.0000	4
5	8.0000	0.0000		0.3162	0.0000	5
6	6.0000	0.0000		*0.0000	*0.0000	6
7	4.0000	0.0000	DFT ⁻¹	-0.0176	0.6893	7
8	2.0000	0.0000	←	*0.0000	*0.0000	8
9	0.0000	0.0000		-5.6745	2.9198	9
	Re	Im		Re	Im	

Diskrete Basisfunktionen

Komponentennotation statt Eulersche Schreibweise:

$$G(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} \underbrace{\left[g_{\text{Re}}(u) + i \cdot g_{\text{Im}}(u) \right]}_{g(u)} \cdot \left[\underbrace{\cos\left(2\pi \frac{mu}{M}\right)}_{C_m^M(u)} - i \cdot \underbrace{\sin\left(2\pi \frac{mu}{M}\right)}_{S_m^M(u)} \right]$$

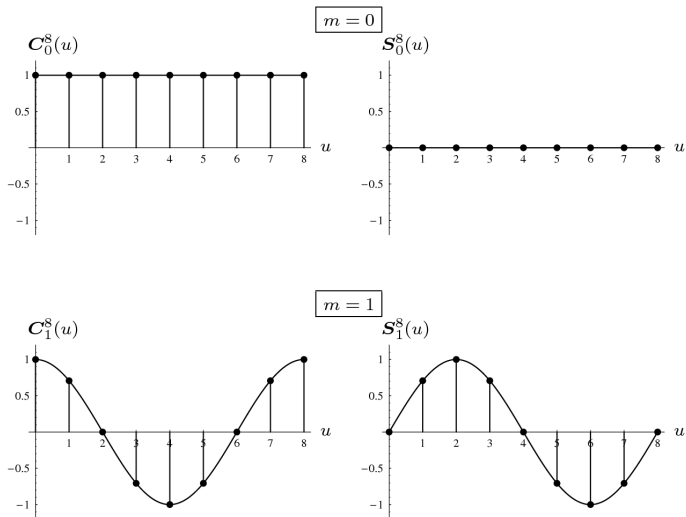
Real- und Imaginärteil des diskreten Fourierpektrums:

$$G_{\text{Re}}(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g_{\text{Re}}(u) C_m^M(u) + g_{\text{Im}}(u) S_m^M(u)$$

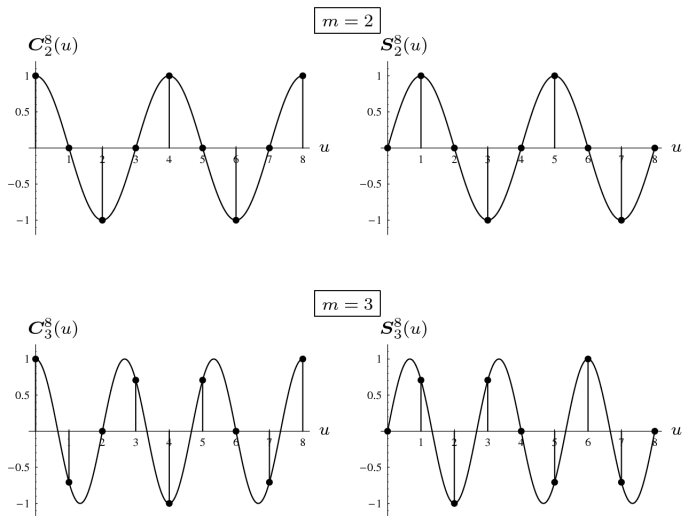
$$G_{\text{Im}}(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g_{\text{Im}}(u) C_m^M(u) - g_{\text{Re}}(u) S_m^M(u)$$

Die Basisfunktionen sind Cosinus- und Sinusfunktionen mit einer diskreten Frequenz m und einer Länge von M Abtastpunkten.

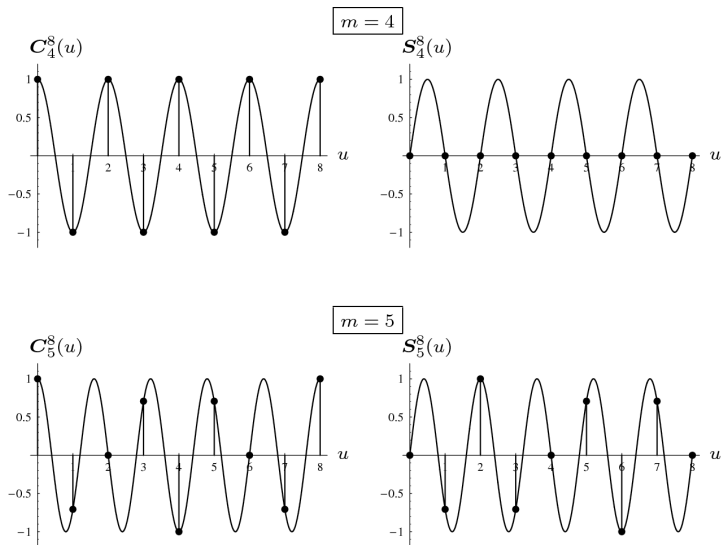
Diskrete Basisfunktionen (1)



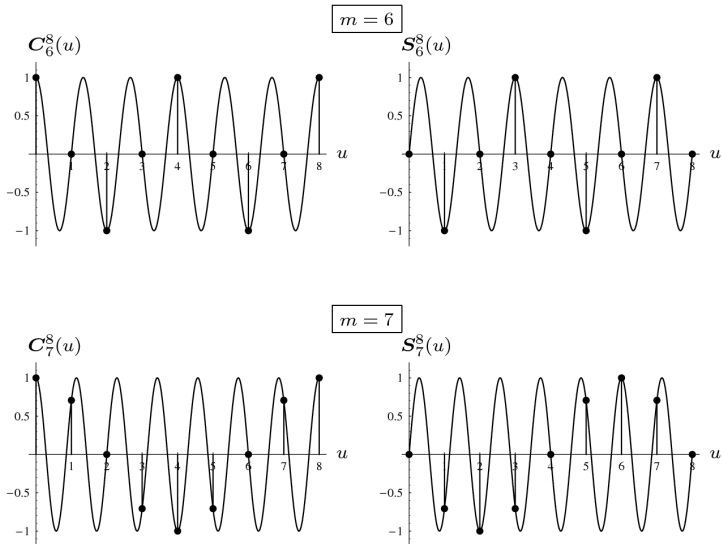
Diskrete Basisfunktionen (2)



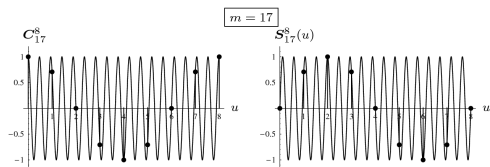
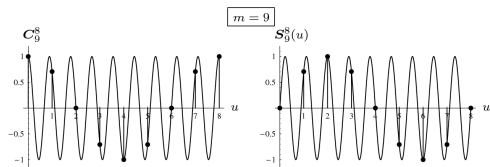
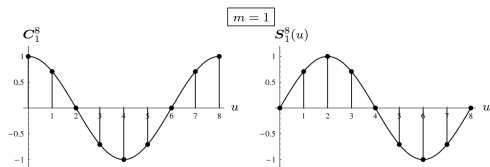
Diskrete Basisfunktionen (3)



Diskrete Basisfunktionen (4)



nochmals Aliasing...



Zu jeder Komponente mit Wellenzahl $m > M/2$ gibt es eine identische Komponente mit $m \leq M/2$. Durch diese Überlagerung können diese Komponenten aus dem abgetasteten Signal nicht rekonstruiert werden.

Symmetrien:

$$\begin{aligned}
 & |G(m)| \\
 &= |G(M - m)| = |G(M + m)| \\
 &= |G(2M - m)| = |G(2M + m)| \\
 &= |G(kM - m)| = |G(kM + m)|
 \end{aligned}$$

Einheiten im Orts- und Spektralraum

Annahme: periodisches Signal wird innerhalb einer Periode an M Punkten im Abstand τ abgetastet.

Der **Wellenzahl** $m = 1$ entspricht dann der Grundperiode des Signals, d.h. einer Schwingung im Intervall $M\tau$ mit der Frequenz

$$f_1 = \frac{1}{M\tau}$$

I.A. entspricht der Wellenzahl m des diskreten Spektrums der Frequenz bzw. Kreisfrequenz

$$f_m = m \frac{1}{M\tau} = m \cdot f_1 \quad \text{bzw.} \quad \omega_m = 2\pi f_m = m \frac{2\pi}{M\tau} = m\omega_1$$

Die Abtastfrequenz $f_s = 1/\tau = Mf_1$ entspricht der Wellenzahl $m_s = M$, die Grenzfrequenz (**Nyquistfrequenz**)

$$m_{\max} = \frac{M}{2} = \frac{m_s}{2}$$

Aufgabe 11

- 1 Das Zeitsignal $g(u)$ (z.B. ein Tonsignal) besteht aus $M = 500$ Abtastwerten im Intervall $\tau = 1\text{ms}$.
 - a. Was ist die Abtastfrequenz? Was ist die Grundperiode des Signals? Was ist seine Grundfrequenz?
 - b. Welcher realen Frequenz entspricht die Wellenzahl $m = 2$? Was ist hier die Nyquistfrequenz?
- 2 Ein eindimensionales Druckraster mit einer Auflösung (Abtastfrequenz) von 120 Punkten pro cm hat die Länge $M = 1800$ Punkte. Was ist die Grundfrequenz in Zyklen pro cm? Was ist hier die feinste Struktur (Frequenz), die aufgelöst werden kann?

Übersicht

- 1 Diskrete Signale
- 2 Diskrete Fouriertransformation
- 3 Diskrete 2D-Fouriertransformation**

Diskrete zweidimensionale Fouriertransformation

Für eine zweidimensionale, periodische Funktion $g(u, v)$ der Größe $M \times N$ ist die **2D-DFT**

$$\begin{aligned} G(m, n) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} g(u, v) e^{-i2\pi \frac{mu}{M}} e^{-i2\pi \frac{nv}{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} g(u, v) e^{-i2\pi \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right)} \end{aligned}$$

Inverse 2D-DFT⁻¹:

$$\begin{aligned} g(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} G(m, n) e^{i2\pi \frac{um}{M}} e^{i2\pi \frac{vn}{N}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} G(m, n) e^{i2\pi \left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N} \right)} \end{aligned}$$

2D-Basisfunktionen

Die zweidimensionale Funktion $g(u, v)$ wird beschrieben als eine gewichtete Summe von zweidimensionalen, komplexen Funktionen

$$e^{i2\pi\left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N}\right)} = \underbrace{\cos\left[2\pi\left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N}\right)\right]}_{C_{m,n}^{M,N}(u,v)} + i \cdot \underbrace{\sin\left[2\pi\left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N}\right)\right]}_{S_{m,n}^{M,N}(u,v)}$$

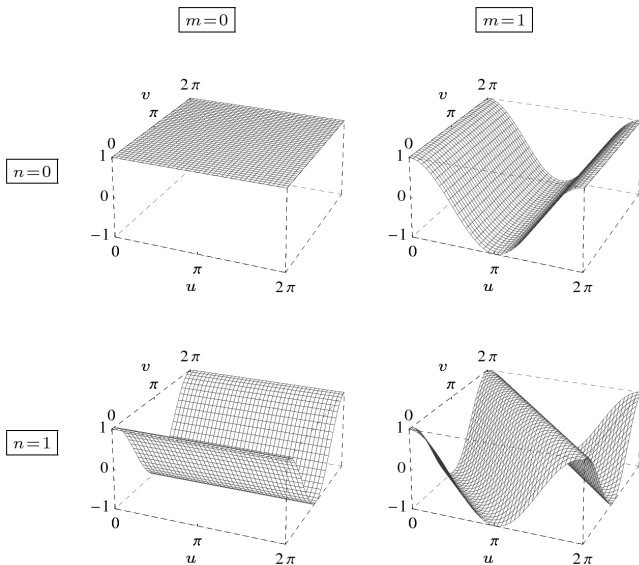
Dabei sind $C_{m,n}^{M,N}(u, v)$ und $S_{m,n}^{M,N}(u, v)$ zweidimensionale Cosinus- bzw. Sinusfunktionen mit **horizontaler Wellenzahl** m und **vertikaler Wellenzahl** n

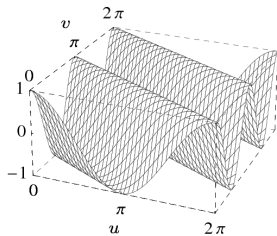
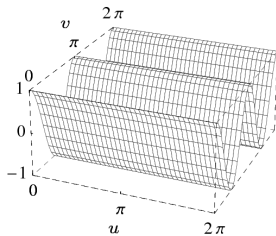
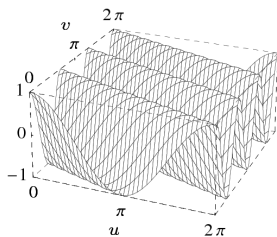
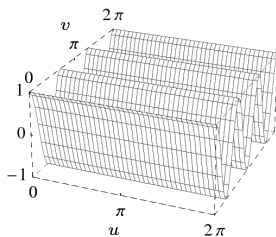
$$C_{m,n}^{M,N}(u, v) = \cos\left[2\pi\left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N}\right)\right]$$

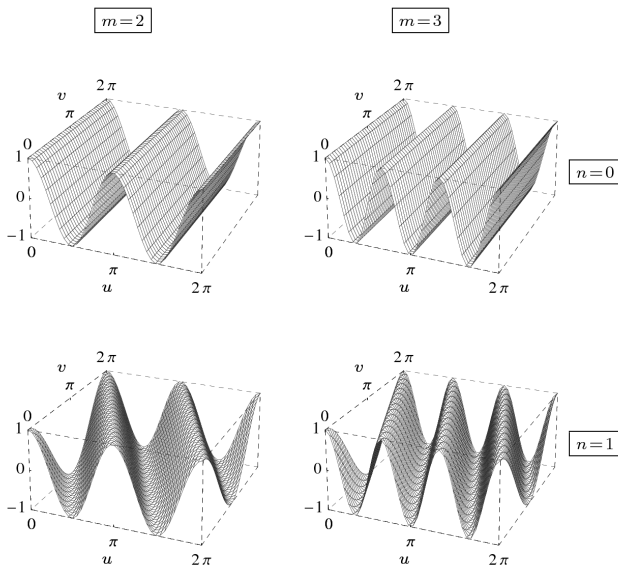
$$S_{m,n}^{M,N}(u, v) = \sin\left[2\pi\left(\frac{um}{M} + \frac{vn}{N}\right)\right]$$

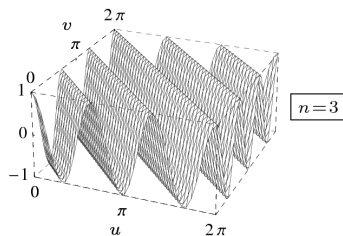
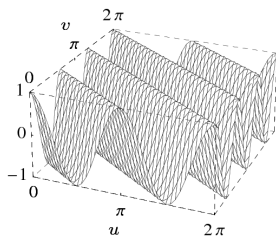
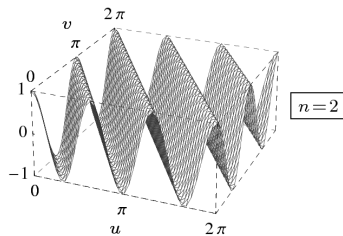
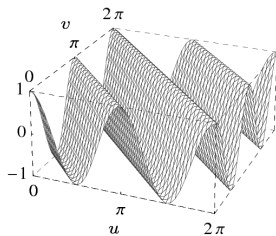
d.h. orientierte Wellenfunktionen.

2D-Basisfunktionen $C_{m,n}^{M,N}(u, v)$ (1)



2D-Basisfunktionen $C_{m,n}^{M,N}(u, v)$ (2) $n=2$  $n=3$ 

2D-Basisfunktionen $C_{m,n}^{M,N}(u, v)$ (3)

2D-Basisfunktionen $C_{m,n}^{M,N}(u, v)$ (4)

Implementierung der zweidimensionalen DFT

Umformung der 2D-DFT

$$G(m, n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{v=0}^{N-1} \left[\underbrace{\frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} g(u, v) \cdot e^{-i2\pi \frac{um}{M}}}_{\text{1-dim. DFT der Zeile } g(\cdot, v)} \right] \cdot e^{-i2\pi \frac{vn}{N}}$$

d.h. Hintereinanderausführung zweier eindimensionaler DFTs.

- 1: SEPARABLE 2D-DFT ($g(u, v) \in \mathbb{C}$) $\triangleright 0 \leq u < M, 0 \leq v < N$
- 2: **for** $v \leftarrow 0 \dots N-1$ **do**
- 3: Let $g(\cdot, v)$ be the v^{th} row vector of g :
 Replace $g(\cdot, v)$ by $\text{DFT}(g(\cdot, v))$.
- 4: **for** $u \leftarrow 0 \dots M-1$ **do**
- 5: Let $g(u, \cdot)$ be the u^{th} column vector of g :
 Replace $g(u, \cdot)$ by $\text{DFT}(g(u, \cdot))$.
- 6: *Remark:*
 $g(u, v) = G(u, v) \in \mathbb{C}$ now contains the discrete 2D spectrum.

Darstellung der Fouriertransformierten in 2D

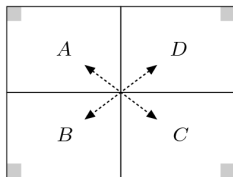
Statt ein Bild des Real- und eines des Imaginärteils zu zeigen, wird häufig der Betrag $|G(m, n)|$ der DFT dargestellt (**Amplitudenspektrum**), oft auch logarithmiert.

Da die transformierten Bilder reellwertig sind, ist das Amplitudenspektrum symmetrisch zum Ursprung, d.h.

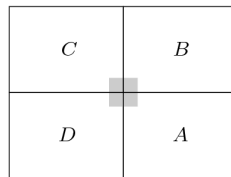
$$|G(m, n)| = |G(-m, -n)|$$

Üblicherweise wird daher der Ursprung **zentriert** dargestellt. Dies geschieht durch eine Umordnung der Quadranten unter der Nutzung dieser Symmetrieeigenschaft.

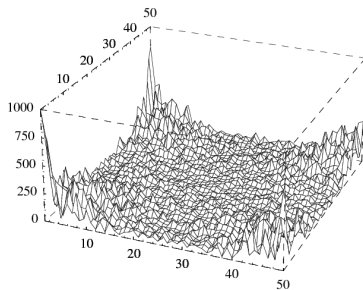
Zentrierte Darstellung



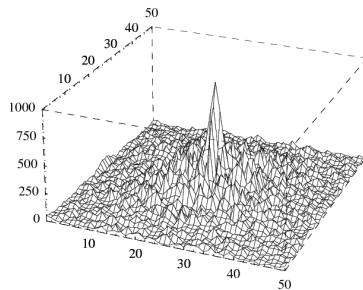
(a)



(b)



(c)



(d)

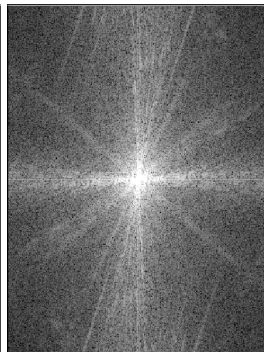
Darstellung als logarithmiertes Intensitätsbild



(a)



(b)



(c)