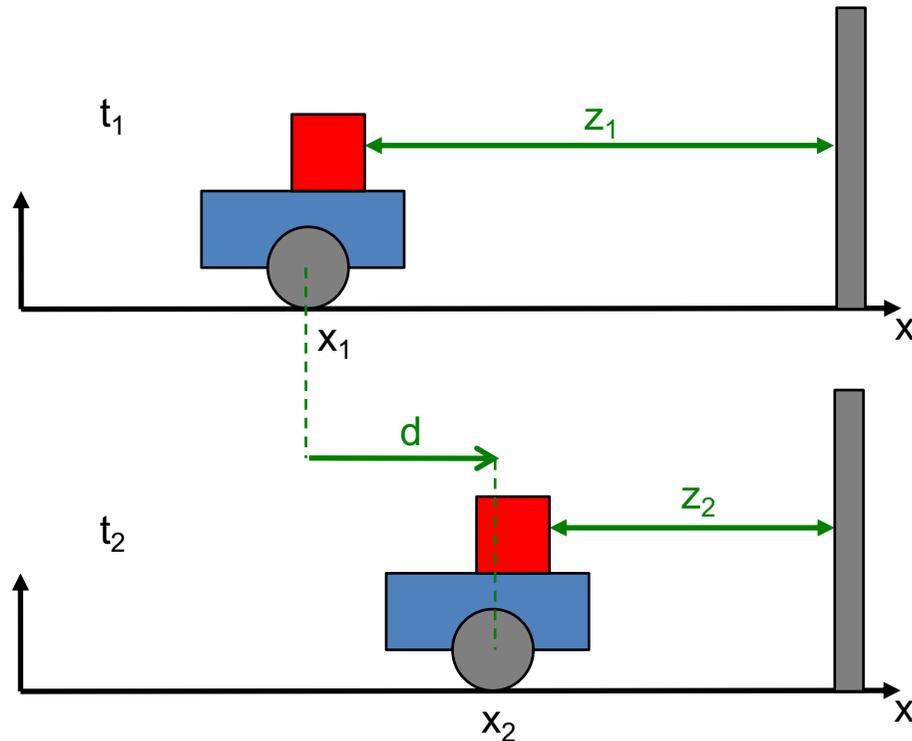


# Modellierung von Unsicherheit in Systemen

- Motivation
- Systeme
  - Zeitdiskrete, lineare und nicht-lineare Systeme, Beispiele
- Wahrscheinlichkeiten
  - Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeitsdichten, mehrdimensionale Zufallsvariablen, Erwartungswert, Varianz, Kovarianz, Gesetze
- Normalverteilung
  - Ein- und mehrdimensional, Fehlerellipsen, Summe und Produkt, Fehlerfortpflanzung, Beispiele
- Monte-Carlo-Simulation
  - Partikelmengen, Fehlerfortpflanzung, Beispiele

# Motivation



- Roboter befindet sich zum Zeitpunkt  $t_1$  an Position  $x_1$  und misst Abstand  $z_1$  zur Wand.
- Roboter bewegt sich im nächsten Zeitschritt um  $d$  nach vorne in die Position  $x_2$  und misst erneut den Abstand zur Wand  $z_2$ .

## Typische Fragestellungen:

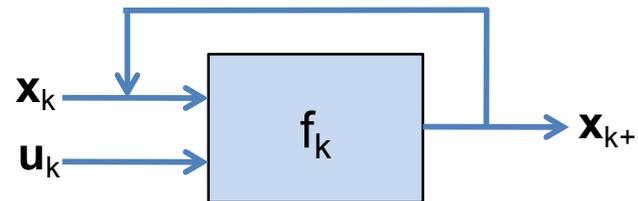
- Wie ungenau ist die Positionsschätzung bei ungenauer Sensormessung und ungenauer Kenntnis der Wand?
- Wie pflanzt sich die Ungenauigkeit in der Position fort, wenn Bewegung nur ungenau gemessen werden kann?
- Wie lässt sich die Ungenauigkeit der Position verbessern, wenn erneut Sensormessung verfügbar ist?

# Zeitdiskrete Systeme

---

- Wir betrachten Systeme zu diskreten Zeitpunkten  $t_0, t_1, t_2, \dots$
- Der Abstand zwischen den Zeitpunkten ist typischerweise konstant (Abtastintervall)  $T = t_{k+1} - t_k$ .
- Die Systemgleichung beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Zustand  $\mathbf{x}_k$  zum Zeitpunkt  $t_k$  und dem Folgezustand  $\mathbf{x}_{k+1}$  zum Zeitpunkt  $t_{k+1}$ :

$$\mathbf{x}_{k+1} = f_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$



- $\mathbf{x}_k$ : n-dimensionaler Zustandsvektor zum Zeitpunkt  $t_k$
- $\mathbf{u}_k$ : m-dimensionaler Eingangsvektor (Steuervektor) zum Zeitpunkt  $t_k$
- $f_k$  kann von der Zeit abhängen
- zeitinvariantes System, falls  $f_k$  nicht von der Zeit abhängt.
- im allgemeinen ist  $f_k$  nicht-linear.

# Lineare Systeme

---

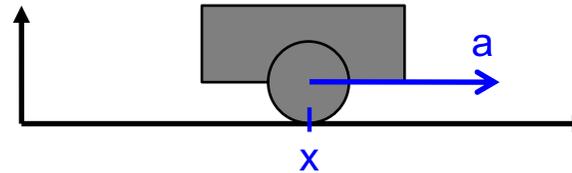
- Ein wichtiger Spezialfall sind lineare Systeme

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k$$

- $\mathbf{A}_k$ :  $n \times n$ -dimensionale Systemmatrix
- $\mathbf{B}_k$ :  $n \times m$ -dimensionale Steuermatrix
- $\mathbf{A}_k$  und  $\mathbf{B}_k$  können von der Zeit abhängen
- sonst zeitinvariantes System

# Beispiel 1

- Roboter wird mit konstantem  $a$  horizontal beschleunigt (z.B. mit einem Elektromotor).



- Systemzustand besteht aus Position und Geschwindigkeit:

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ v_k \end{pmatrix}$$

- Steuervektor ist die Beschleunigung

$$\mathbf{u}_k = a$$

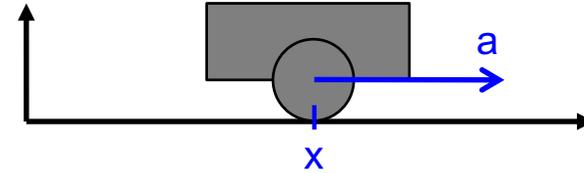
- Unter der Annahme, dass in der Zeitspanne  $T$  die Geschwindigkeit konstant ist, ergibt sich folgendes lineares und zeitinvariantes System:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ v_{k+1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_k \\ v_k \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{a}_{\mathbf{u}_k}$$

# Bemerkung

- Eigentlich sind Systeme kontinuierlich.
- Systemgleichung ist dann eine Differentialgleichung.  
Für den beschleunigten Roboter wäre das:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_k \\ \dot{v}_k \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_k} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_k \\ v_k \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{a}_{\mathbf{u}_k}$$
$$\dot{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$$



- Die zeitdiskreten Systeme sind eine numerische Approximation. Die Approximationsfehler sind jedoch weitaus geringer als die Fehler, die später durch Sensorik und Aktorik in den Systemen entstehen.
- Zeitdiskrete Systeme sind einfacher zu behandeln.
- In der Praxis sind Robotersysteme diskret gesteuert. Typisches Abtastintervall ist dabei  $T = 0.01$  sec.

# Beispiel 2

- Horizontal geworfener Ball
- Systemzustand besteht aus Position und Geschwindigkeit in x und y-Richtung:

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} x_k & y_k & v_{x_k} & v_{y_k} \end{pmatrix}^T$$

- Anfangszustand:

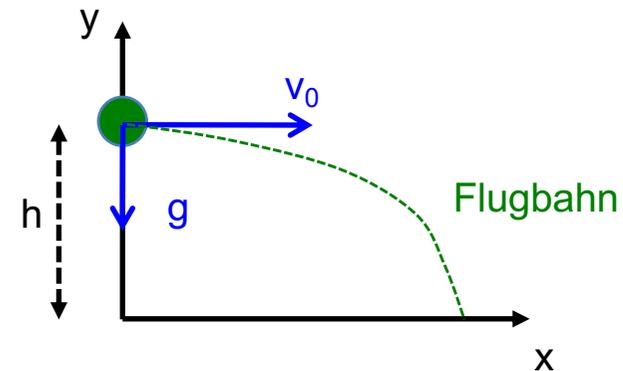
$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & h & v_0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

- Steuervektor ist die Gravitation:

$$\mathbf{u}_k = g$$

- Systemgleichung ist linear und zeitinvariant:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ v_{x_{k+1}} \\ v_{y_{k+1}} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_{k+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ v_{x_k} \\ v_{y_k} \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}_k} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{u}_k$$

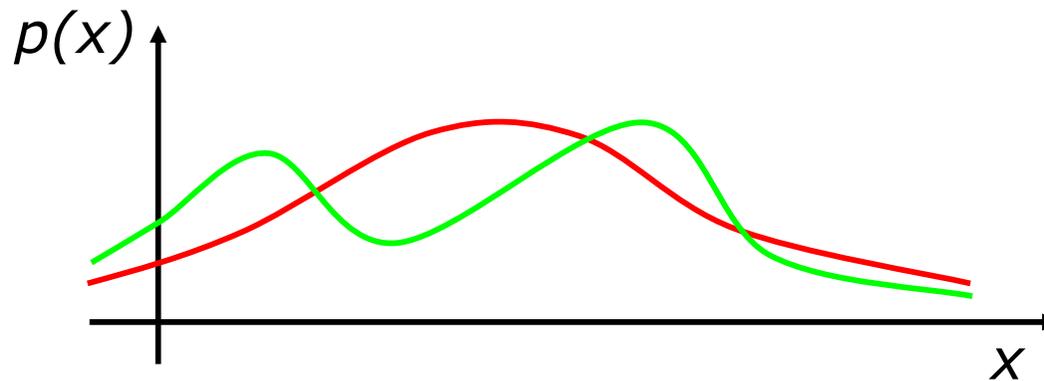


# Modellierung von Unsicherheit in Systemen

- Motivation
- Systeme  
Zeitdiskrete, lineare und nicht-lineare Systeme, Beispiele
- Wahrscheinlichkeiten  
Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeitsdichten, mehrdimensionale Zufallsvariablen, Erwartungswert, Varianz, Kovarianz, Gesetze
- Normalverteilung  
Ein- und mehrdimensional, Fehlerellipsen, Summe und Produkt, Fehlerfortpflanzung, Beispiele
- Monte-Carlo-Simulation  
Partikelmengen, Fehlerfortpflanzung, Beispiele

# Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsdichte (1)

- In der Robotik werden Positionen, Sensorwerte, Steuerbefehle, usw. als Zufallsvariablen modelliert.
- Eine Zufallsvariable kann beliebige, reelle Werte annehmen (wir betrachten hier nur stetige Zufallsvariablen).
- Einer Zufallsvariablen  $x$  ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte (probability density function, pdf) zugeordnet  $p(x)$ :



- Für die Wahrscheinlichkeit, dass  $x$  im Intervall  $[a,b]$  liegt, gilt:

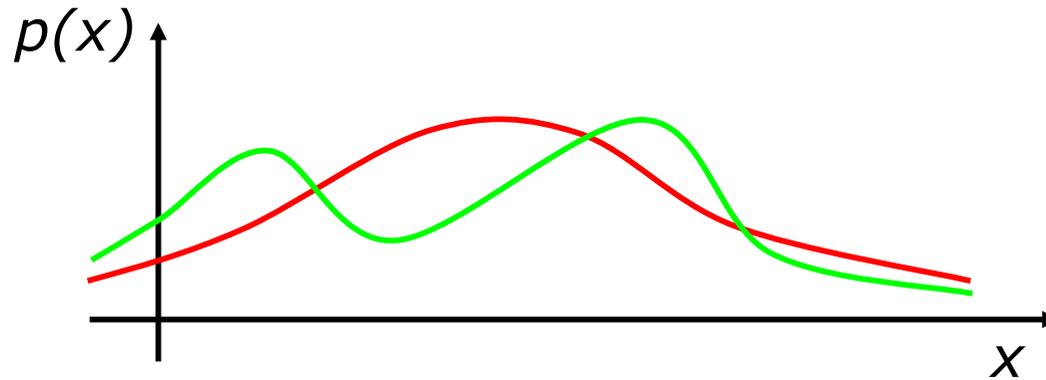
$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x) dx$$

# Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsdichte (2)

---

- Für eine Wahrscheinlichkeitsdichte muss gelten:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1$$



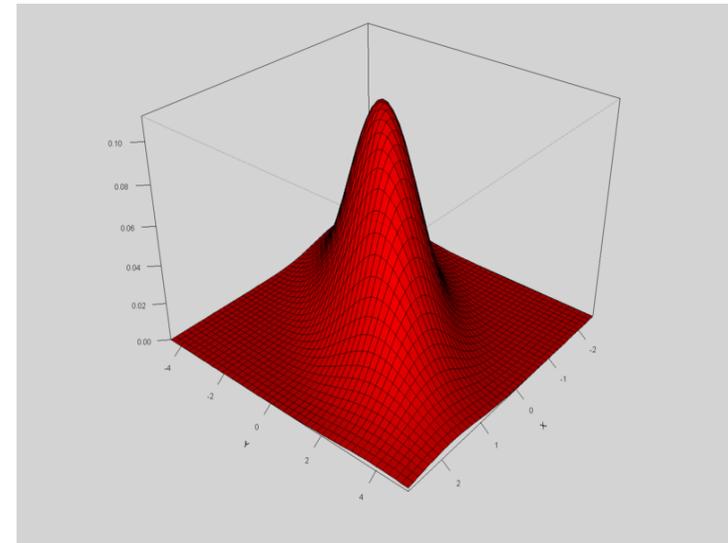
# Mehrdimensionale Zufallsvariablen

- Zufallsvariablen können auch mehrdimensional (Zufallsvektor) sein

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

- Beispiel: Eine Roboterpose  $(x, y, \theta)$  ist eine 3-dimensionale Zufallsvariable.
- Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte  $p$  ist dann ebenfalls mehrdimensional und es gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$



# Mittelwert, Varianz und Kovarianz

---

- Der Mittelwert  $\mu$  (Mean) einer Zufallsvariablen  $x$  (skalar oder mehrdimensional) wird definiert als der Erwartungswert  $E(x)$ .

$$\mu_x = E(x) = \int x p(x) dx$$

- Varianz einer skalaren Zufallsvariablen  $x$ :

$$\sigma_x^2 = E((x - \mu_x)^2)$$

- Kovarianz zweier skalarer Zufallsvariablen  $x$  und  $y$ :

$$\sigma_{xy} = E((x - \mu_x)(y - \mu_y))$$

# Kovarianz einer mehrdimensionalen Zufallsvariablen

---

- Kovarianz einer mehrdimensionalen Zufallsvariablen (Zufallsvektor)  $\mathbf{x}$ :

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = E((\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}}) (\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}})^T)$$

- Für einen zweidimensionalen Zufallsvektor  $\mathbf{x} = (x, y)^T$  ergibt sich:

$$\Sigma_{\mathbf{x}} = E\left(\begin{pmatrix} x - \mu_x \\ y - \mu_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \mu_x & y - \mu_y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$

# Lineare Transformation von Zufallsvariablen

---

## Skalarer Fall

Skalare Zufallsvariable  $y$  geht aus  $x$  durch eine lineare Transformation hervor:

$$y = ax + b$$

Dann folgt aus den Rechenregeln für Erwartungswerte:

$$\mu_y = a\mu_x + b \quad \text{und} \quad \sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$$

## Mehrdimensionaler Fall

$n$ -dimensionaler Zufallsvektor  $\mathbf{y}$  geht aus  $m$ -dimensionalen Zufallsvektor  $\mathbf{x}$  durch eine lineare Transformation hervor:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}$$

Dann folgt aus den Rechenregeln für Erwartungswerte :

$$\mu_y = \mathbf{A}\mu_x + \mathbf{B} \quad \text{und} \quad \Sigma_y = \mathbf{A}\Sigma_x\mathbf{A}^T$$

# Summe von Zufallsvariablen

---

- Seien  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{z}$  skalare oder mehrdimensionale Zufallsvariablen.
- Falls  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , dann gilt:

$$\mu_{\mathbf{z}} = \mu_{\mathbf{x}} + \mu_{\mathbf{y}}$$

$$\Sigma_{\mathbf{z}} = \Sigma_{\mathbf{x}} + \Sigma_{\mathbf{y}}, \text{ falls } \mathbf{x} \text{ und } \mathbf{y} \text{ unabhängig sind}$$

- Für skalare Zufallsvariablen ist  $\sigma^2$  statt  $\Sigma$  zu nehmen.

# Modellierung von Unsicherheit in Systemen

- Motivation
- Systeme  
Zeitdiskrete, lineare und nicht-lineare Systeme, Beispiele
- Wahrscheinlichkeiten  
Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeitsdichten,  
mehrdimensionale Zufallsvariablen,  
Erwartungswert, Varianz, Kovarianz, Gesetze
- Normalverteilung  
Ein- und mehrdimensional, Fehlerellipsen,  
Summe und Produkt, Fehlerfortpflanzung, Beispiele
- Monte-Carlo-Simulation  
Partikelmengen, Fehlerfortpflanzung, Beispiele

# Eindimensionale Normalverteilung

- Eine normalverteilte Zufallsvariable  $x$  mit Mittelwert  $\mu$  und Varianz  $\sigma^2$  hat folgende Wahrscheinlichkeitsdichte (Gaußsche Glockenkurve):

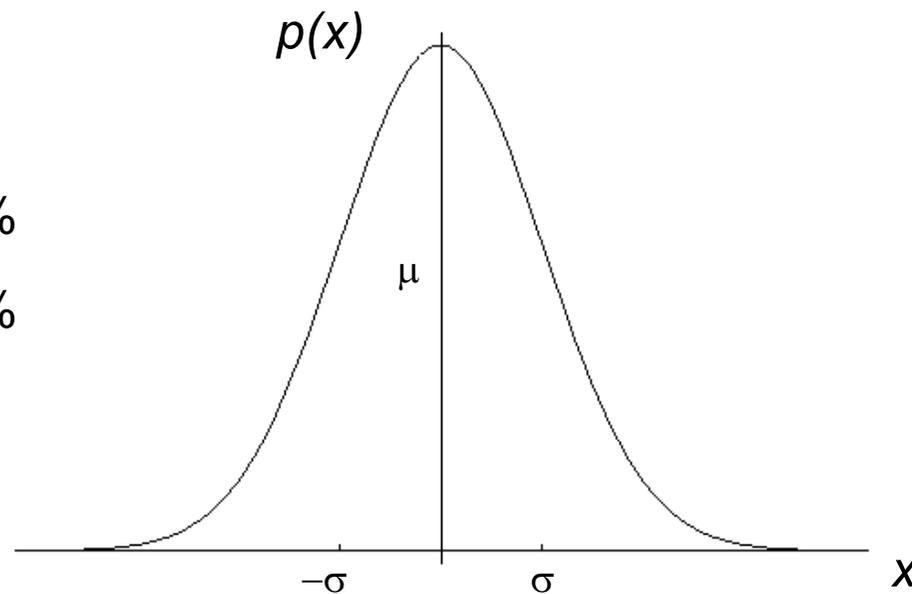
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

- Schreibweise:  $x \sim N(x;\mu,\sigma^2)$
- Nützliche Fakten:

$$P(\mu-\sigma \leq x \leq \mu+\sigma) = 68\%$$

$$P(\mu-2\sigma \leq x \leq \mu+2\sigma) = 95.5\%$$

$$P(\mu-3\sigma \leq x \leq \mu+3\sigma) = 99.7\%$$

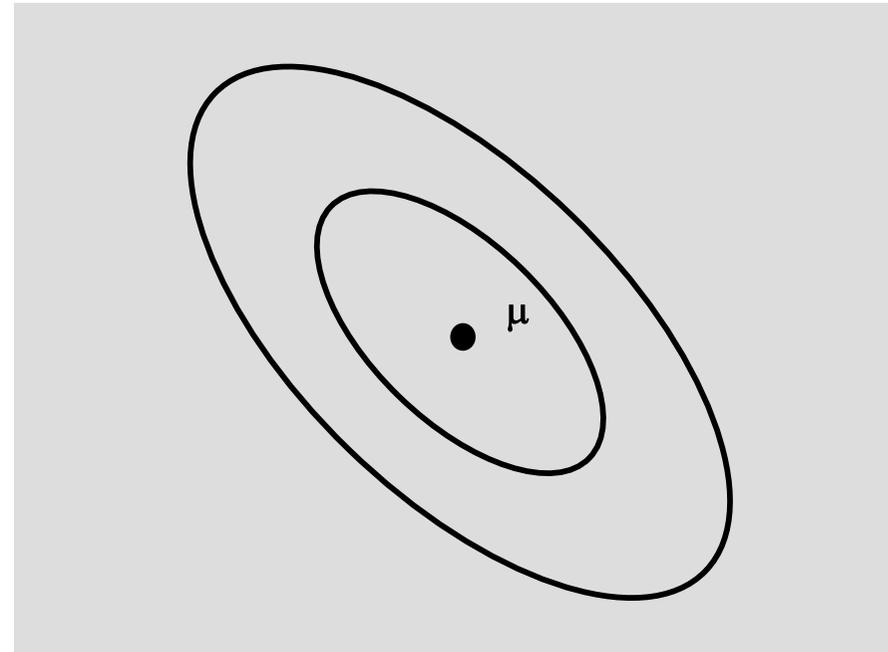
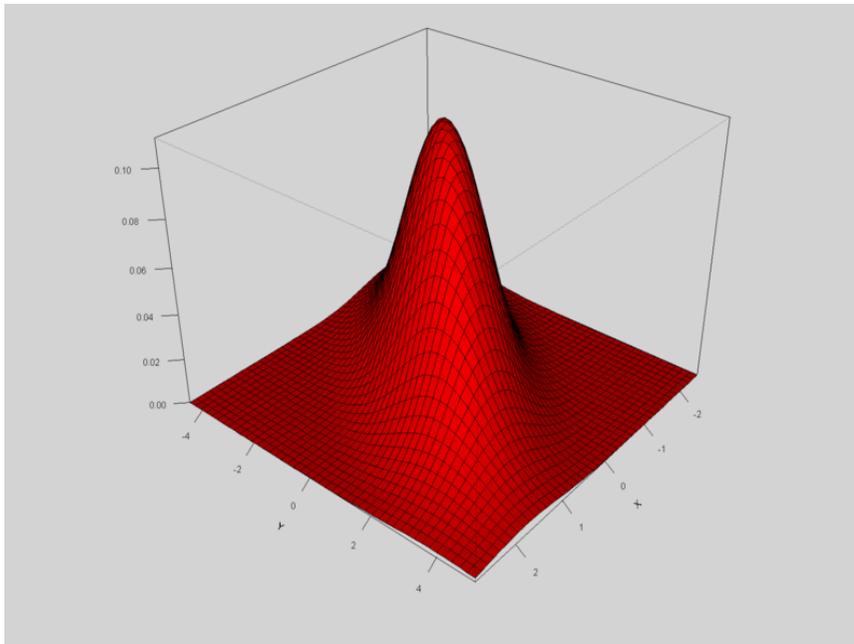


# Mehrdimensionale Normalverteilung

- Ein normalverteilter Zufallsvektor  $\mathbf{x}$  der Dimension  $n$  mit Mittelwert  $\mu$  und Kovarianz  $\Sigma$  hat folgende Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)}$$

- Schreibweise:  $\mathbf{x} \sim N(\mathbf{x}, \mu, \Sigma)$

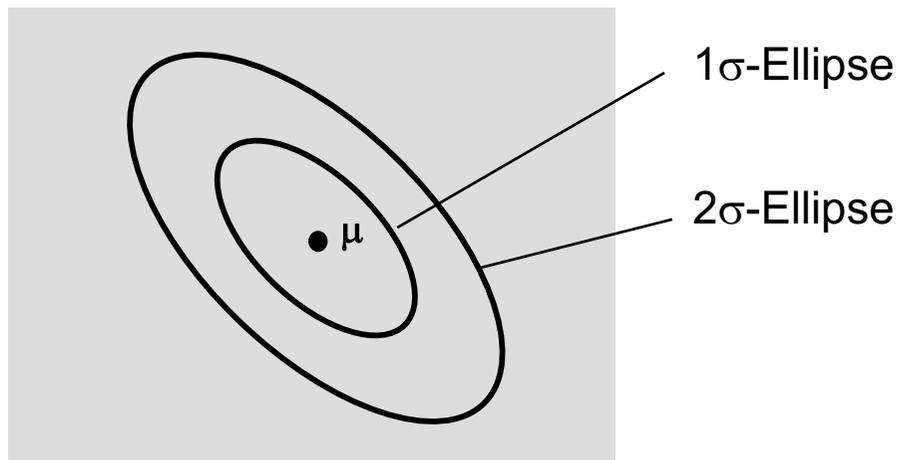


# $\sigma$ -Ellipsen

- Für die einfache Darstellung von zweidimensionalen Normalverteilungen eignen sich die Höhenlinien (Punktmengen mit gleichen Wahrscheinlichkeitsdichten) besonders gut.
- Wir führen dazu den Mahalanobis-Abstand  $d$  zwischen  $\mathbf{x}$  und  $\mu$  ein:

$$d(\mathbf{x}, \mu) = (\mathbf{x} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mu)$$

- Für  $d(\mathbf{x}, \mu) = r^2 = \text{konstant}$  ergeben sich Ellipsen mit dem Mittelpunkt  $\mu$ .
- Die Ellipsen für  $r = 1, 2, \dots$  werden auch  $1\sigma$ -Ellipsen,  $2\sigma$ -Ellipsen, ... genannt.



- Veranschaulichung im eindimensionalen Fall:

$d(x, \mu) = 1$  ergibt im eindimensionalen Fall:

$$(x - \mu)^2 / \sigma^2 = 1$$

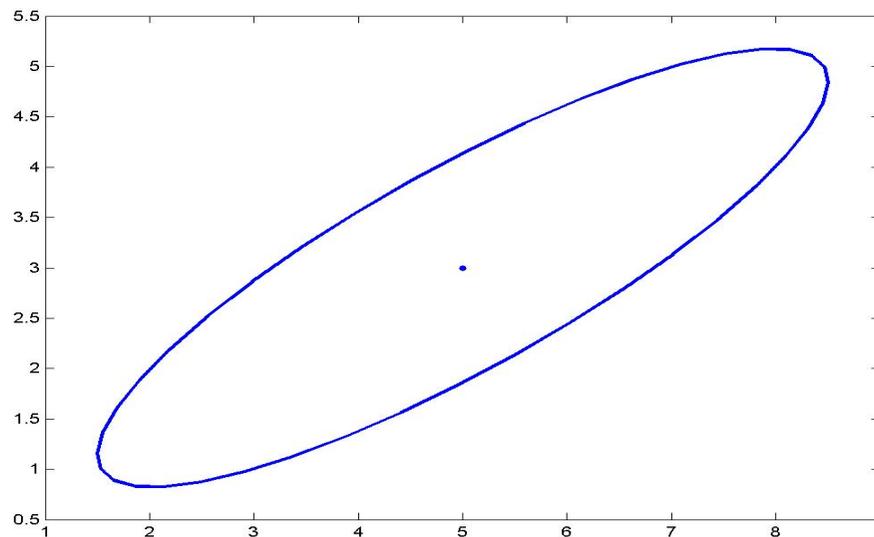
$$x = \mu \pm \sigma \quad (68\text{-Intervall})$$

# Beispiel für $\sigma$ -Ellipse

Normalverteilte 2-dimensionale Variable  $(x,y) \sim N(\mu,\Sigma)$  mit:

$$\mu = (\mu_x, \mu_y)^T = (5, 3)^T$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.25 & 15\sqrt{3}/4 \\ 15\sqrt{3}/4 & 4.75 \end{pmatrix}$$



1 $\sigma$ -Ellipse

# Vorgehensweise zum Zeichnen einer $\sigma$ -Ellipse

---

- Ermittle für  $\Sigma^{-1}$  die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  und die Eigenvektoren  $V = (v_1, v_2)$ .
- Berechne Punktmenge für Einheitskreis:  
 $\{(y_1, y_2) \mid y_1 = \cos(t) \text{ und } y_2 = \sin(t) \text{ mit } t = 0, h, 2h, \dots, 2\pi\}$
- Dehne bzw. quetsche Einheitskreis (d.h. Punktmenge) so, dass Ellipse mit Achsenabschnitte  $1/\sqrt{\lambda_1}$  und  $1/\sqrt{\lambda_2}$  entsteht.
- Drehe Ellipse mit Rotationsmatrix  $V$
- Verschiebe Ellipse um  $\mu$ .

# Beispiel

- Normalverteilung gegeben:

$$\mu = (\mu_x \quad \mu_y)^T = (5 \quad 3)^T$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.25 & 15\sqrt{3}/4 \\ 15\sqrt{3}/4 & 4.75 \end{pmatrix}$$

- Eigenvektoren und Eigenwerte von  $\Sigma^{-1}$ :

$$V = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.0625 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

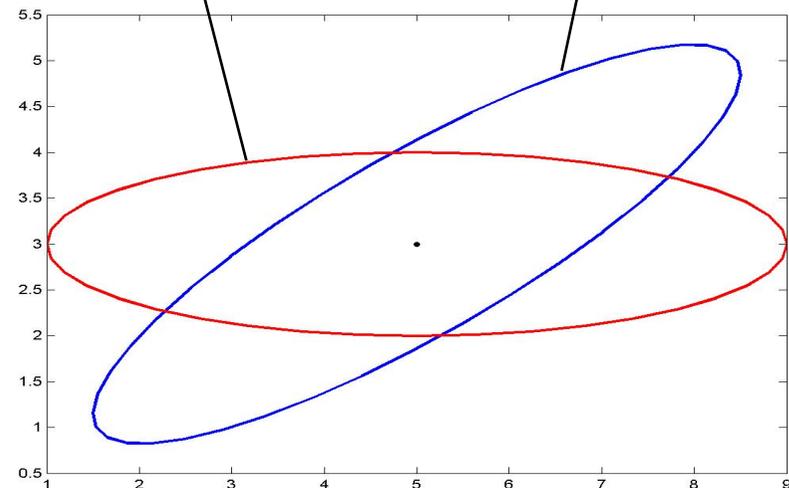
- Hauptachsenabschnitte der Ellipse:

$$1/\sqrt{\lambda_1} = 1/\sqrt{0.0625} = 1/0.25 = 4$$

$$1/\sqrt{\lambda_2} = 1/\sqrt{1} = 1$$

Nicht gedrehte Ellipse  
mit Hauptachsen-  
abschnitte 4 und 1.

Mit V gedrehte  
Ellipse

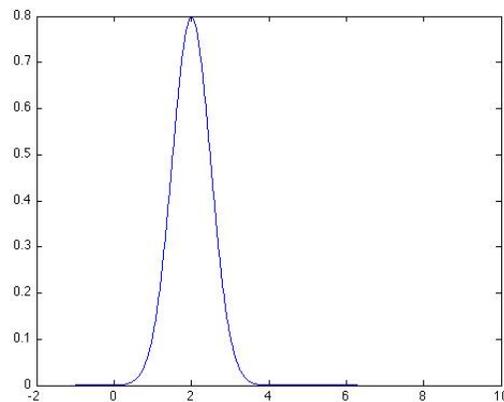


# Summe von Normalverteilungen

- Um Wahrscheinlichkeitsdichten mit mehreren relativen Maxima zu modellieren, lassen sich Summen von Normalverteilungen bilden (Gaussische Mischdichten):

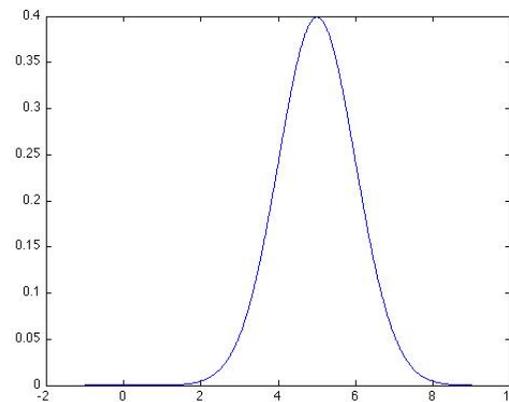
$$p(\mathbf{x}) = \sum_i w_i N(\mathbf{x}, \mu_i, \Sigma_i)$$

- Die Gewichte  $w_i$  der einzelnen Normalverteilungen addieren sich zu 1.



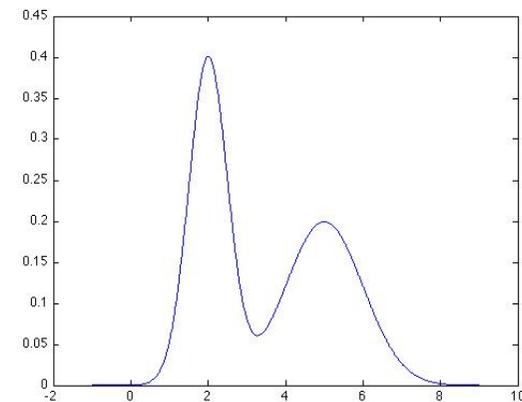
$N(x, 2, 0.25)$

+



$N(x, 5, 1)$

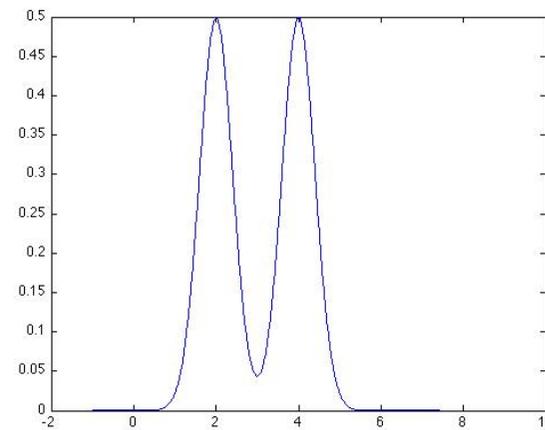
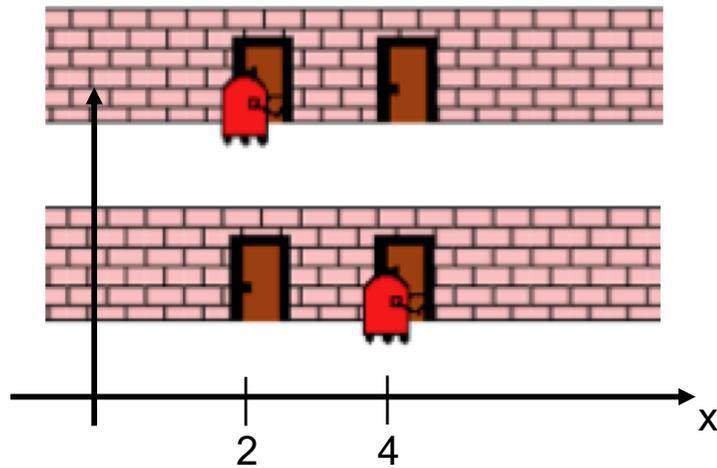
=



$0.5 * N(x, 2, 0.25) + 0.5 * N(x, 5, 1)$

# Beispiel

- Roboter stellt aufgrund seiner Sensorik eine Türe mit einer gewissen Unsicherheit fest.
- Aufgrund seiner Umgebungskarte muss er sich entweder bei  $x = 2$  oder  $x = 4$  befinden.
- Beide Hypothesen sind gleich wahrscheinlich und mit der gleichen Unsicherheit versehen.
- Die Schätzung des Zustands kann als Summe von Normalverteilungen modelliert werden.



$$0.5 * N(2,0.16) + 0.5 * N(4,0.16)$$

# Produkt von Normalverteilungen

- Das Produkt zweier Normalverteilungen  $N(x, \mu_1, \Sigma_1)$  und  $N(x, \mu_2, \Sigma_2)$  ist (geeignet normiert) wieder eine Normalverteilung mit:

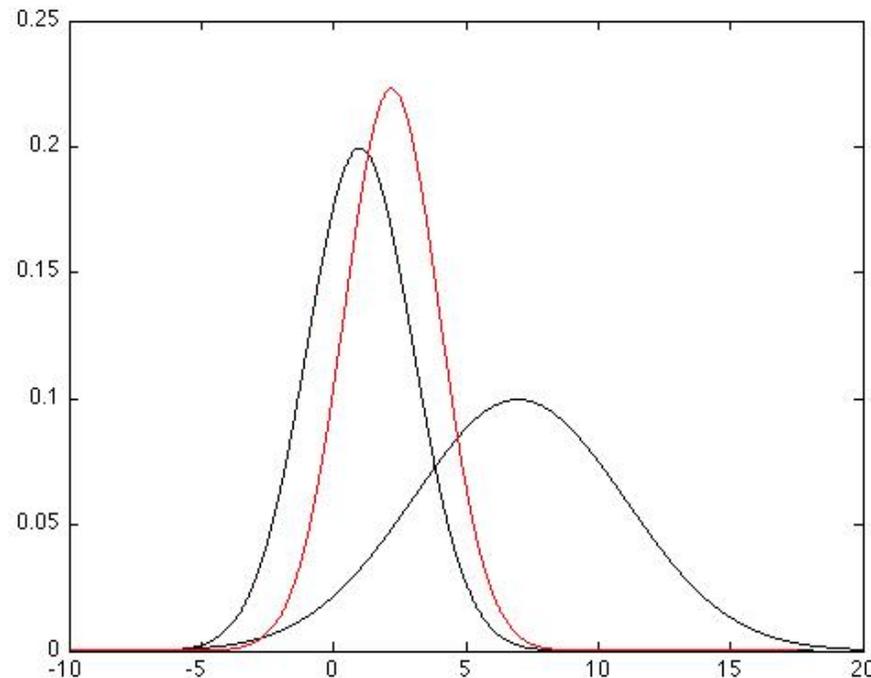
$$\mu = (\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1})^{-1}(\Sigma_1^{-1}\mu_1 + \Sigma_2^{-1}\mu_2)$$

$$\Sigma^{-1} = (\Sigma_1^{-1} + \Sigma_2^{-1})$$

- Für den eindimensionalen Fall ergibt sich:

$$\mu = \frac{\frac{1}{\sigma_1^2} \mu_1 + \frac{1}{\sigma_2^2} \mu_2}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}}$$

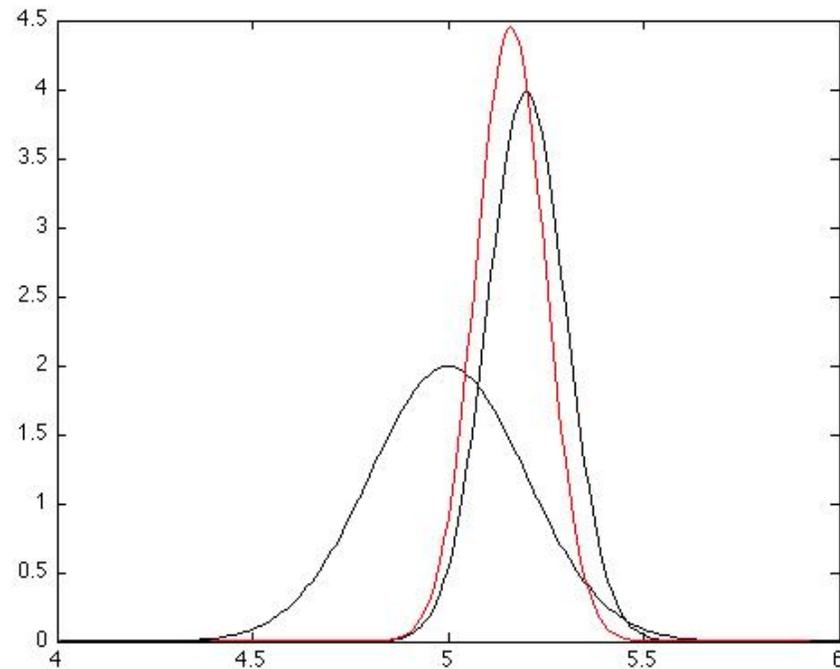
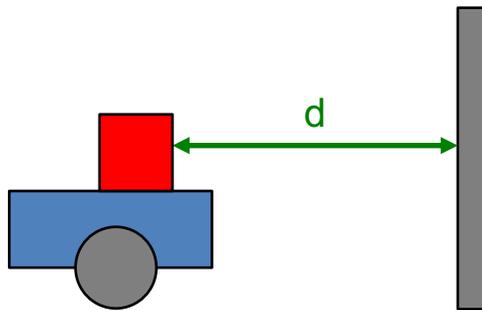
$$\frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}$$



$$N(x, 1, 4) * N(x, 7, 16) = N(x, \mu, \sigma^2) \text{ mit } \mu=11/5 \text{ und } \sigma^2=16/5.$$

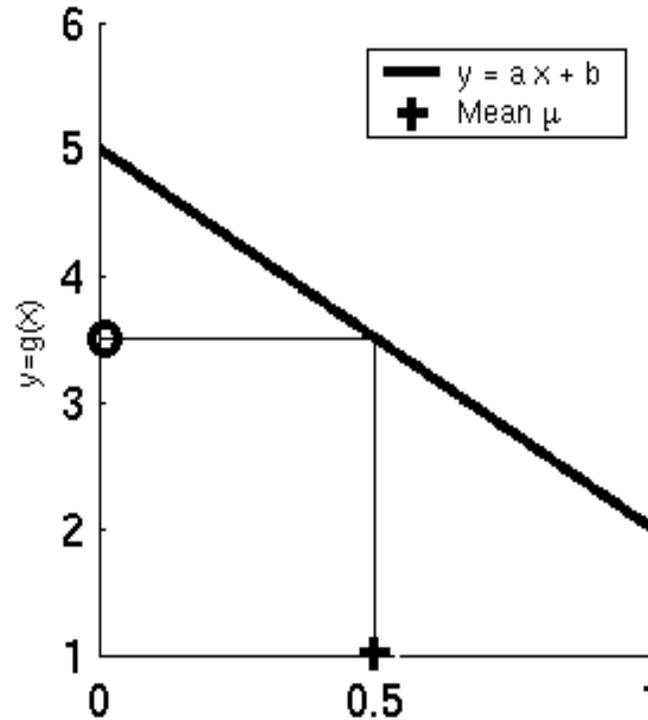
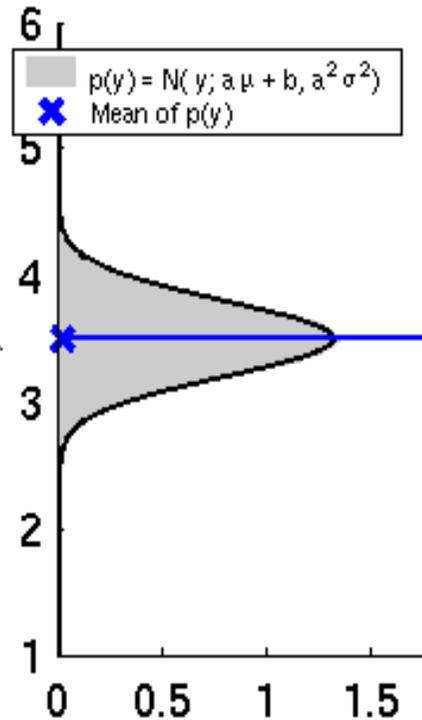
# Beispiel

- Roboter steht vor einer Wand und misst mit zwei unterschiedlichen Sensoren den Abstand  $d$  zur Wand:  $z_1 = 5$  m bzw.  $z_2 = 5.3$  m.
- Die Unsicherheit ist dabei  $\sigma_1 = 0.2$  m bzw.  $\sigma_2 = 0.1$  m.
- Messung 1:  $d \sim N(d, 5, 0.04)$
- Messung 2:  $d \sim N(d, 5.3, 0.01)$
- Fusionierung der beiden Messwerte:  $d \sim N(d, 5, 0.04) * N(d, 5.3, 0.01)$



$$N(5, 0.04) * N(5.3, 0.01)$$

# Skalare lineare Transformationen



Falls

$$x \sim N(x, \mu_x, \sigma_x^2)$$

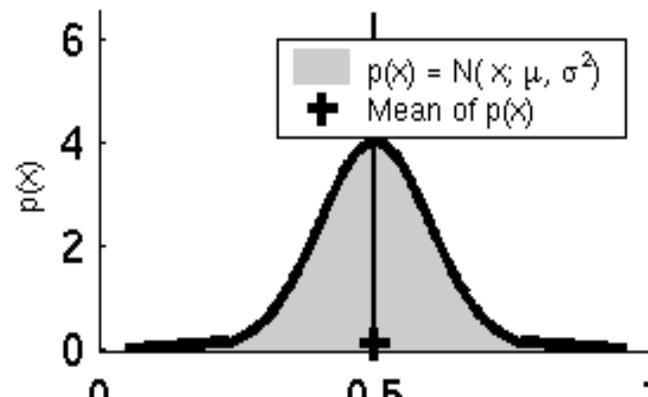
$$y = ax + b$$

dann

$$y \sim N(y, \mu_y, \sigma_y^2) \text{ mit}$$

$$\mu_y = a\mu_x + b \text{ und}$$

$$\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$$



# Lineare Vektor-Transformation

---

Falls

$$\mathbf{x} \sim N(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_x, \boldsymbol{\Sigma}_x)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

dann

$$\mathbf{y} \sim N(\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}_y, \boldsymbol{\Sigma}_y) \quad \text{mit}$$

$$\boldsymbol{\mu}_y = \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{b} \quad \text{und}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_y = \mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}_x\mathbf{A}^T$$

# Beispiel

- lineares, zeitdiskretes System:

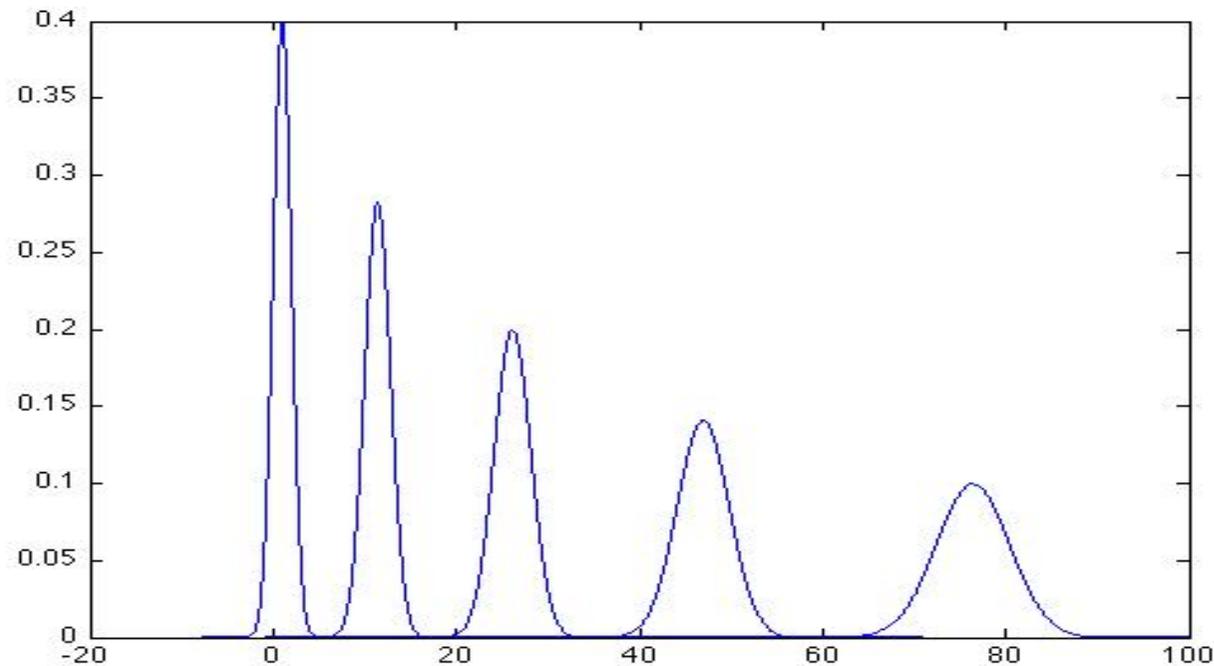
$$x_{k+1} = \sqrt{2}x_k + 10$$

- Anfangszustand  $x_0$  ist nur mit einer gewissen Unsicherheit bekannt:

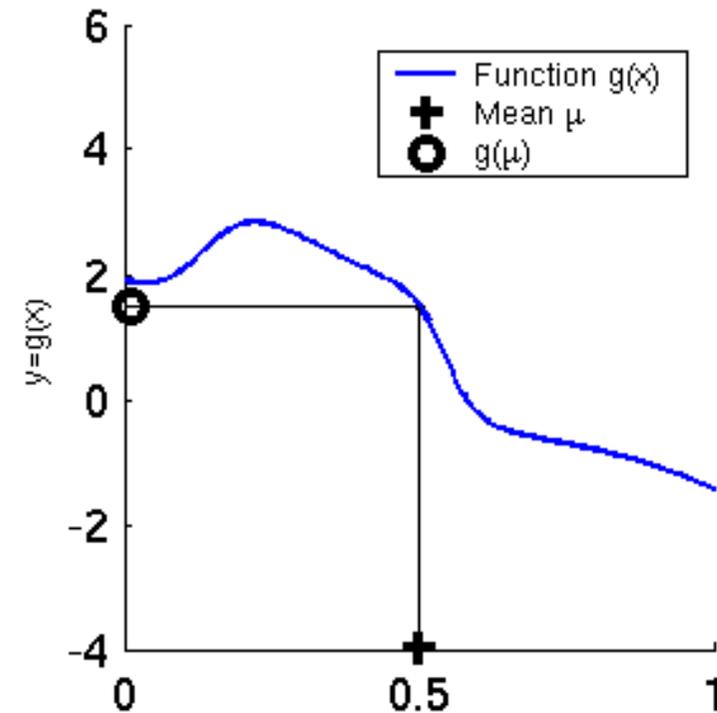
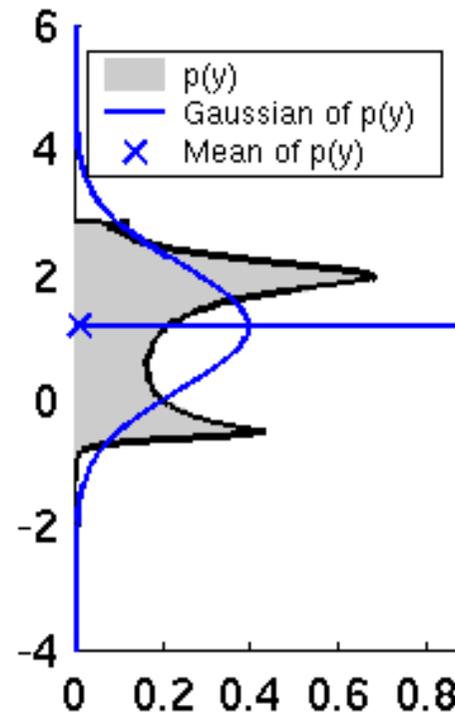
$$x_0 \sim N(x_0, 1, 1)$$

- Fortplanzung der Unsicherheit:

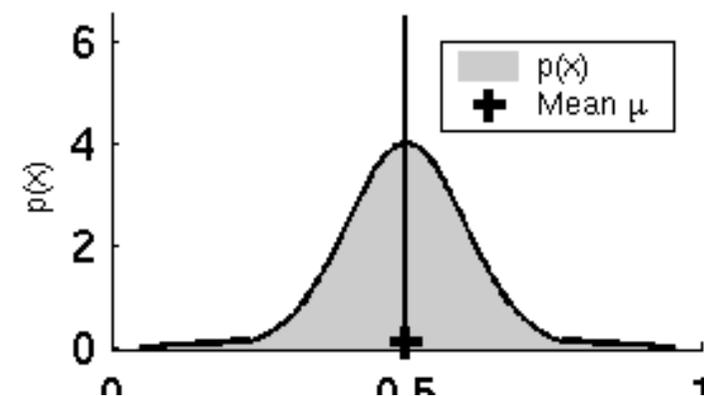
$$x_{k+1} \sim N(x_{k+1}, \sqrt{2}x_k + 10, 2\sigma_{x_k}^2)$$



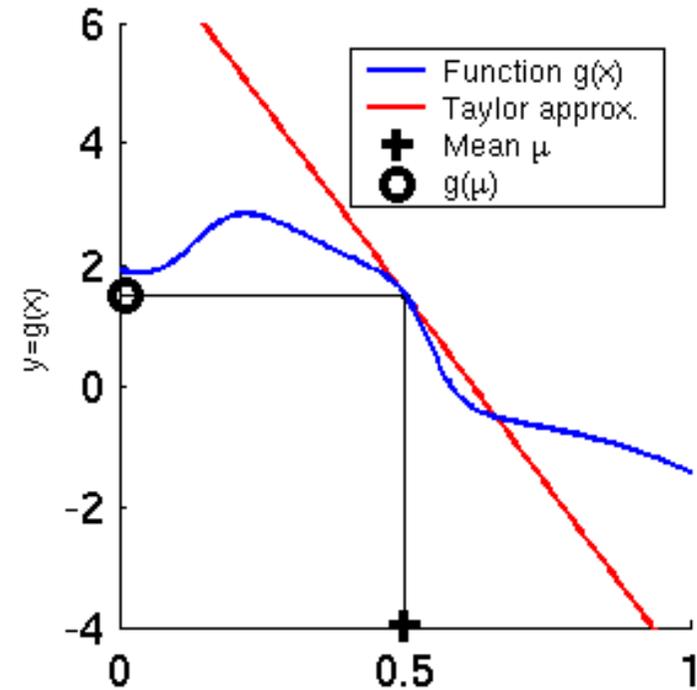
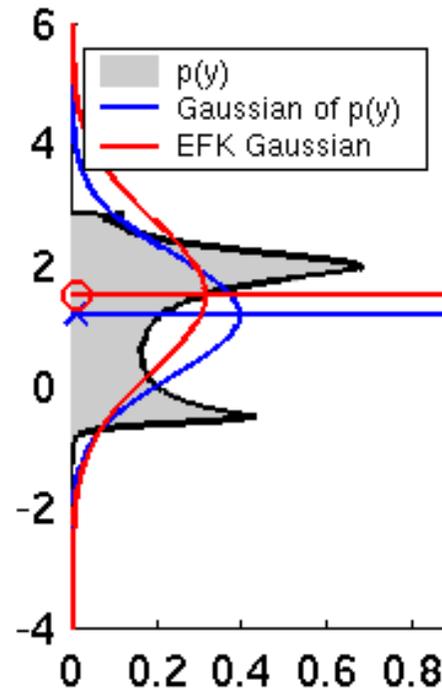
# Nichtlineare Transformation (1)



- Anwendung einer nichtlinearen Transformation zerstört die Normalverteilung

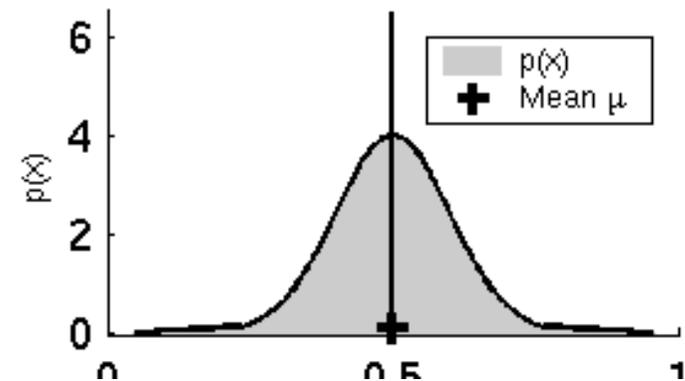


# Nichtlineare Transformation (2)



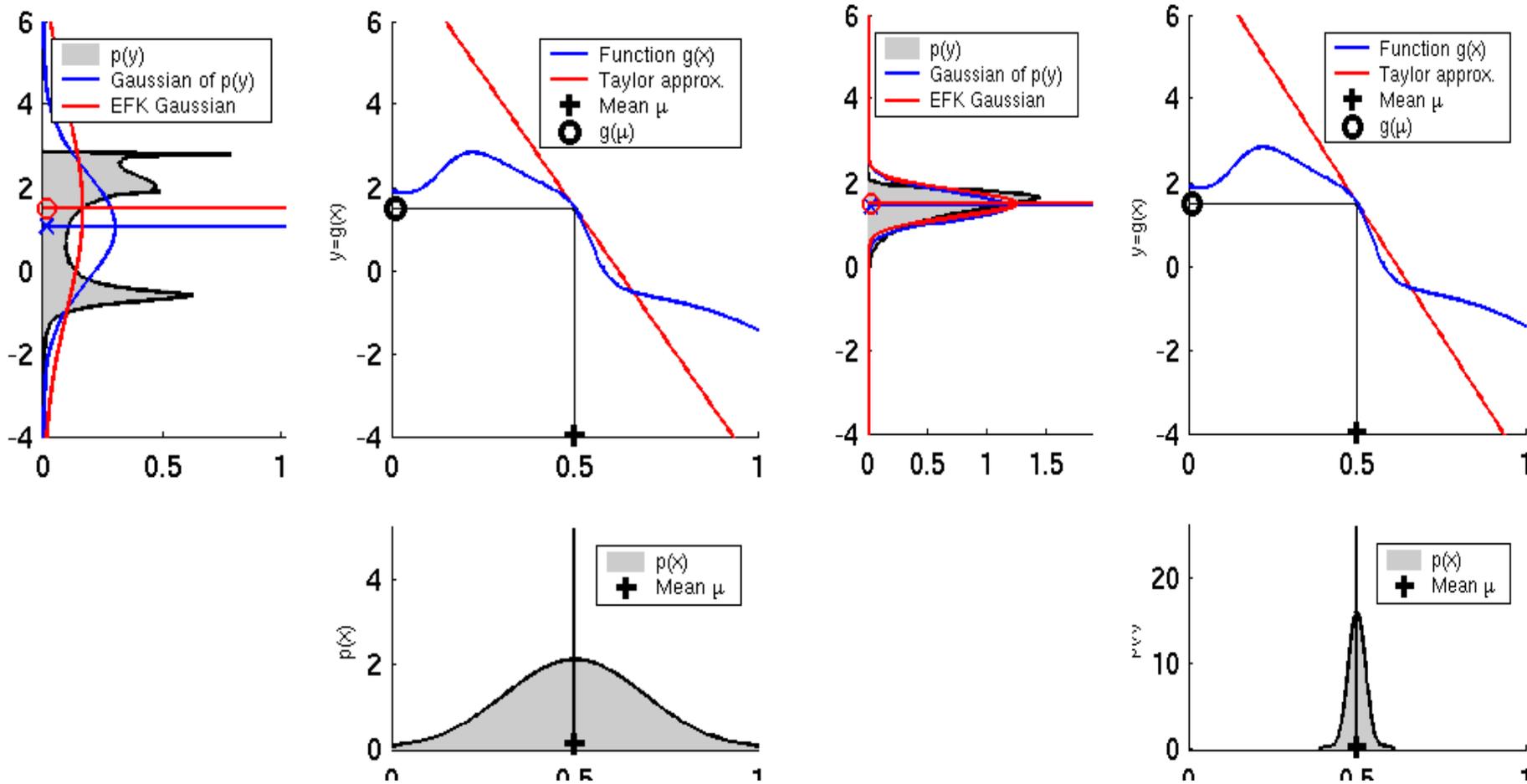
Linearisierung von  $g$  durch  
Tangente an der Stelle  $x=\mu$ :

$$g(x) \approx g(\mu) + g'(\mu)(x - \mu)$$



# Nichtlineare Transformation (3)

- Qualität der Linearisierung hängt von  $\sigma_x$  ab:



# Nichtlineare Vektor-Transformation

---

Gegeben:

$$\mathbf{x} \sim N(\mu_{\mathbf{x}}, \Sigma_{\mathbf{x}}) \quad \mathbf{x} \text{ n-dimensional}$$

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) \quad \mathbf{y} \text{ m-dimensional}$$

Linearisiere  $g$

( $G$  ist die sogenannte Jakobi-Matrix oder Ableitungsmatrix):

$$g(\mathbf{x}) \approx g(\mu_{\mathbf{x}}) + G(\mu_{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \mu_{\mathbf{x}}) = G(\mu_{\mathbf{x}})\mathbf{x} + g(\mu_{\mathbf{x}}) - G(\mu_{\mathbf{x}})\mu_{\mathbf{x}}$$

$$\text{mit } G(\mu_{\mathbf{x}}) = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mu_{\mathbf{x}})$$

Nun mit Gesetz für lineare Vektor-Transformation:

$$\mathbf{y} \sim N(\mu_{\mathbf{y}}, \Sigma_{\mathbf{y}}) \quad \text{mit}$$

$$\mu_{\mathbf{y}} = g(\mu_{\mathbf{x}}) \quad \text{und}$$

$$\Sigma_{\mathbf{y}} = G(\mu_{\mathbf{x}})\Sigma_{\mathbf{x}}G(\mu_{\mathbf{x}})^T$$

# Jakobi-Matrix

- Gegeben:

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}) \quad \text{wobei } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und } \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

- $g$  lässt sich ausführlicher schreiben:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ g_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

- Jakobi-Matrix  $G$ :

$$G(\mathbf{x}) = \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

# Beispiel

- Roboter erkennt in Entfernung  $d$  und Winkel  $\alpha$  ein Objekt

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} d \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ und Unsicherheit } \Sigma_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma_d^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\alpha^2 \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{x} = (d, \alpha)^T$  soll in kartesische Koordinaten  $\mathbf{y} = (x, y)^T$  umgerechnet werden:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ und Unsicherheit } \Sigma_{\mathbf{y}}$$

- Nicht lineare Vektorgleichung:

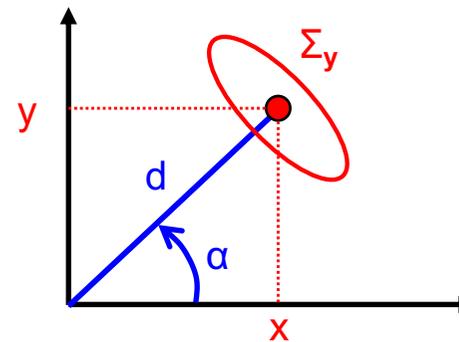
$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} d \cos \alpha \\ d \sin \alpha \end{pmatrix}}_{g(\mathbf{x})}$$

- Jacobi-Matrix:

$$G(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial d}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_1}{\partial \alpha}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial g_2}{\partial d}(\mathbf{x}) & \frac{\partial g_2}{\partial \alpha}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -d \sin \alpha \\ \sin \alpha & d \cos \alpha \end{pmatrix}$$

- Damit:

$$\Sigma_{\mathbf{y}} = G(\mathbf{x})\Sigma_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x})^T$$

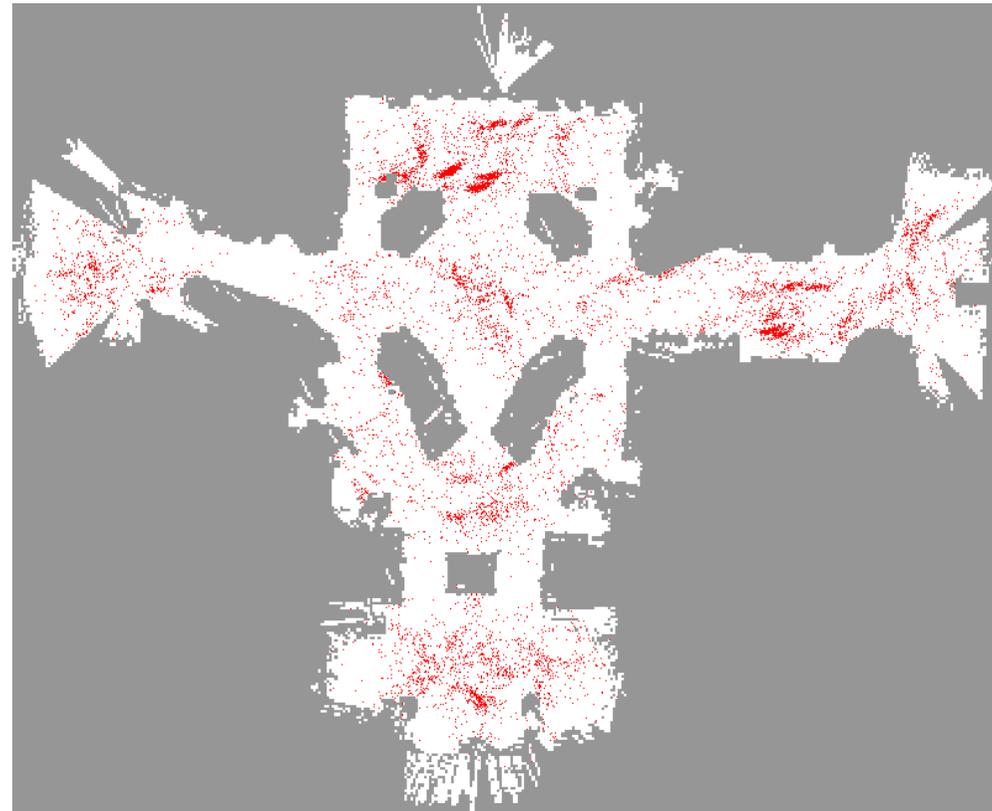


# Modellierung von Unsicherheit in Systemen

- Motivation
- Systeme  
Zeitdiskrete, lineare und nicht-lineare Systeme, Beispiele
- Wahrscheinlichkeiten  
Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeitsdichten, mehrdimensionale Zufallsvariablen, Erwartungswert, Varianz, Kovarianz, Gesetze
- Normalverteilung  
Ein- und mehrdimensional, Fehlerellipsen, Summe und Produkt, Fehlerfortpflanzung, Beispiele
- Monte-Carlo-Simulation  
Partikelmengen, Fehlerfortpflanzung, Beispiele

# Motivation und Idee

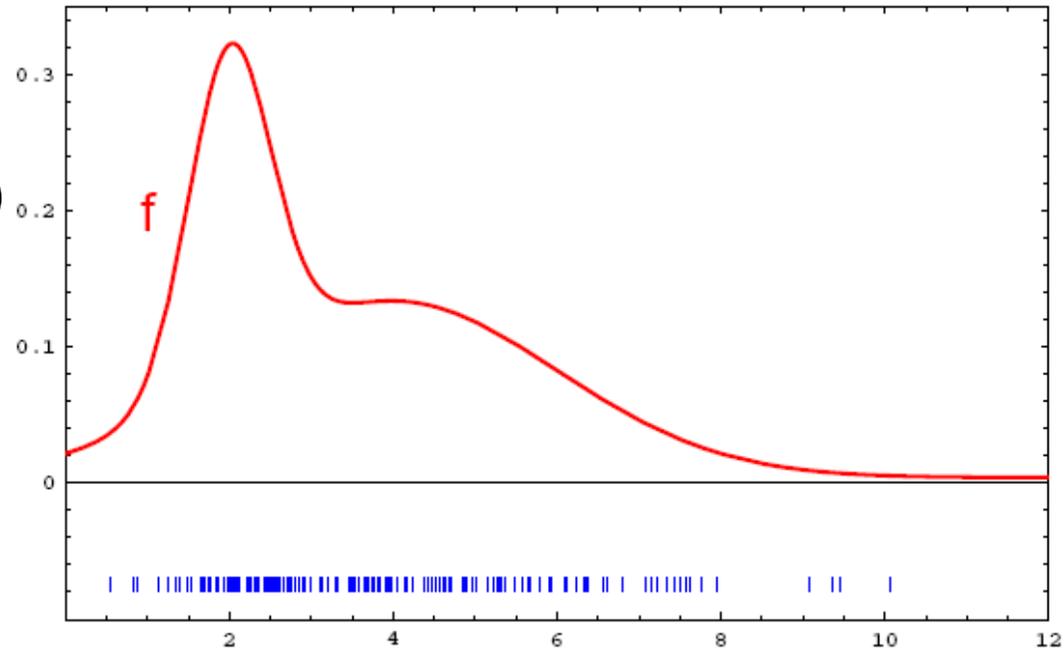
- Bei komplexen Umgebungen und sehr ungenauer Kenntnis der Position können Wahrscheinlichkeitsdichten sehr unhandlich werden.
- Monte-Carlo-Verfahren lösen komplexe Probleme, indem zahlreiche Zufallsexperimente durchgeführt werden.
- Wahrscheinlichkeitsdichten werden durch eine Menge von zufällig gezogenen Stichproben (Partikel) angenähert.
- Für jeden Partikel können je nach Problemstellung die gewünschten Transformationen durchgeführt werden.



Jeder rote Punkt ist ein Partikel und ist eine mögliche Position des Roboters. Die Gesamtheit der Partikel stellt eine Wahrscheinlichkeitsdichte für die Roboterposition dar.

# Partikelmengen

- Jeder Partikel stellt eine Hypothese (d.h. einen konkreten Wert) für den Zustand  $x$  dar.
- Partikelmenge:  
$$\chi = \{x^{[1]}, x^{[1]}, \dots, x^{[M]}\},$$
wobei  $x^{[m]}$  ein Partikel ist.
- $M$  ist üblicherweise groß (z.B.  $M = 1000$ )



# Generierung von Partikelmengen aus Dichten

- Generierung einer Partikelmenge  $\chi$  aus einer Wahrscheinlichkeitsdichte  $p$ :

**Algorithm generateParticle(p):**

$\chi = \emptyset$ ;

$i = 0$ ;

**while**  $i < M$  **do**

    generiere Zufallszahl  $x$  aus  $[a,b]$ ;

    generiere Zufallszahl  $q$  aus  $[0,c]$ ;

**if**  $q < p(x)$  **then**

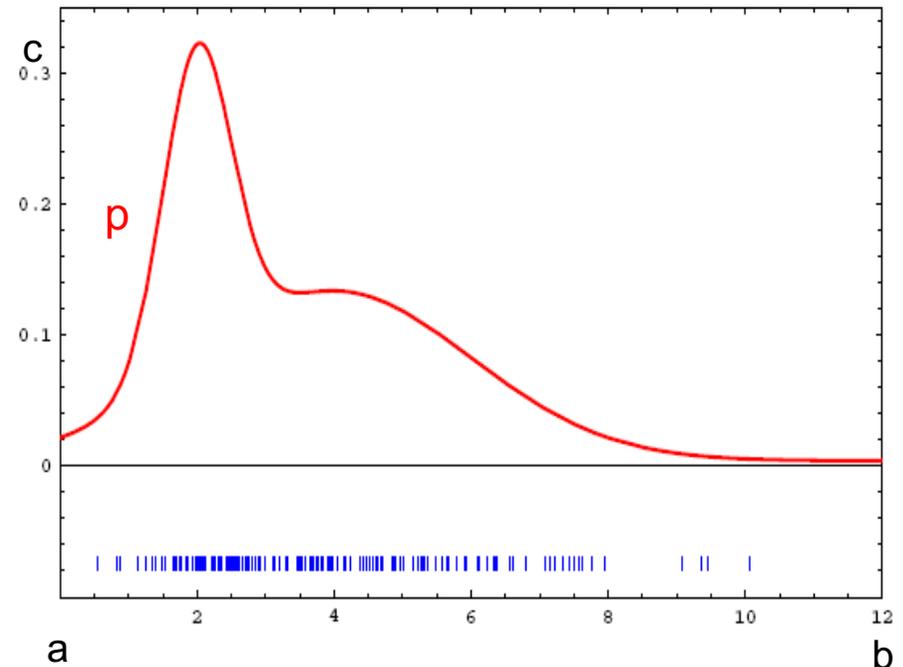
$i = i+1$ ;

$\chi = \chi \cup \{x\}$ ;

**endif**

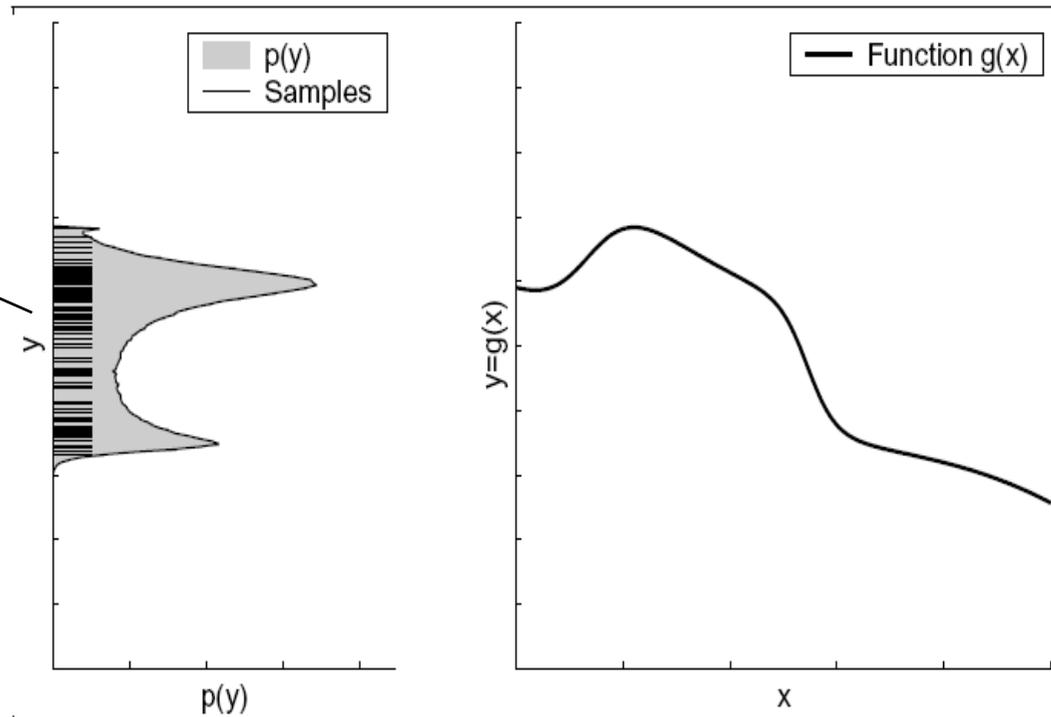
**endwhile**

**return**  $\chi$ ;

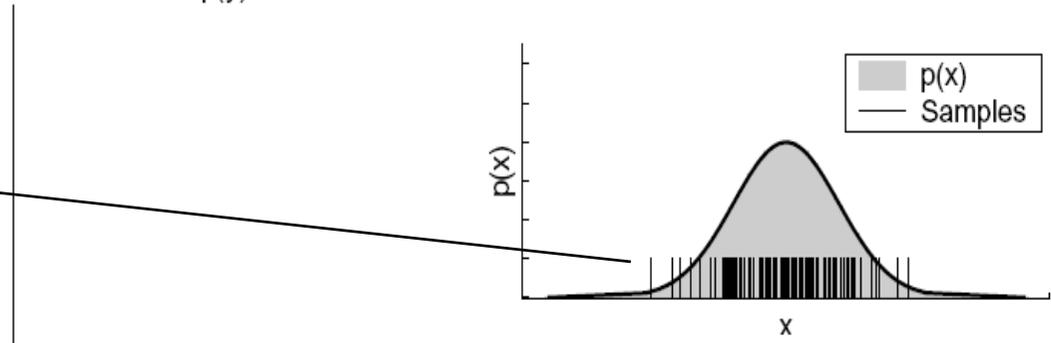


# Transformation einer Partikelmenge

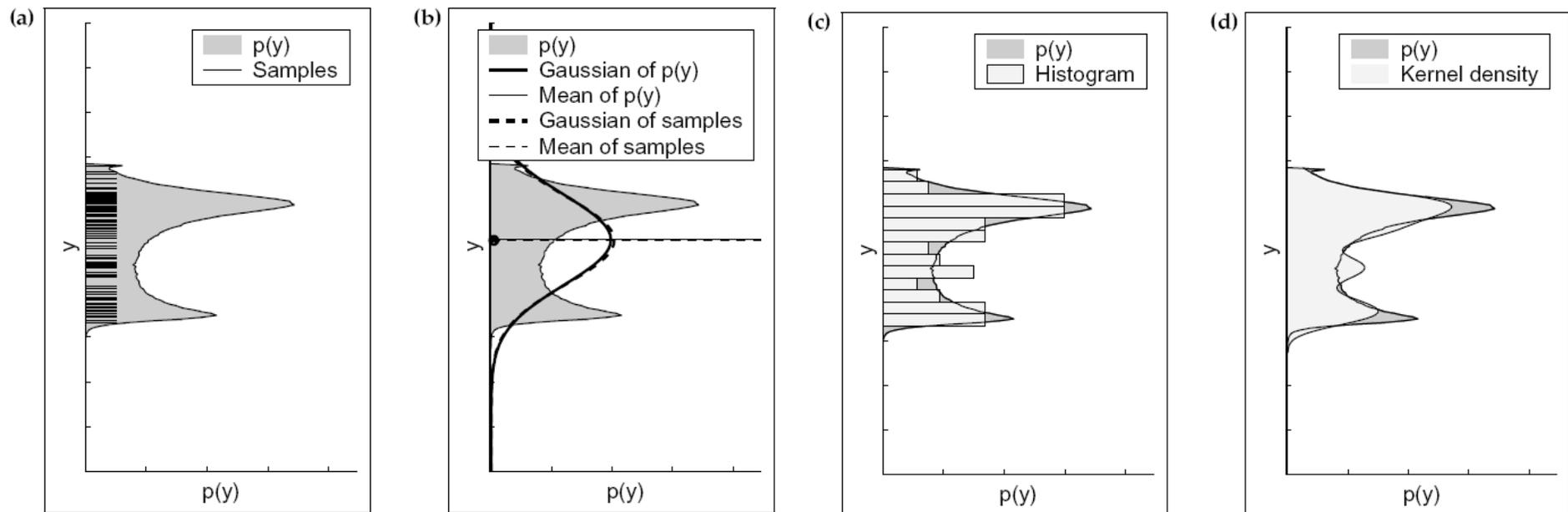
Wahrscheinlichkeitsverteilung und Partikelwolke nach Anwendung der Funktion  $g$ .



Menge von Partikeln die gemäß der Normalverteilung  $p(x)$  zufällig generiert wurden.



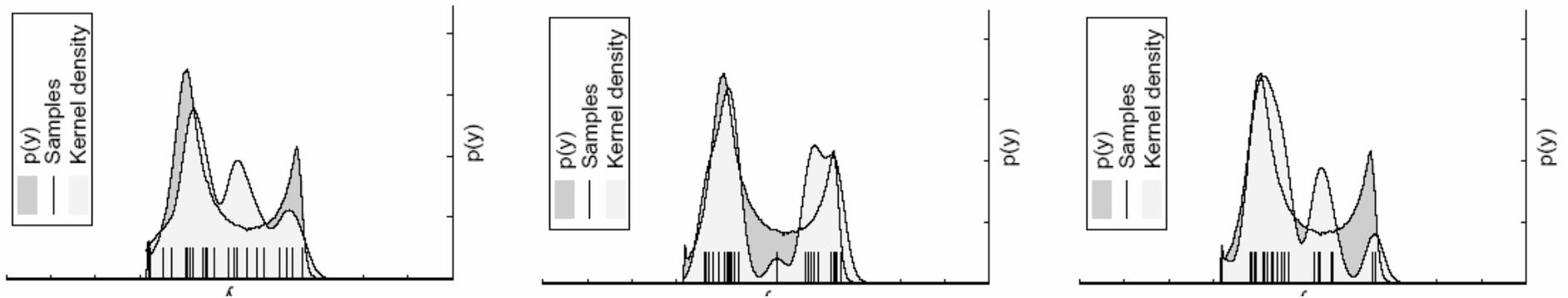
# Generierung von Dichten aus Partikelmengen



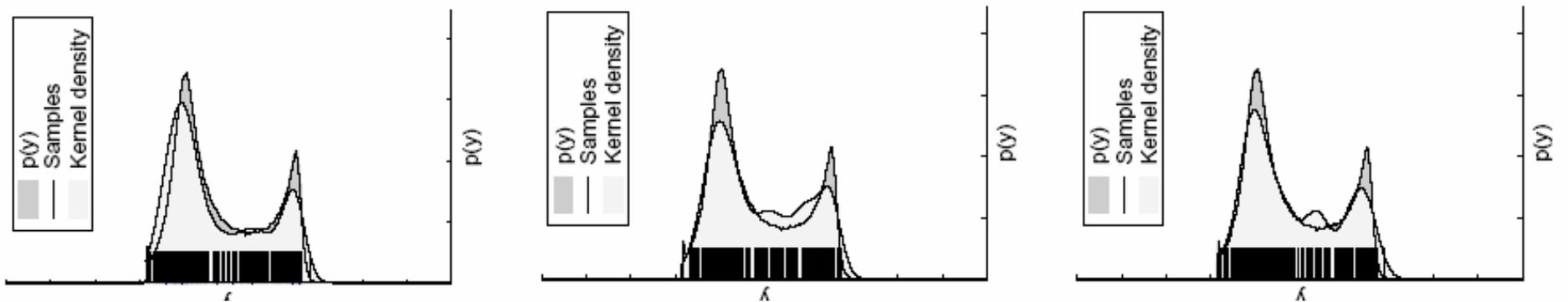
- (a) Menge von Partikeln die gemäß der Verteilung  $p(x)$  zufällig generiert wurden.
- (b) Aus der Partikelmenge gewonnene Normalverteilung, indem aus der Partikelmenge Mittelwert und Varianz ermittelt wird.
- (c) Aus Partikelmenge gewonnenes Histogramm.
- (d) Stetige Variante (Kerndichteschätzer, kernel density estimation) Bilde Summe aus Normalverteilungen, wobei jeder Partikel eine Normalverteilung bildet.

# Genauigkeit der Verteilungsapproximation in Abh. von der Partikelanzahl

- 25 Partikel



- 250 Partikel



# Beispiel

- lineares, zeitdiskretes System:

$$x_{k+1} = \sqrt{2}x_k + 10$$

- Anfangszustand  $x_0$  ist nur mit einer gewissen Unsicherheit bekannt:

$$x_0 \sim 0.5 * N(x_0; 0, 1) + 0.5 * N(x_0; 5, 0.25)$$

- Partikelmenge wird gemäß der Verteilung des Anfangszustands generiert.
- Auf jeden Partikel wird solange Systemgleichung angewendet, bis  $x_4$  erreicht wird.

