Übungen zur Mathematik 1 **Garloff**

Blatt 2

1) Auf der Menge $A = \{1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ sei eine binäre Relation R gegeben durch
$R = \{(1,1), (1,8), (3,3), (3,7), (4,4), (9,8), (7,3), (5,5), (9,1), (9,9), (8,9), (8,8), (8,1), (1,9), (7,7)\}$.

   a) Stellen Sie R mit Hilfe einer Matrix und eines Graphen dar.

   b) Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation auf A ist.

   c) Geben Sie alle Äquivalenzklassen in aufzählender Form an.

2) Untersuchen Sie, ob die Relation $R := \{ (a,b) \in \mathbf{N}^2 \mid \exists s \in \mathbf{N} : b = sa\}$ reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv ist.

3) Zeigen Sie, dass die Relation $aRb \;:\Leftrightarrow\; a \cdot b$ ist ungerade oder $a = b$
eine Äquivalenzrelation auf $\mathbf{N}^2$ ist. Wie lauten die Äquivalenzklassen bezüglich R?

4) Auf der Menge $\mathbf{Z}$ der ganzen Zahlen werde eine binäre Relation R erklärt durch

$$xRy \quad :\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbf{Z} : x + xy = 2k,$$

d.h. $x + xy$ ist eine gerade Zahl.
Zeigen Sie, dass R reflexiv und transitiv ist. Ist R auch symmetrisch?

5) Auf der Menge $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ aller Paare ganzer Zahlen mit positiver zweiter Komponente sei eine Relation $\sim$ erklärt vermöge

$$(a,b) \sim (c,d) \quad :\Leftrightarrow \quad ad = bc.$$

   a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ bildet.

   b) Die von (a,b) repräsentierte Äquivalenzklasse sei mit $[a : b]$ bezeichnet. Es sei

$$M_{\sim} := \{[a : b] \mid (a,b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}\}$$

   die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. ~. Auf $M_{\sim}$ werde eine Relation $\leq$ erklärt durch

$$[a : b] \leq [c : d] \quad :\Leftrightarrow \quad ad \leq bc,$$

   wobei $\leq$ die übliche kleiner-gleich-Relation auf $\mathbf{Z}$ bezeichnet.
   Zeigen Sie, dass $\leq$ eine Ordnung auf $M_{\sim}$ ist.
   Sind je zwei Äquivalenzklassen vergleichbar bzgl. $\leq$, d. h. gilt für alle $[a : b], [c : d] \in M_{\sim}$

$$[a : b] \leq [c : d] \quad \text{oder} \quad [c : d] \leq [a : b]?$$

   Überlegen Sie sich zur Beantwortung der Frage, welcher Relation auf der Menge der rationalen Zahlen die Relation $\sim$ entspricht.

6) Es sei $M := \{1, 2, \dots, n\}$. Sie können ohne Beweis den folgenden Sachverhalt als bekannt voraussetzen

die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M beträgt $\binom{n}{k}$. (*)

Auf der Menge $\mathbf{P}(M,k)$ der k-elementigen Teilmengen von M werde eine Relation R erklärt vermöge

$$A\,R\,B \;:\Leftrightarrow\; A \cap B = \emptyset \quad \text{für alle } A,B \in \mathbf{P}(M,k).$$

Der Graph $G(n,k)$ ist derjenige Graph, der die Relation R darstellt: Seine Knoten sind die k-elementigen Teilmengen von M; der Einfachheit halber bezeichnen wir die Knoten mit A,B, … Der Knoten A ist genau dann mit dem Knoten B durch einen Pfeil verbunden, wenn $A\,R\,B$ gilt. Da R offensichtlich symmetrisch ist, genügt es, zwei derartige Knoten nur durch *eine* (ungerichtete) Verbindungslinie, eine so genannte *Kante*, zu verbinden (anstelle von zwei gerichteten Pfeilen).

a) Zeichnen Sie die Graphen $G(5,1)$ und $G(5,2)$. Versuchen Sie den $G(5,2)$ so zu zeichnen, dass sich möglichst wenige Kanten schneiden.

Im Folgenden sind n und k beliebig gewählt.

b) Mit wie vielen Knoten ist ein Knoten des Graphen $G(n,k)$ durch eine Kante verbunden? Machen Sie zweckmäßigerweise Gebrauch von (*).

c) Folgern Sie hieraus, wie viele Kanten der Graph $G(n,k)$ besitzt.
Überprüfen Sie Ihr Resultat anhand des Graphen $G(5,2)$.