Matthias O. Franz

Rechts oder links?

Lösung der Aufgabe vom 18.10.2007

1. Sie kommen auf eine Insel, von der Sie wissen, daß die Einwohner in 2/3 aller Fälle lügen. An einer Weggabelung angekommen, wissen Sie nicht mehr weiter. Sie schätzen, daß Ihr Ziel mit 60% Wahrscheinlichkeit links liegt und fragen sicherheitshalber den Einheimischen A. Dieser sagt "rechts". Wie entscheiden Sie sich?

Unser Vorwissen, daß das Ziel mit 60% Wahrscheinlichkeit links liegt, gibt die A-priori-Wahrscheinlichkeit, d.h. unser Wissen, bevor wir einen Einheimischen befragen:

$$p(\text{re}) = \frac{2}{5} \quad \text{und} \quad p(\text{li}) = \frac{3}{5}$$

Die Likelihood, d.h. die Wahrscheinlichkeit für die Antwort "rechts" oder "links" *gegeben* die wirkliche Richtung ist entweder rechts oder links, umfaßt vier Fälle:

$$\begin{aligned}
\text{A lügt:} \quad p(\text{"li"}|\text{re}) &= \frac{2}{3} \quad \text{und} \quad p(\text{"re"}|\text{li}) = \frac{2}{3} \\
\text{A lügt nicht:} \quad p(\text{"li"}|\text{li}) &= \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad p(\text{"re"}|\text{re}) = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Als nächsten Schritt benötigen wird die Evidenz, d.h. die Wahrscheinlichkeit unserer Beobachtung. In unserem Fall ist dies also die Wahrscheinlichkeit, daß A mit " rechts" antwortet:

$$\begin{aligned}
p(\text{"re"}) &= p(\text{"re"}|\text{li})p(\text{li}) + p(\text{"re"}|\text{re})p(\text{re}) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir alle Terme der Bayesformel zusammen. Die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der linken Abzweigung nach Befragung des Einheimischen A ist damit

$$\begin{aligned}
p(\text{li}|\text{"re"}) &= \frac{p(\text{"re"}|\text{li})p(\text{li})}{p(\text{"re"})} \\
&= \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Unser Ziel liegt also nach Befragung von A mit noch größerer Wahrscheinlichkeit links, nämlich 75%.

2. Nun fragen Sie einen weiteren Einheimischen, B, ob A gelogen hat. Dieser antwortet mit "Nein". Ändern Sie Ihre Entscheidung nach dieser Auskunft?

Durch die Befragung hat sich unsere A-priori-Wahrscheinlichkeit nicht verändert, aber die Likelihood: Wir haben jetzt zwei Beobachtungen mit jeweils zwei möglichen Antworten statt einer. Entsprechend verdoppelt sich die Anzahl der Fälle:

$$\begin{array}{rrl}
\text{A und B lügen:} & p(\text{"nein", "li"}|\text{re}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9} & \text{und} \quad p(\text{"nein", "re"}|\text{li}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \\
\text{A lügt, B nicht:} & p(\text{"ja", "li"}|\text{re}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9} & \text{und} \quad p(\text{"ja", "re"}|\text{li}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{9} \\
\text{B lügt, A nicht:} & p(\text{"ja", "li"}|\text{li}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9} & \text{und} \quad p(\text{"ja", "re"}|\text{re}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9} \\
\text{A und B lügen nicht:} & p(\text{"nein", "li"}|\text{li}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9} & \text{und} \quad p(\text{"nein", "re"}|\text{re}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}
\end{array}$$

Die Evidenz für beide Antworten zusammen ist nun:

$$\begin{aligned}
p(\text{"nein", "re"}) &= p(\text{"nein", "re"}|\text{li})p(\text{li}) + p(\text{"nein", "re"}|\text{re})p(\text{re}) \\
&= \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{5} + \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{5} = \frac{14}{45}.
\end{aligned}$$

Die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit für links nach Befragung von A und B ist somit

$$\begin{aligned}
p(\text{li}|\text{"nein", "re"}) &= \frac{p(\text{"nein", "re"}|\text{li})p(\text{li})}{p(\text{"nein", "re"})} \\
&= \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{14}{45}} = \frac{6}{7}.
\end{aligned}$$

Die zusätzliche Befragung von B hat unsere Gewißheit weiter erhöht. Jetzt liegt das Ziel mit ca. 87%iger Sicherheit links.