Roboterkinematik

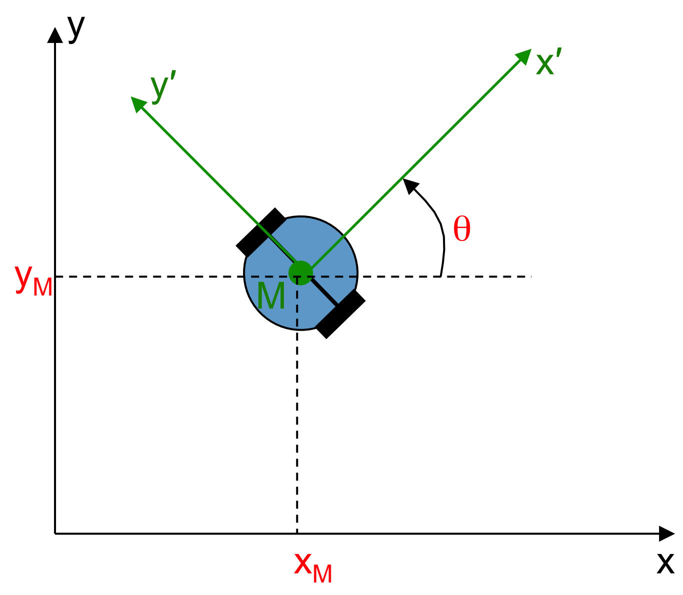
- Koordinatensysteme
- Trajektorien
- Kinematik
- Zweiradfahrzeug mit Differentialantrieb
- Kinematische Grundfertigkeiten

Koordinatensysteme und Roboterpose

- Mit dem Roboter ist ein lokales Koordinatensytem verbunden, wobei der Ursprung üblicherweise in der Mitte M der Antriebsachse liegt und die x-Achse in Richtung des Roboterfrontteils zeigt.
- Die Pose p des Roboters wird festgelegt durch die Koordinaten von M im globalen Koordinatensystem und durch den Winkel θ zwischen der lokalen x-Achse und der globalen x-Achse.

$$p = (x_M, y_M, \theta)^T$$

- Die Position des Roboters ist dann die Pose ohne Orientierung θ.



Koordinatentransformation

- Punkt P im lokalen Koordinatensystem L

  $p^L = (x_L, y_L)^T$

- Punkt P im globalen Koordinatensystem O

  $p^G = (x_G, y_G)^T$

- Transformation von p^L nach p^G mit $m = (x_M, y_M)^T$:

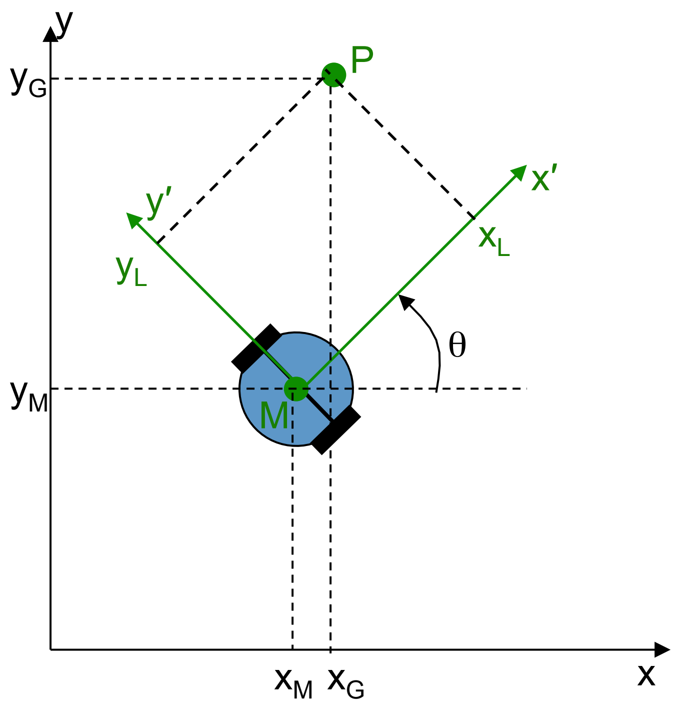
  $p^G = R(\theta)p^L + m$

- Dabei ist $R(\theta)$ die sogenannte Roationsmatrix:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- Transformation von p^G nach p^L :

  $p^L = R(\theta)^{-1}(p^G - m) = R(-\theta)(p^G - m)$



Polar- und kartesische Koordinaten

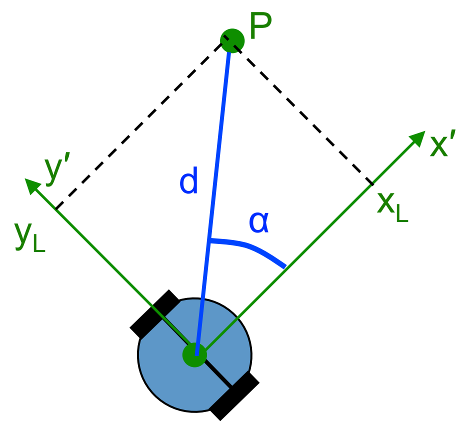
- Ein Punkt P kann auch in relativen Polarkoordinaten gegeben sein:

  $p^{L,pol} = (d, \alpha)^T$

- Umrechnung von $p^{L,pol}$ in kartesische Koordinaten p^L:

  $x_L = d*\cos(\alpha)$

  $y_L = d*\sin(\alpha)$



Einschub: Orientierung

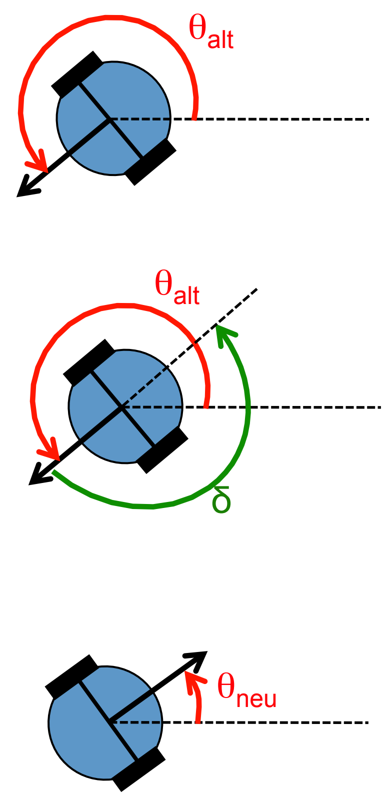
- Die Orientierung eines Roboters wird üblichweise durch einen Winkel θ aus dem Intervall [0,2π) definiert.
- Ändert sich die Orientierung um einen Winkel δ, so muss immer modolo 2π gerechnet werden.
- Beispiel:

$$\theta_{alt} = 1.25\pi$$

$$\delta = \pi$$

$$\theta_{neu} = \theta_{alt} + \delta \mod 2\pi$$

$$= 0.25\pi$$



Einschub: Winkeldifferenz

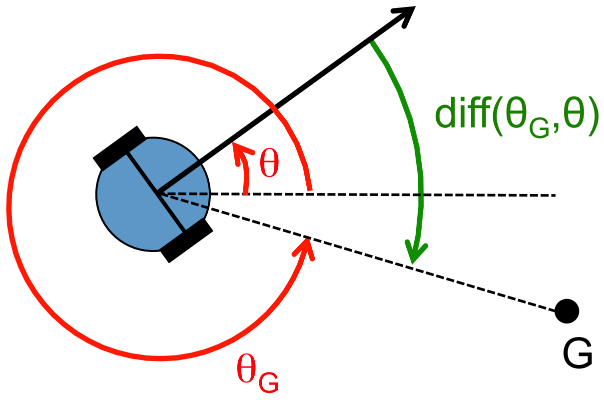
- Die Differenz $\text{diff}(\theta_1,\theta_2)$ zwischen zwei Winkel θ_1 und θ_2 wird üblichweise so festgelegt, dass $\text{diff}(\theta_1,\theta_2)$ im Intervall $[-\pi,+\pi)$ liegt.
- Beispiel (in Grad gerechnet):

  Orientierung des Zielpunkts G: $\theta_G = 350°$

  Roboterorientierung: $\theta = 20°$

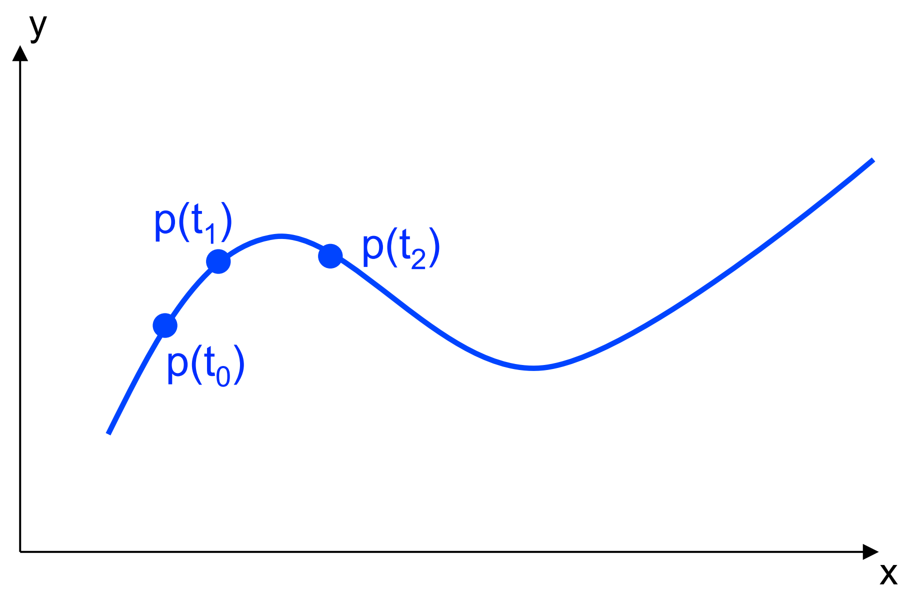
  Winkeldifferenz $\text{diff}(\theta_G,\theta) = -30°$
- Formel (für Bogenmaß):

  $$\text{diff}(\theta_1,\theta_2) = (\theta_1 - \theta_2 + \pi) \bmod 2\pi - \pi$$



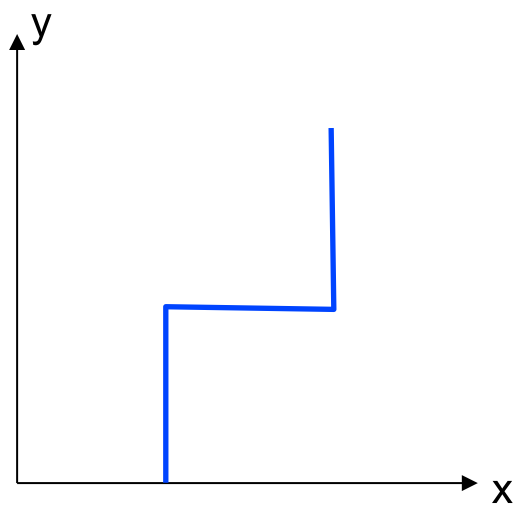
Trajektorie

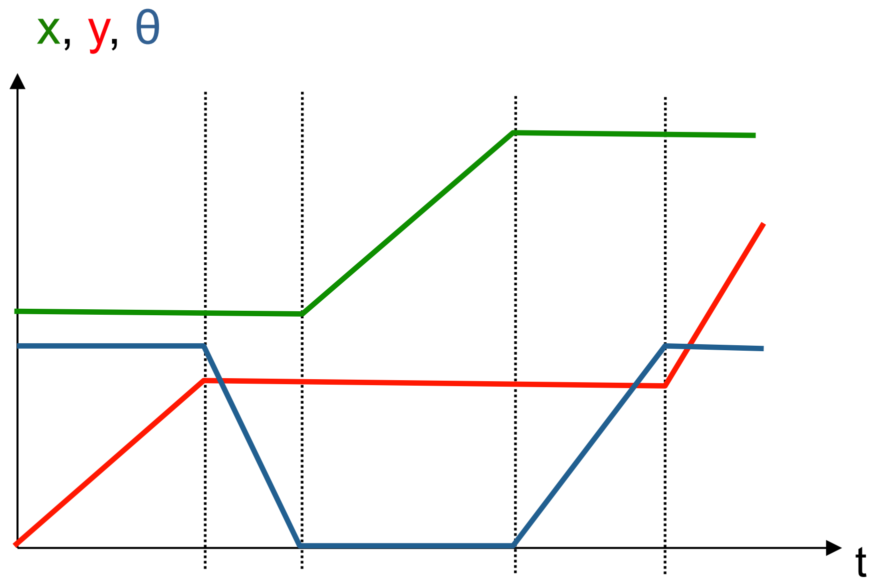
- Eine Trajektorie ist eine Kurve in der Ebene (Raum) parmeterisiert über die Zeit.
- Die einzelnen Punkte der Kurve stellen Positionen zu bestimmten Zeitpunkten dar.



Trajektorie und Posen

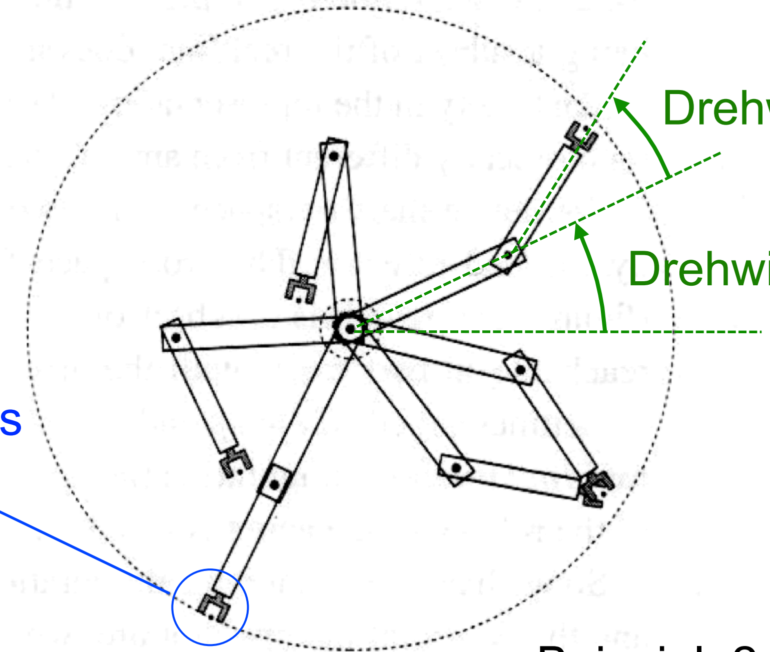
- Manchmal ist auch der zeitliche Verlauf von Posen (Position und Orientierung) gewünscht.
- Bei einer glatten (Positions)Trajektorie kann implizit die Orientierung als Tangente an den jeweiligen Punkten gewählt werden (siehe vorhergehende Folie).
- Bei einer nicht-glatten Trajektorie kann der Verlauf der Orientierung separat dargestellt werden (siehe unten).





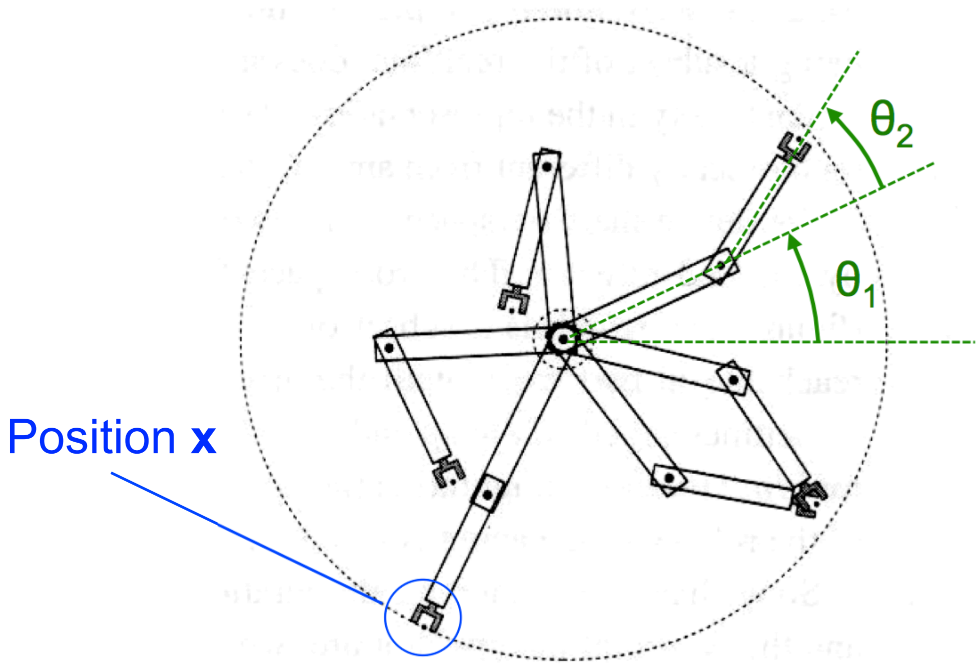
Kinematik

- Kinematik = Lehre von den Bewegungen
  (keine Berücksichtigung von Kräften und Drehmomenten)
- In Vergleich dazu berücksichtigt die Kinetik Kräfte und Drehmomente.
- Grundlegende Fragestellung in der Roboterkinematik:
  Zusammenhang zwischen Einstellung der beweglichen Teile des Roboters (Räder, Drehgelenke) und Position des Roboters.



Beispiel: 2-gliedriger Roboterarm.

Vorwärts- und Rückwärtskinematik (1)

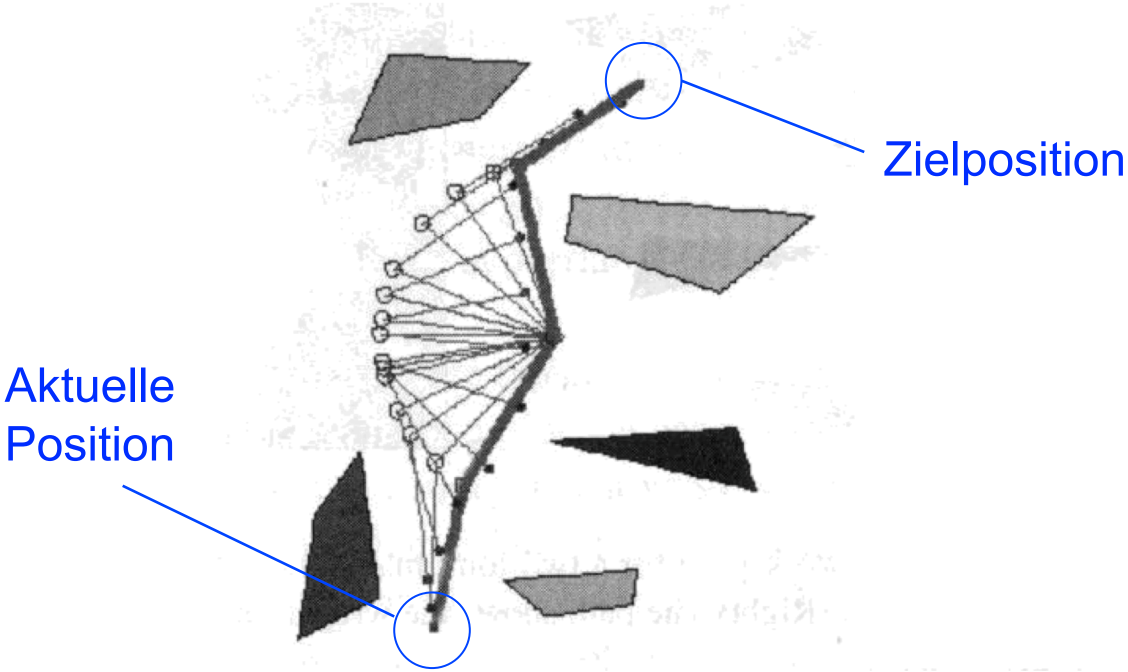


$\theta_1(t)$ → **Vorwärtskinematik** → $\mathbf{x}(t)$
$\theta_2(t)$ →

$\theta_1(t)$ ← **Rückwärtskinematik** ← $\mathbf{x}(t)$
$\theta_2(t)$ ←

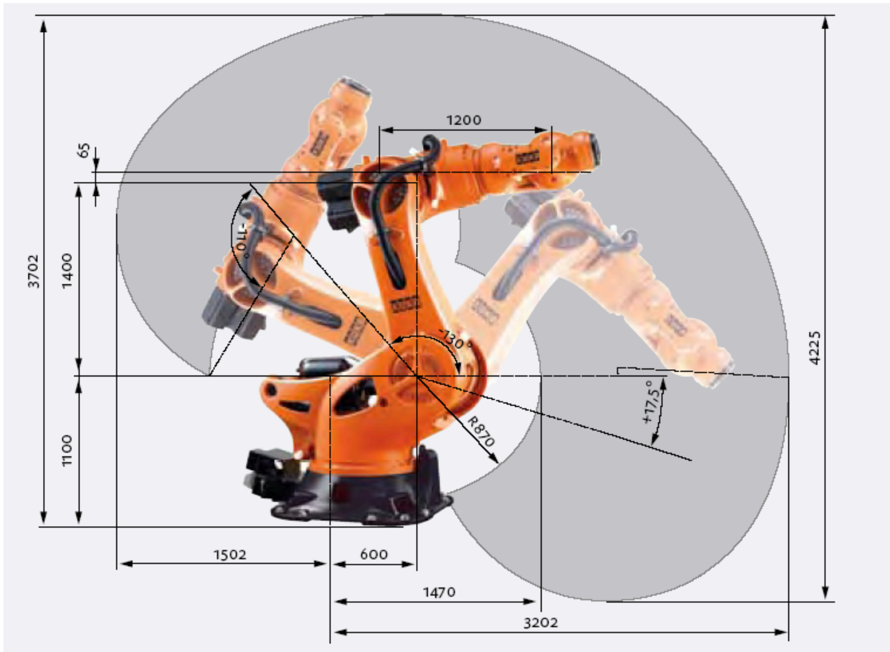
Vorwärts- und Rückwärtskinematik (2)

- Vorwärtskinematik ist vergleichsweise einfach zu berechnen.
- Rückwärtskinematik ist wesentlich schwieriger.
- Lösung ist meistens nicht eindeutig oder es existiert keine Lösung
- Wichtige Problemstellung:
  Finde für eine gegebene Zielposition eine Trajektorie,
  für die es auch eine Lösung bzgl. der Rückwärtskinematik gibt.
  (mehr dazu im Abschnitt Pfadplanung)



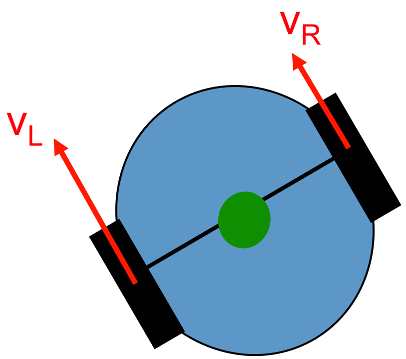
Beispiel Kuka Gelenkarmroboter

- Traglast 1000 kg
- 6 Achsen (6 DOF)
- Wiederholgenauigkeit < ±0,2 mm
- Gewicht 4700 kg

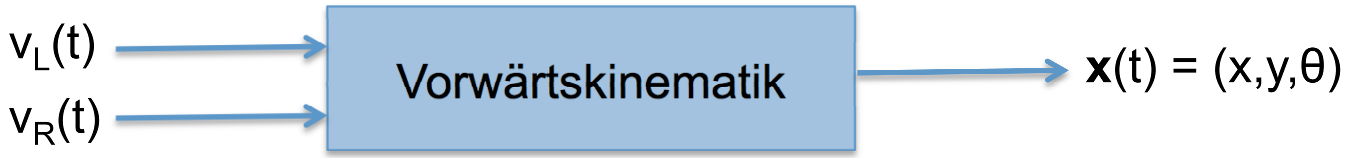


Kuka KR 1000 titan mit Arbeitsraum; www.kuka.com

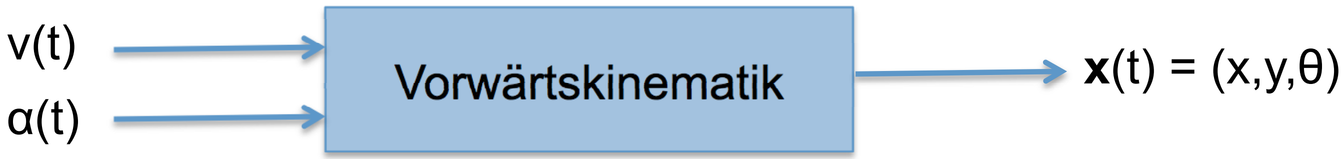
Beispiel Zweiradfahrzeug mit Differentialantrieb



Pioneer 3DX



Beispiel Automobil



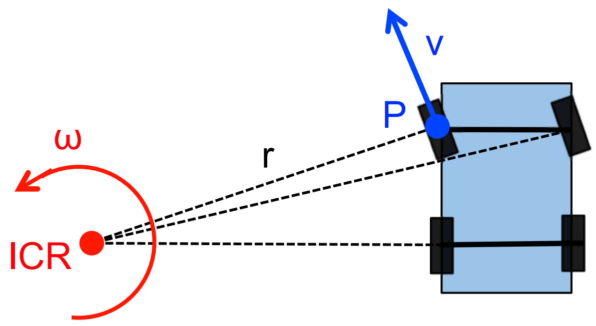
- $v(t)$ = Geschwindigkeit der Antriebsräder
- $\alpha(t)$ = Lenkwinkel

Kinematisches Gesetz: Kreisbewegung um Momentanpol

- Momentanpol
  Die Bewegung eines starren Körpers in der Ebene lässt sich in jedem Zeitpunkt als reine Drehbewegung um einen momentanen Drehpunkt auffassen (ICR = instanteneous center of rotation, Momentanpol)
- Rotiert der Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den ICR, dann gilt für die Geschwindigkeit v in einem Punkt P:

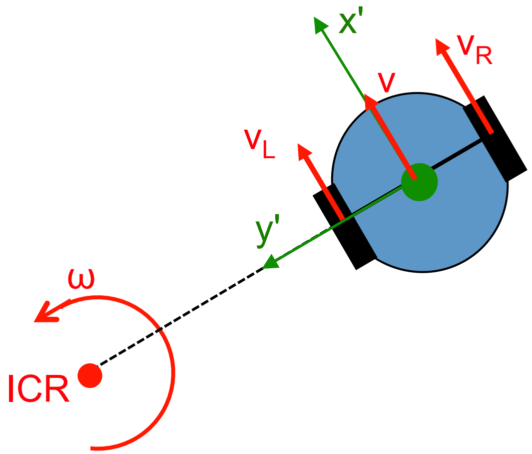
$$\omega = \frac{v}{r}$$

- Der Geschwindigkeitsvektor v steht dabei senkrecht auf dem Radius r.
- Der Radius r kann unendlich gross werden.
  Dann wird die Winkelgeschwindigkeit ω = 0 (Geradeausfahrt).



Vorwärtskinematik für Zweiradfahrzeug (1)

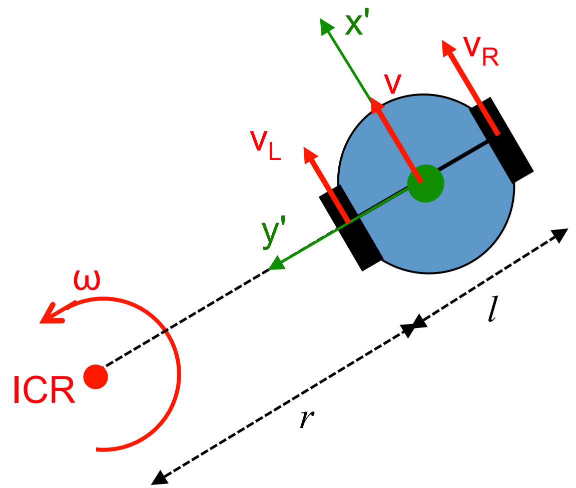
- Kinematisches Modell:
  Roboter wird von zwei unabhängigen Rädern angetrieben.
  Zusätzlich ist ein Stützrad angebracht.
- Geschwindigkeit des linken Rads v_L und des rechten Rads v_R werden eingestellt. Steuerbefehl $u(t) = (v_L, v_R)$
- Nach dem kinematischen Grundgesetz bewegt sich der Roboter um ICR mit Winkelgeschwindigkeit ω und Geschwindigkeit v in lokaler x-Richtung.



Vorwärtskinematik für Zweiradfahrzeug (2)

- Es gelten folgende kinematischen Zusammenhänge:

$$v_L = \omega r$$
$$v = \omega (r + l/2)$$
$$v_R = \omega (r + l)$$



- Daraus ergibt sich:

$$v = \frac{v_R + v_L}{2}$$

$$\omega = \frac{v_R - v_L}{l}$$

- Also lassen sich v und ω unmittelbar aus v_L ,v_R und der Achslänge l ermitteln.

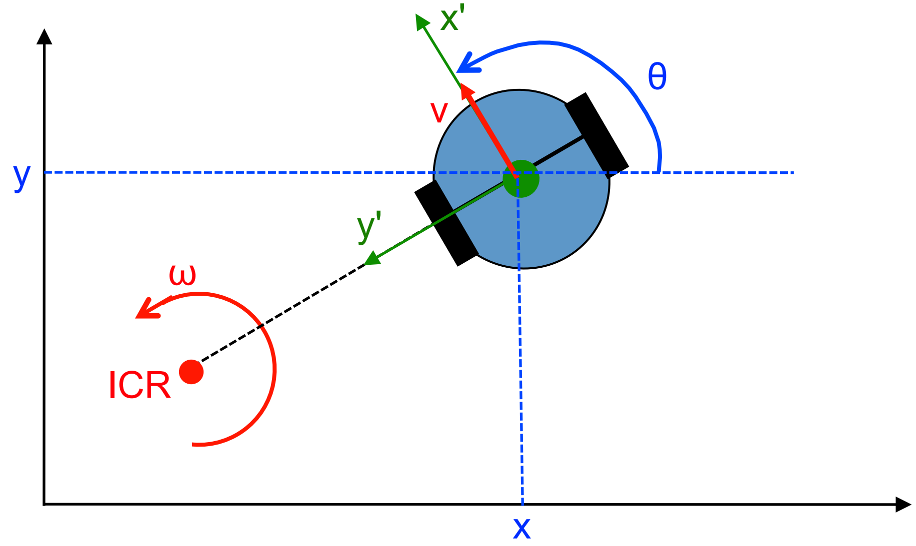
Vorwärtskinematik für Zweiradfahrzeug (3)

- Für die Position des Roboters **x**(t) = (x,y,θ) in einem globalen KS gilt folgende Beziehung:

$$\dot{x} = v\cos\theta$$

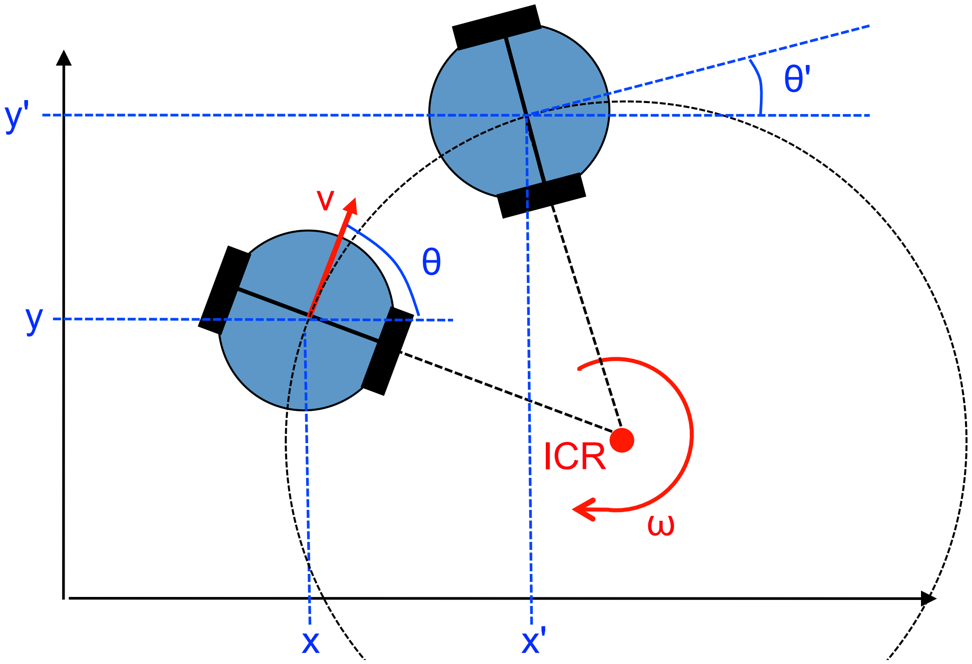
$$\dot{y} = v\sin\theta$$

$$\dot{\theta} = \omega$$



- DGL-System exakt zu lösen ist nicht praktikabel.
  Daher Approximation durch Linearisierung in kleinen Zeitschritten T (z.B. T = 0.01 sec).
  Annahme: im Zeitintervall T ist v und ω konstant.

Vorwärtskinematik für Zweiradfahrzeug (4)



- Pose zum Zeitpunkt t:

$$\mathbf{x}(t) = \left(x, y, \theta\right)$$

- Pose zum Zeitpunkt t+T:

$$\mathbf{x}(t+T) = \left(x', y', \theta'\right)$$

- Approximation: Roboter fährt in Richtung $\theta+\omega T/2$ (halbe Richtungsänderung) die Strecke vT :

$$x' = x + vT * \cos(\theta + \omega T/2)$$
$$y' = y + vT * \sin(\theta + \omega T/2)$$
$$\theta' = \theta + \omega T$$

Bemerkungen (1)

- In der Literatur wird der Term $\omega T/2$ oft weggelassen. Die Approximation ist dann weniger genau:

$$x' = x + vT * \cos(\theta)$$

$$y' = y + vT * \sin(\theta)$$

$$\theta' = \theta + \omega T$$

- Die Kreisbewegung kann auch exakt berechnet werden. Die Approximation wird dadurch genauer:
  - aus v, ω wird der Radius r der Kreisbewegung berechnet.
  - aus alter Pose x, y, θ und Radius r lässt sich ICR bestimmen.
  - aus ICR, θ' und Radius r lässt sich neue Position x', y' bestimmen.

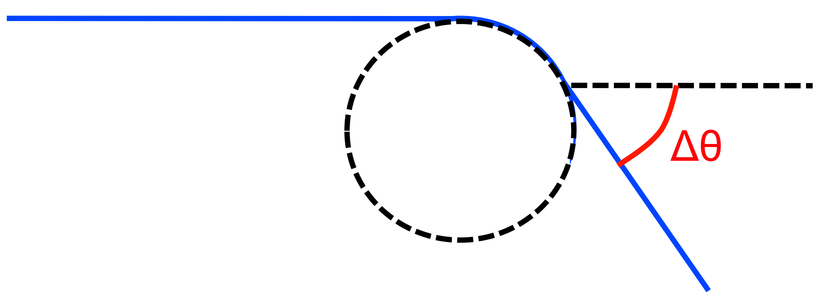
Bemerkungen (2)

- Die Berechnung der neuen Position durch Aufaddieren der Richtungsänderungen und der zurückgelegten Strecken wird auch Koppelnavigation (dead reckoning) genannt.
- Die Messung der zurückgegelegten Strecke (z.B. durch Messung der Radumdrehung) wird auch Odometrie genannt.

Kinematische Grundfertigkeiten

- Richtungsänderung
- Fahrspurwechsel
- Auf Punkt zufahren
- Linie verfolgen und PID-Regler
- Bahn verfolgen.

Richtungsänderung



- Gewünschte Richtungänderung $\Delta\theta$.
- Setze $\omega(t) = \omega_0$ über eine Zeitperiode von

$$\tau = \frac{\Delta\theta}{\omega_0}$$

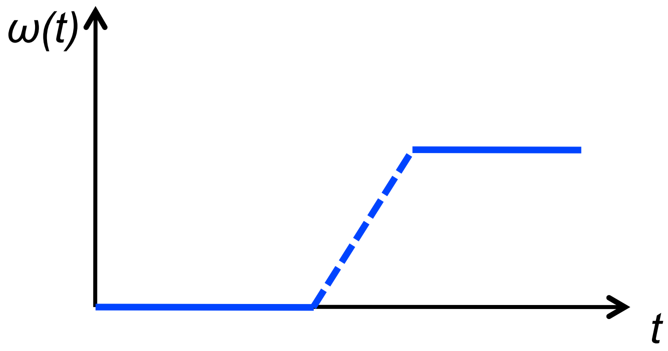
- Gefahrener Kurvenradius r bei einer Geschwindigkeit $v(t) = v_0$ ist dabei

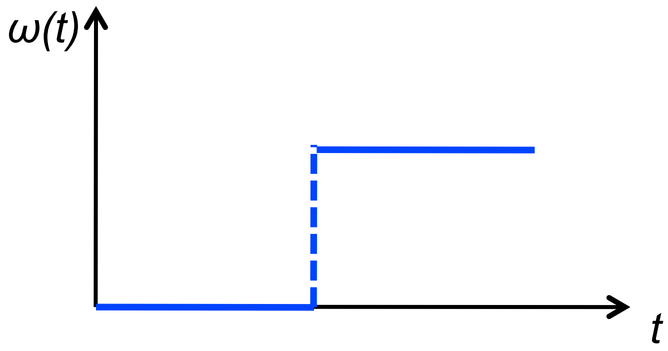
$$r = \frac{v_0}{\omega_0}$$

- Beachte: bei einer Rechtskurve (negative Winkeländerung) ist die Winkelgeschwindigkeit negativ. Entsprechend ist bei einer Linkskurve die Winkelgeschwindigkeit positiv.

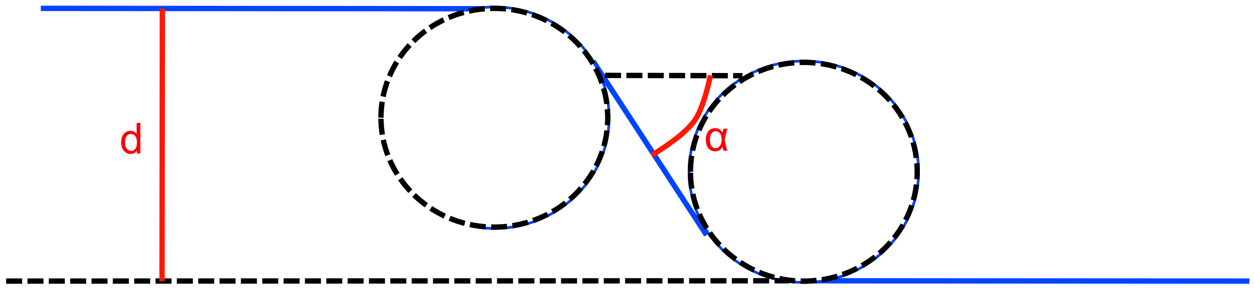
Bemerkung

- Bei einem realen Roboter stellt sich die gewünschte Winkelgeschwindigkeit nicht sofort ein, sondern erst mit einer gewissen Verzögerung, die durch die maximal mögliche Winkelbeschleunigung bestimmt ist.
- Im simulierten Roboter gehen wir jedoch davon aus, dass die Winkelgeschwindigkeit sich sofort (d.h. im nächsten Zeitschritt) einstellt.
  Die maximale Winkelgeschwindigkeit ist aber begrenzt.
- Analoges gilt für die Geschwindigkeit.





Spurwechsel



- Führe zwei entgegengesetzte Richtungsänderungen mit gleichem Betrag durch.
- Die Schräge des Spurwechsels α und die Spurbreite d lassen sich aus den gewählten Geschwindigkeiten und Zeitdauer berechnen

Auf Punkt zufahren (1)

- Bewege Roboter
  auf Zielpunkt (x*,y*)

- Wähle Geschwindigkeit:

$$v = K_P \sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}$$

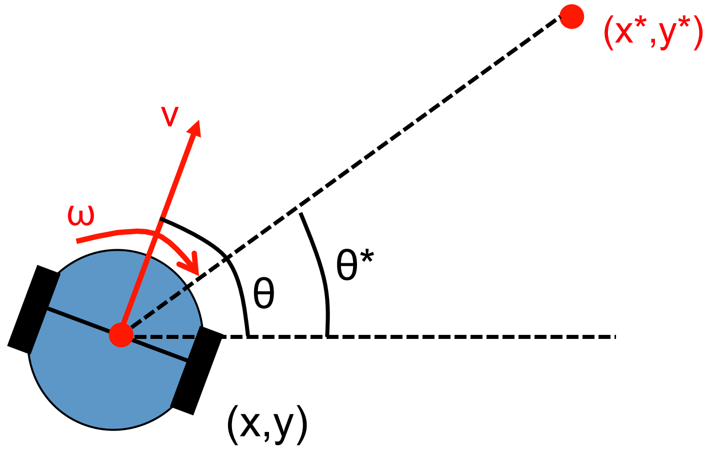
- Zielrichtung:

$$\theta^* = \operatorname{atan2}(y^* - y, x^* - x)$$

- Winkelgeschwindigkeit:

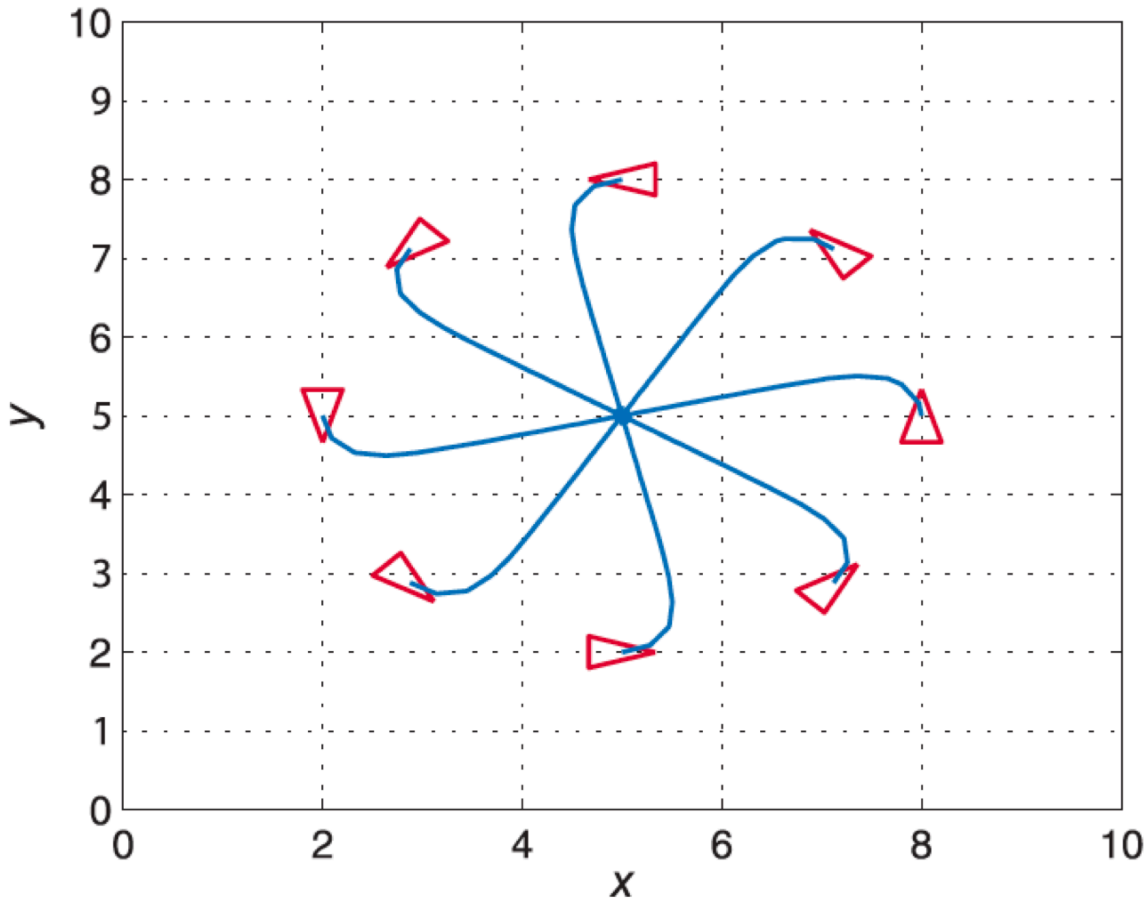
$$\omega = K_\omega \operatorname{diff}(\theta^*, \theta)$$

dabei ist diff(θ*,θ) die Winkeldifferenz aus dem Intervall [-π +π).



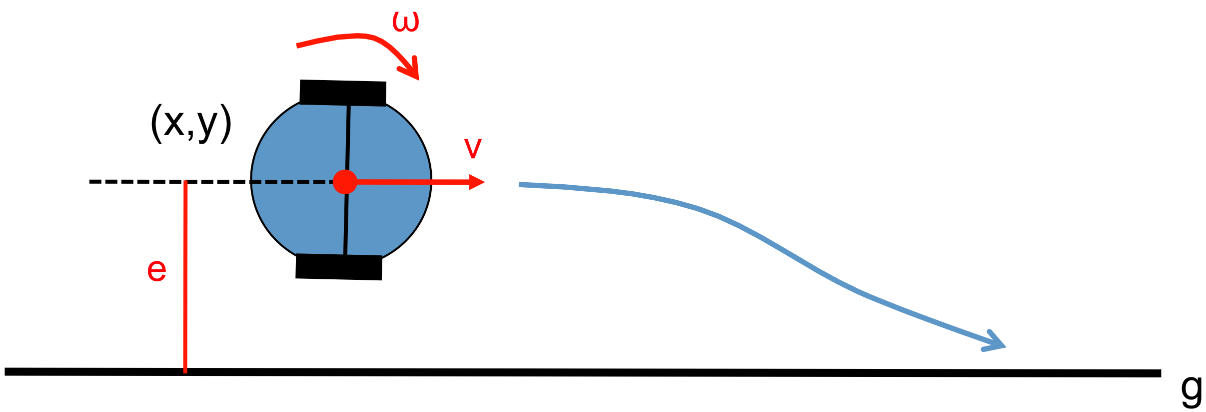
Auf Punkt zufahren (2)

- Beispiel-Trajektorien:



aus [Corke 2011]

Linienverfolgung und PID-Regler (1)



- Zeile: verfolge Linie (Gerade) g
- Regelabweichung e (= Abstand von Roboterposition (x,y) zur Geraden g) soll auf 0 geregelt werden.
- Mit einfachem P-Regler wird ω proportional zu e gesetzt:

$$\omega(t) = -K_P e(t)$$

Beachte: bei der Abstandsberechnung von Punkt (x,y) zur Geraden g ist e negativ, falls (x,y) unterhalb der Linie liegt, und sonst positiv.

Linienverfolgung und PID-Regler (2)

- Ein reiner P-Regler zeigt ein Überschwingen des Linienabstands e
- Um ein Überschwingen zu vermeiden, kann zusätzlich noch ein D-Anteil (Differential-Anteil) addiert werden.
- Zeigt sich eine bleibende Regelabweichung (z.B. Winkelgeschwindigkeit hat aufgrund unterschiedlicher großer Räder einen Offset), kann auch noch ein Integralanteil addiert werden.

$$\omega(t) = -\underbrace{K_P e(t)}_{P} - \underbrace{K_D \frac{de(t)}{dt}}_{D} - \underbrace{K_I \int e(t)dt}_{I}$$

- Aproximation:

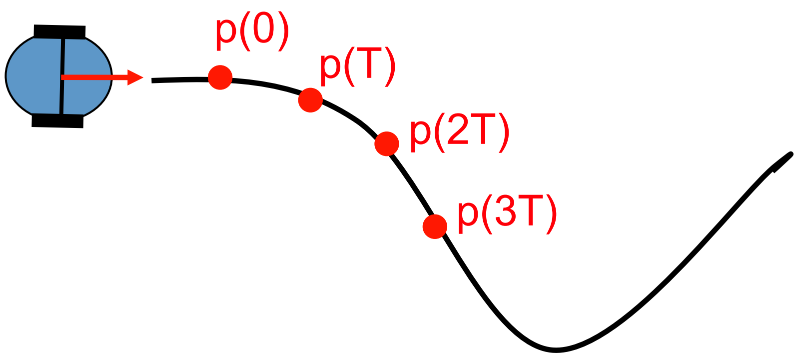
$$\frac{de}{dt} = \frac{e(t) - e(e-T)}{T}$$

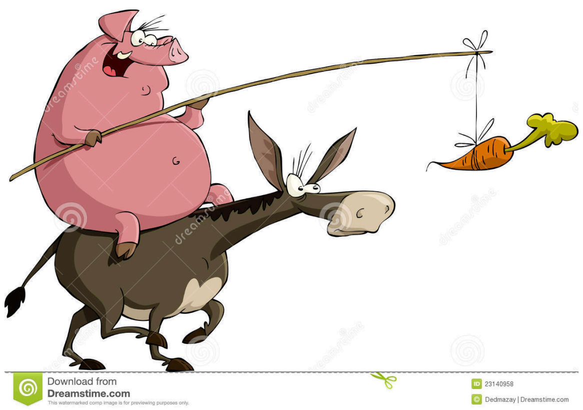
$$\int edt = \sum_{k=0}^{k=t/T} e(kT)$$

- Einstellen der Parameter K_P, K_D und K_I mit Faustregel (z.B. Ziegler / Nichols).

Bahn verfolgen

- Ist die vorgebene Bahn als glatte, kinematisch befahrbare Trajektorie vorgebenen, dann kann mit einem Linienverfolger die Trajektorie abgefahren werden.
- Eine Alternative ist das Carrot-Donkey-Verfahren
- Dabei bewegt sich ein Zielpunkt p(t) = (x*(t),y*(t)) über die gewünschte Trajektorie.
- Ein PID-Regler für die Geschwindigkeit v sorgt dafür, dass der Abstand zu p(t) = (x*(t),y*(t)) einen konstanten Wert d* behält.
- Ein zweiter PID-Regler sorgt dafür, dass der Roboter in Richtung Zielpunkt p(t) = (x*(t),y*(t)) ausgerichtet wird (wie bei Regler, der auf einen Punkt zufährt.)





Polylinie verfolgen

- Einfacher Ansatz:
  fahre die einzelnen Eckpunkte an, stoppe jeweils und
  drehe Roboter in die Richtung des nächsten Eckpunkts.

  Beachte: simulierter Roboter mit Differentialantrieb kann das.
  Ein realer Roboter mit Differentialantrieb müsste rechtzeitig zum Eckpunkt abgebremst werden.

  Eckige und unschöne Fahrweise!

  Ein Auto dagegen kann eine Polylinie nicht exakt abfahren.

- Die Polylinie kann zu einer kinematisch befahrbaren Kurve geglättet werden (z.B. mit Bezierkurven)

- Die Polylinie kann auch mit einem Carrot-Donkey-Verfahren abgefahren werden.