

Blatt 1

1. Führen Sie für die folgenden Funktionen eine Kurvendiskussion durch.
An welchen Stellen wird jeweils das absolute Minimum angenommen?

a) $f(x) = \frac{x^2}{(x+2)^2}$

b) $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x$

c) $f(x) = (\sin x)^2 + 2 \cos x$.

2. Welche Maße muss eine geschlossene zylindrische Dose haben, damit sie für einen gegebenen Inhalt V mit einem Minimum an Material hergestellt werden kann?
3. Einen Halbkreis vom Radius r ist das Trapez größten Flächeninhalts einzubeschreiben. Berechnen Sie die Seitenlängen und den Inhalt dieses Trapezes.
4. Ermitteln Sie (ohne Kenntnis von Eigenschaften der Kurve) denjenigen Kurvenpunkt der Kurve der Funktion $f(x) = x^2 - 3x + 3$, der vom Ursprung den kleinsten Abstand besitzt.
5. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \ln(1+x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\ln(1+x^2)}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x\right)$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 1)^{\frac{1}{\sin(\pi x)}}$.

6. Linearisieren Sie die Quadratwurzelfunktion in der Umgebung der Stelle $x_0 = 1.96 = (1.4)^2$ und berechnen Sie hieraus einen Näherungswert für $\sqrt{2}$. Was bedeutet dieser Näherungswert geometrisch?
7. Ein Winkel wird mit $\alpha = 31.60^\circ \pm 0.05^\circ$ gemessen. Schätzen Sie unter Verwendung des Differentials ab, wie groß der prozentuale Fehler von $\sin \alpha$ (im Bogenmaß) sein kann.

8. Die Messung des Radius r einer Kugel ergibt 3 cm mit einem maximalen Messfehler von ± 0.003 cm. Schätzen Sie mit Hilfe des Differentials ab, wie groß der prozentuale Fehler bei der Berechnung der Oberfläche der Kugel maximal werden kann.
9. Der Ablenkungswinkel φ des Zeigers eines elektrischen Messinstrumentes hängt von der Stromstärke i gemäß der Gleichung $i = k \tan \varphi$ mit $0 < \varphi < 90^\circ$ ab, wobei k eine positive Konstante ist. Schätzen Sie unter Verwendung des Differentials den maximalen relativen Fehler der Stromstärke ab, wenn die Ablesung von $\varphi = 20^\circ$ mit dem maximalen absoluten Fehler $\Delta\varphi = 5'$ behaftet ist. Für welchen Ablenkungswinkel φ wird der maximale relative Fehler von i bei gleichbleibender Ablesegenauigkeit am kleinsten?

Hinweis: 1 Grad (1°) entspricht 60 Minuten ($60'$).