HTWG Konstanz 19.7.2021
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

1.) (4+4 Punkte) Die Funktionen f(x) und g(x) schließen eine Fläche ein.

$$f(x) = cos(x) \qquad\qquad g(x) = x^2$$

a.) Bestimmen Sie näherungsweise mit einem Iterationsschritt den Inhalt der Fläche.
b.) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des größten Rechtecks, welches in diese von den Funktionen eingeschlossene Fläche gelegt werden kann. Ersetzen Sie dazu f(x) durch ihre Taylorreihe mit 2 Summanden.

2.) (5+5 Punkte) a.) Bestimmen Sie den Wert des Integrals.

$$\int_{\sqrt{0.5}}^{1} x \cdot sin^2\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) dx$$

b.) Wie groß ist der prozentuale Fehler, wenn die Funktion unter dem Integral durch ihre Tangente am Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ ersetzt wird?

3.) (7 Punkte) Welche z-Werte erfüllen die Gleichung f(z) = g(z)?

$$f(z) = z + 1 - 5i \qquad\qquad g(z) = 5\,\frac{2-i}{z}$$

4.) (5 Punkte) Skizzieren Sie in der Gausschen Zahlenebene die Menge aller Zahlen z, die die beiden Ungleichungen

$$Re(z) + Im^2(z) \leq 2 \qquad\qquad |z - i| \leq 1$$

erfüllen.

5.) (7 Punkte) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{18}{k^2 + k - 2}$$

6.) (7 Punkte) Bestimmen Sie die Darboux'sche Obersumme O_n der Funktion f(x) = 2-x im Intervall [0,2]. Wie groß ist die Differenzbetrag zum Grenzwert, wenn 100 Summanden berücksichtigt werden?

7.) (9 Punkte) Berechnen Sie näherungsweise mit dem Trapezverfahren das Integral

$$\int_0^2 \cos^n\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

für n = 2 und n → ∞ (n gerade). Wählen Sie vier Teilintervalle. Wie groß ist der absolute Fehler bei n = 2 zum exakten Wert des Integrals? Wie groß ist dieser für n → ∞ (n gerade)?

8.) (3 Punkte) Begründen Sie mit der komplexen e-Funktion.

$$sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = cos(x)$$

9.) (4 Punkte) Für welche x-Werte ist die Ungleichung erfüllt? Lösen Sie zeichnerisch!

$$|x^2 - 4x + 3| < |x - 1|$$

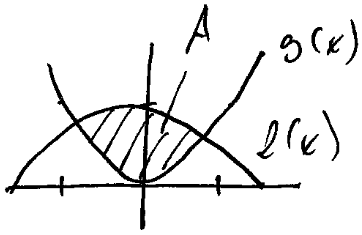
HTWG Konstanz 19.7.2021
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

KLAUSUR MATHEMATIK 1 SS 21

AUFGABE 1



a.) $f(x)=g(x)$

$\Rightarrow h(x) = \cos(x) - x^2 = 0$

$h'(x) = -\sin(x) - 2x$

$x_0 = \pm\frac{\pi}{4}$

$x_1 = x_0 - \frac{\cos(x_0) - x_0^2}{-\sin(x_0) - 2x_0} = \pm 0{,}825$

0,825

$$A = \int_{-0{,}825}^{0{,}825} \cos(x) - x^2 \, dx = 2\int_0^{0{,}825} \cos(x) - x^2 \, dx = 2\left[\sin(x) - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{0{,}825}$$

$= 1{,}095$

b.) $B = 2x(\cos(x) - x^2) \approx 2x\left(1 - \frac{x^2}{2} - x^2\right) = 2x - 3x^3$

$B' = 2 - 9x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{\frac{2}{9}}$

$\Rightarrow B = 2\sqrt{\frac{2}{9}} - 3\left(\frac{2}{9}\right)^{3/2} = 0{,}629$

AUFGABE 2

a.) $\int_{\sqrt{0{,}5}}^{1} x \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) dx$

$u = \frac{\pi}{2}x^2 \quad \frac{du}{dx} = \pi x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{\pi x}$

$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\pi} \sin^2(u) \, du = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}(u - \sin(u)\cos(u))\right]_{\pi/4}^{\pi/2}$

$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\pi}{2} - 0 - \left(\frac{\pi}{4} - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right] = \frac{1}{8} + \frac{1}{4\pi} = 0{,}205$

b.) $f(x) = x \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x^2\right),$

$f'(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x^2\right) + x\, 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)\pi x$

$T(x) = f(1) + f'(1)(x-1)$

$= 1 + (1+0)(x-1) = 1 + (x-1) = x$

HTWG Konstanz 19.7.2021
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

$$\int_{\sqrt{0,5}}^{1} T(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\sqrt{0,5}}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1/4$$

$$\left.\begin{array}{ll} 0,205 & \hat{=}\ 100\% \\ 0,25 & \hat{=}\ x \end{array}\right\} x = 122\% \Rightarrow \text{FEHLER}: 22\%$$

AUFGABE 3

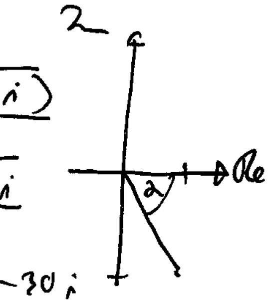
$$z + 1 - 5i = 5\,\frac{2-i}{z}$$

$$\Rightarrow z^2 + (1-5i)z - 10 + 5i = 0$$

$$z_{1/2} = \frac{-1+5i \pm \sqrt{(1-5i)^2 - 4(-10+5i)}}{2}$$

$$= \frac{-1+5i \pm \sqrt{1 - 10i - 25 + 40 - 20i}}{2}$$

$$= \frac{-1+5i \pm \sqrt{16 - 30i}}{2}$$



$$|\tan(\alpha)| = \frac{30}{16} = 1,875 \Rightarrow \alpha = -61,928°$$

$$u = 16 - 30i = \sqrt{16^2 + 30^2}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{180}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{180}\pi\right)\right)$$

$$\sqrt{u} = \sqrt[4]{1156}\left(\cos\left(\frac{\alpha/2}{180}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\alpha/2}{180}\pi\right)\right)$$

$$= 5 - 3i$$

$$= \frac{-1+5i \pm (5-3i)}{2} \Rightarrow \begin{array}{l} z_1 = 2 + i \\ z_2 = -3 + 4i \end{array}$$

AUFGABE 4

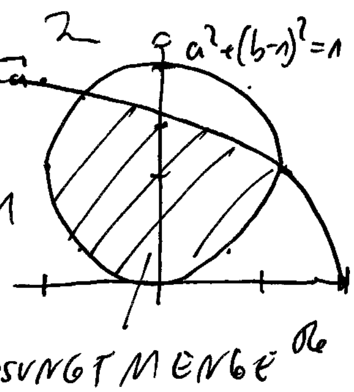
$$z = a + ib$$

$$\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}^2(z) = a + b^2 \le 2$$

$$\Rightarrow b \le \sqrt{2-a}$$

$$|z - i| = |a + ib - i| = |a + i(b-1)| \le 1$$

$$\Rightarrow a^2 + (b-1)^2 \le 1$$



.

HTWG Konstanz 19.7.2021
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

KLAUSUR MATHEMATIK 1 SS 21

AUFGABE 5

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{18}{k^2+k-2} = 18 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)(k+2)}$$

$$\frac{1}{(k-1)(k+2)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+2} = \frac{a(k+2)+b(k-1)}{(k-1)(k+2)}$$

$$\Rightarrow (a+b)k = 0 \Rightarrow b = -a$$

$$2a - b = 1 \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = 1/3,\ b = -1/3$$

$$= 18 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1/3}{k-1} + \frac{-1/3}{k+2} = 6 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1} - 6 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k+2}$$

$$= 6\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k}\right) = 6\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k}\right)$$

$$= 11$$

AUFGABE 6

$$x_k = k\frac{(b-a)}{n} + a = k\frac{2}{n} \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$$

$$O_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,max})\Delta x = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(2 - (k-1)\frac{2}{n}\right)\frac{2}{n} = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} 2 - k\frac{2}{n} + \frac{2}{n}$$

$$= \frac{2}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} 2 + \frac{2}{n} - \sum_{k=1}^{n} k\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n}\left(2+\frac{2}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= 4 + \frac{4}{n} - \frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = 4 + \frac{4}{n} - 2\frac{n+1}{n}$$

$$= 2 + \frac{2}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} O_n = 2$$

$$|O_{100} - O_{\infty}| = \left|2 + \frac{2}{100} - 2\right| = \frac{1}{50}$$

AUFGABE 7

$$\int_0^2 \cos^n\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx = \frac{1}{2-0}\left(\frac{\cos^n\left(\frac{\pi}{2}0\right)}{2} + \cos^n\left(\frac{\pi}{2}0{,}5\right) + \cos^n\left(\frac{\pi}{2}1\right)\right)$$

HTWG Konstanz 19.7.2021
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

$$+\cos^n\left(\tfrac{\pi}{2}1{,}5\right) + \frac{\cos^n\left(\tfrac{\pi}{2}2\right)}{2}\Bigg)$$

$n=2$:

$$\int_0^2 \dots dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1^2}{2} + 0{,}5 + 0 + 0{,}5 + \frac{1^2}{2}\right) = 1$$

$n=\infty$ (n GERADE)

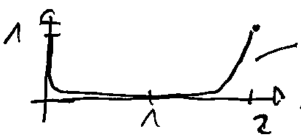
$$\int_0^2 \dots dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}\right) = 1/2$$

$$\int_0^2 \cos^2\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) dx$$

$$u = \frac{\pi}{2}x \quad \frac{du}{dx} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow dx = \frac{2}{\pi}du$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos^2(u)\,du = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(u + \sin(u)\cos(u)\right)\right]_0^\pi = 1$$

$\Rightarrow$ KEIN FEHLER



$\cos^n(\frac{\pi}{2}x)$ FÜR $n\to\infty$ (n GERADE) $\Rightarrow \int_0^2 \dots dx = 0 \Rightarrow$ FEHLER: $1/2$

AUFGABE 8

$$\sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) = \frac{e^{i(x+\frac{\pi}{2})} - e^{-i(x+\frac{\pi}{2})}}{2i}$$

$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}e^{ix} - e^{-i\frac{\pi}{2}}e^{-ix}}{2i} = \frac{i e^{ix} - (-i)e^{-ix}}{2i}$$

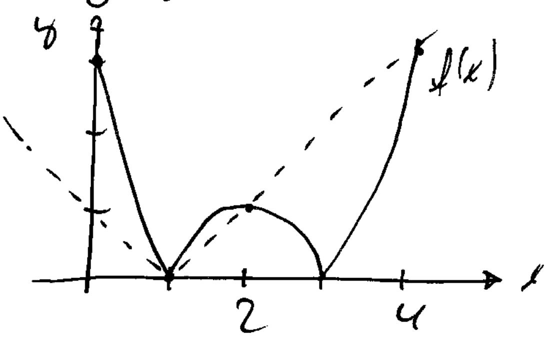
$$= \frac{i(e^{ix}+e^{-ix})}{2i} = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos(x)$$

AUFGABE 9

$f(x) = |x^2 - 4x + 3|$

$g(x) = |x - 1|$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	0	1	0	3
$g(x)$	1	0	1	2	3



LÖSUNGSMENGE

$2 < x < 4$