Matthias O. Franz

Verallgemeinerte Bayessche Entscheidungstheorie

Lösung der Aufgabe vom 25.10.2007

3.1. Sie installieren Ihr neues Bildverarbeitungssystem in einer Chipfabrik, das 95% aller kaputten Chips entdeckt, allerdings auch bei 1% der funktionsfähigen Chips Alarm schlägt. Insgesamt sind 1% aller Chips Ausschuß. Die Herstellungskosten für einen Chip betragen 5 Euro, der Verkaufspreis 20 Euro. Die Folgekosten für einen irrtümlich durchgelassenen kaputten Chip sind sehr hoch, nämlich 1995 Euro.

Ihr Chef will von Ihnen das erwartete Gesamtrisiko bei Anwendung der optimalen Bayes-Entscheidungsregel wissen, d.h. wieviel Gewinn oder Verlust er in diesem Fall pro Chip machen wird.

Im Szenario der Aufgabe gibt es 2 Naturzustände:

ω_1 : Chip ist kaputt.
ω_2 : Chip ist funktionsfähig, d.h. ganz.

Ebenso gibt es 2 Aktionen, die wir nach Beobachtung durch das Bildverarbeitungssystem durchführen können:

α_1 : Chip wegwerfen.
α_2 : Chip behalten, d.h. an den Kunden weiterverkaufen.

Die zugrundeliegende Klassifikationsaufgabe ist also eine *Dichotomie*, d.h. wir haben 2 Klassen und 2 Aktionen. Zusätzlich gibt es 2 mögliche Beobachtungen, die unser Bildverarbeitungssystem liefert:

x_1 : Das System gibt Alarm, d.h. es vermutet einen Herstellungsfehler.
x_2 : Das System gibt keinen Alarm, d.h. es bleibt still.

Wir berechnen zunächst die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Bayes-Formel, dann die bedingten Risiken aus der Kostenfunktion.

a. A-Priori-Wahrscheinlichkeiten: Laut Aufgabenstellung sind 1 % aller Chips defekt. Unsere A-priori-Wahrscheinlichkeiten sind also

$$\begin{aligned} p(\text{kaputt}) &= 0.01 \\ p(\text{ganz }) &= 1 - p(\text{kaputt}) = 0.99. \end{aligned}$$

b. Likelihood: Es gibt insgesamt 4 mögliche Kombinationen aus den 2 Beobachtungsausgängen und 2 Zuständen, also hat die Likelihood 4 Terme:

$$\begin{aligned} p(\text{Alarm}|\text{kaputt}) &= 0.95 \\ p(\text{still}|\text{kaputt}) &= 0.05 \\ p(\text{Alarm}|\text{ganz}) &= 0.01 \\ p(\text{still}|\text{ganz}) &= 0.99 \end{aligned}$$

c. Evidenz: Die Wahrscheinlichkeit für die beiden Beobachtungen *Alarm* und *ganz*:

$$\begin{aligned} p(\text{Alarm}) = &\quad p(\text{Alarm}|\text{kaputt})p(\text{kaputt}) + p(\text{Alarm}|\text{ganz})p(\text{ganz}) = &\quad 0.95 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot 0.99 = 0.0194 \\ p(\text{still}) = &\quad p(\text{still}|\text{kaputt})p(\text{kaputt}) + p(\text{still}|\text{ganz})p(\text{ganz}) = &\quad 0.05 \cdot 0.01 + 0.99 \cdot 0.99 = 0.9806 \end{aligned}$$

d. A-Posteriori-Wahrscheinlichkeit: Wie gehabt über die Bayes-Formel:

$$\begin{aligned} p(\text{kaputt}|\text{Alarm}) &= \tfrac{p(\text{Alarm}|\text{kaputt})p(\text{kaputt})}{p(\text{Alarm})} = \tfrac{0.95 \cdot 0.01}{0.0194} = &\quad 0.49 \\ p(\text{ganz}|\text{Alarm}) &= \tfrac{p(\text{Alarm}|\text{ganz})p(\text{ganz})}{p(\text{Alarm})} = \tfrac{0.01 \cdot 0.99}{0.0194} = &\quad 0.51 \\ p(\text{kaputt}|\text{still}) &= \tfrac{p(\text{still}|\text{kaputt})p(\text{kaputt})}{p(\text{still})} = \tfrac{0.05 \cdot 0.01}{0.9806} = &\quad 0.0005 \\ p(\text{ganz}|\text{still}) &= \tfrac{p(\text{still}|\text{ganz})p(\text{ganz})}{p(\text{still})} = \tfrac{0.99 \cdot 0.99}{0.9806} = &\quad 0.9995 \end{aligned}$$

e. Kostenfunktion: Aus der Aufgabenstellung ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha_1|\omega_1) &= \lambda(\text{weg}|\text{kaputt}) = &\quad 5 \text{ €} \\ \lambda(\alpha_1|\omega_2) &= \lambda(\text{weg}|\text{ganz}) = &\quad 5 \text{ €} \\ \lambda(\alpha_2|\omega_1) &= \lambda(\text{beh.}|\text{kaputt}) = &\quad 2000 \text{ €} \\ \lambda(\alpha_2|\omega_2) &= \lambda(\text{beh.}|\text{ganz}) = &\quad \text{-15 €} \end{aligned}$$

e. Bedingtes Risiko:

$$\begin{aligned} R(\text{weg}|\text{Alarm}) &= \lambda(\text{weg}|\text{kaputt})p(\text{kaputt}|\text{Alarm}) + \lambda(\text{weg}|\text{ganz})p(\text{ganz}|\text{Alarm}) = &\quad 5 \text{ €} \cdot 0.49 + 5 \text{ €} \cdot 0.51 = 5 \text{ €} \\ R(\text{beh.}|\text{Alarm}) &= \lambda(\text{beh.}|\text{kaputt})p(\text{kaputt}|\text{Alarm}) + \lambda(\text{beh.}|\text{ganz})p(\text{ganz}|\text{Alarm}) = &\quad 2000 \text{ €} \cdot 0.49 - 15 \text{ €} \cdot 0.51 = 972.35 \text{ €} \\ R(\text{weg}|\text{still}) &= \lambda(\text{weg}|\text{kaputt})p(\text{kaputt}|\text{still}) + \lambda(\text{weg}|\text{ganz})p(\text{ganz}|\text{still}) = &\quad 5 \text{ €} \cdot 0.0005 + 5 \text{ €} \cdot 0.9995 = 5 \text{ €} \\ R(\text{beh.}|\text{still}) &= \lambda(\text{beh.}|\text{kaputt})p(\text{kaputt}|\text{still}) + \lambda(\text{beh.}|\text{ganz})p(\text{ganz}|\text{still}) = &\quad 2000 \text{ €} \cdot 0.0005 - 15 \text{ €} \cdot 0.9995 = \text{-13.99 €} \end{aligned}$$

Nach der Bayesschen Entscheidungsregel entscheiden wir uns also für Wegwerfen bei Alarm und Behalten bei keinem Alarm.

f. Gesamtrisiko: Bei Anwendung der vorgeschlagenen Strategie beläuft sich das Gesamtrisiko auf

$$R_{\text{ges}} = R(\text{weg}|\text{Alarm}) \cdot p(\text{Alarm}) + R(\text{beh.}|\text{still}) \cdot p(\text{still}) = 5 \text{ €} \cdot 0.0194 - 13.99 \text{ €} \cdot 0.9806 = \text{-13.62 €}.$$

Damit liegt der erwartete Gewinn pro Chip bei 13.62 €.

3.2. Leiten Sie die Entscheidungsregel von Aufgabe 3.1. mit Hilfe der Likelihood Ratio ab.

a. Vereinfachte Kostenfunktion:

$$\begin{aligned}
\lambda_{11} = \lambda(\alpha_1|\omega_1) &= \lambda(\text{weg}|\text{kaputt}) = && 5\text{ €} \\
\lambda_{12} = \lambda(\alpha_1|\omega_2) &= \lambda(\text{weg}|\text{ganz}) = && 5\text{ €} \\
\lambda_{21} = \lambda(\alpha_2|\omega_1) &= \lambda(\text{beh.}|\text{kaputt}) = && 2000\text{ €} \\
\lambda_{22} = \lambda(\alpha_2|\omega_2) &= \lambda(\text{beh.}|\text{ganz}) = && \text{-15 €}
\end{aligned}$$

Es gilt also $\lambda_{21} > \lambda_{11}$, so daß die vereinfachte Entscheidungsregel aus der Vorlesung anwendbar ist (ansonsten gilt die Umkehrung).

b. Schwellwert:

$$\frac{\lambda_{12} - \lambda_{22}}{\lambda_{21} - \lambda_{11}} \frac{p(\text{ganz})}{p(\text{kaputt})} = \frac{5\text{ €} + 15\text{ €}}{2000\text{ €} - 5\text{ €}} \frac{0.99}{0.01} = 0.99$$

Wir entscheiden uns also für Wegwerfen, wenn die Likelihood Ratio größer als 0.99 ist, sonst für Behalten.

c. Likelihood Ratio:

$$\begin{array}{rccl}
\text{Bei Alarm:} & \frac{p(\text{Alarm}|\text{kaputt})}{p(\text{Alarm}|\text{ganz})} = \frac{0.95}{0.01} = 95 & \Rightarrow & \text{Wegwerfen} \\
\text{Kein Alarm:} & \frac{p(\text{still}|\text{kaputt})}{p(\text{still}|\text{ganz})} = \frac{0.05}{0.99} = 0.05 & \Rightarrow & \text{Behalten}
\end{array}$$

Wir kommen also zum selben Ergebnis wie bisher.