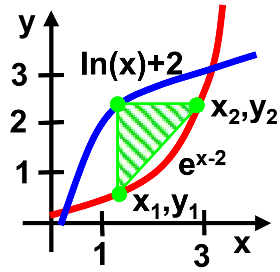
HTWG Konstanz 7.2.2022
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:



1.) (3+5 Punkte) Die Funktionen ln(x)+2 und e^{x-2} schließen das dargestellte Dreieck mit dem Flächeninhalt A ein.
a.) Bestimmen Sie x_2 in Abhängigkeit von x_1 und den Flächeninhalt A in Abhängigkeit von x_1. Welche Bedingung muss x_1 erfüllen, damit der Flächeninhalt maximal wird (bestimmen Sie nicht x_1!)?
b.) Um die Aufgabe zu vereinfachen, wird die Exponentialfunktion e^{x-2} durch ihre Linearisierung bei x = 2 ersetzt. Berechnen Sie den Flächeninhalt A des größten möglichen Dreiecks.

2.) (4+3 Punkte) Über eine Integralgleichung ist für b ≥ 0 die Funktion A(b) gegeben.

$$A(b) = \int_0^b \frac{x}{e^x}\big(cosh(x) - sinh(x)\big)\,dx$$

a.) Es gilt a ≤ A(b) < c. Bestimmen Sie a und c.
b.) Für welches b gilt A(b) = 1/8. Berechnen Sie beim Newtonverfahren nur einen Iterationsschritt und verwenden Sie den Startwert $b_0 = 1$.

3.) (3+3 Punkte) a.) Bestimmen Sie mit Zwischenschritten die Stammfunktion von

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

b.) Bestimmen Sie näherungsweise mit der numerischen Integration den Wert von arcsin(0.5). Berücksichtigen Sie zwei Teilintervalle und arcsin(0) = 0. Wie groß ist der prozentuale Fehler zum exakten Wert?

4.) (5+6 Punkte) a.) Für welche z-Werte ist die Bedingung f(z) = 2g(z) erfüllt?

$$f(z) = z - 1 + i \qquad\qquad g(z) = (i-1)z^{-1}$$

b.) Für welche z-Werte sind die Gleichungen |f(z)| ≤ 1 und Re(g(z)) ≥ 2Im(g(z)) gemeinsam erfüllt? Skizzieren Sie die Lösungsmenge in der Gausschen Zahlenebene.

5.) (5+3 Punkte) a.) Geben Sie die Darbouxschen Obersumme O_n und Untersumme U_n für die Funktion f(x) = 1/x im Intervall [1,2] an. Bestimmen Sie O_4-U_4.
b.) Für welches n gilt O_n-U_n < 0.01 (bei einer Summe muss der Index geändert werden!)?

6.) (5 Punkte) Bestimmen Sie (kombiniert rechnerisch / zeichnerisch) die x-Werte, für die die Ungleichung erfüllt ist.

$$|3-x| \le \left|1-\frac{3}{x}\right|$$

7.) (4 Punkte) Begründen Sie mit der komplexen e-Funktion.

$$sin(x_1)cos(x_2) + cos(x_1)sin(x_2) = sin(x_1 + x_2)$$

8.) (11 Punkte) Bestimmen Sie den Wert des Integrals indem Sie die ganze Funktion e^x/x in eine Taylorreihe bis zur dritten Ableitung um $x_0 = 1$ entwickeln. Als zweiten Weg berücksichtigen Sie 1/x und die ersten 4 Summanden der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion e^x. Welchen Betrag liefert die numerische Integration von e^x/x mit 2 Teilintervallen?

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx$$

HTWG Konstanz 7.2.2022
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

KLAUSUR MATHEMATIK 1 WS 21/22

AUFGABE 1

a.) $y_2 = e^{x_2-2} = \ln(x_1)+2 \Rightarrow x_2 = \ln(\ln(x_1)+2)+2$

$A(x_1) = \frac{1}{2}(x_2-x_1)(\ln(x_1)+2-e^{x_1-2})$

$= \frac{1}{2}(\ln(\ln(x_1)+2)+2-x_1)(\ln(x_1)+2-e^{x_1-2})$ 1/2

$A'(x_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln(x_1)+2}\frac{1}{x_1}-1\right)(\ln(x_1)+2-e^{x_1-2})$

$+\frac{1}{2}(\ln(\ln(x_1)+2)+2-x_1)\left(\frac{1}{x_1}-e^{x_1-2}\right)=0$

b.) $e^{x-2} \approx e^0+e^0(x-2) = 1+x-2 = x-1$

$y_2 = x_2-1 = \ln(x_1)+2 \Rightarrow x_2 = \ln(x_1)+3$

$A(x_1) = \frac{1}{2}(\ln(x_1)+3-x_1)(\ln(x_1)+2-(x_1-1))$

$= \frac{1}{2}(\ln(x_1)-x_1+3)^2$

$A'(x_1) = (\ln(x_1)-x_1+3)\left(\frac{1}{x_1}-1\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

$A(x_1=1) = \frac{1}{2}(\ln(1)-1+3))^2 = 2$

AUFGABE 2

a.) $A(b) = \int_0^b \frac{x}{e^x}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)dx = \int_0^b \frac{x}{e^x}e^{-x}dx$

$= \int_0^b x e^{-2x}dx = [x(-1/2)e^{-2x}]_0^b - \int_0^b(-1/2)e^{-2x}dx$

$= -\frac{b}{2}e^{-2b}+\frac{1}{2}\int_0^b e^{-2x}dx = -\frac{b}{2}e^{-2b}+\frac{1}{2}[(-1/2)e^{-2x}]_0^b$

$= -\frac{b}{2}e^{-2b}-\frac{1}{4}e^{-2b}+\frac{1}{4} = -e^{-2b}\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow a = A(b=0)=0 \quad \xRightarrow{A'(b)>0} \quad c = A(b=\infty) = \frac{1}{4}$

b.) $A(b) = -e^{-2b}\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow e^{-2b}\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{8} = 0$

$\Rightarrow f(b) = e^{-2b}\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{8}, \quad f'(b) = -b e^{-2b}$

$b_1 = b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)} = 1 - \frac{e^{-2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{8}}{-1e^{-2}} = 0{,}8264$

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

AUFGABE 3

a.) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1-(x/2)^2}}\,dx$

$t = x/2 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2dt$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,2dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

$t = \sin(u) \Rightarrow \frac{dt}{du} = \cos(u) \Rightarrow dt = \cos(u)du$

$= \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(u)}}\cos(u)du = \int 1\,du = u = \mathrm{ARCSIN}(t)$
$= \mathrm{ARCSIN}\left(\frac{x}{2}\right)$

b.) $\mathrm{ARCSIN}(0{,}5) = \mathrm{ARCSIN}(0{,}5) - \mathrm{ARCSIN}(0{,}0) = \int_0^{0{,}5} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

$\approx \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-0^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-0{,}25^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-0{,}5^2}}\right) = 0{,}5275 \approx 30{,}22°$

EXAKT: $30°$ $\Rightarrow$ FEHLER: $0{,}22° \triangleq 0{,}73\,\%$

AUFGABE 4

a.) $z - 1 + i = 2\frac{i-1}{z} \Rightarrow z^2 - (1-i)z + 2 - 2i = 0$

$\Rightarrow z_{1|2} = \frac{1-i \pm \sqrt{(1-i)^2 - 8 + 8i}}{2} = \frac{1-i \pm \sqrt{-8+6i}}{2}$

$-8+6i = \sqrt{(-8)^2+6^2}\left(\cos\left(\pi - \mathrm{ARCTAN}\left(\frac{6}{8}\right)\right) + i\sin\left(\pi - \mathrm{ARCTAN}\left(\frac{6}{8}\right)\right)\right)$
$= 10\,(\cos(2{,}4981) + i\sin(2{,}4981))$

$\sqrt{-8+6i} = \sqrt{10}\left(\cos\left(\frac{2{,}4981}{2}\right) + i\sin\left(\frac{2{,}4981}{2}\right)\right) = 1+3i$

$\Rightarrow z_{1|2} = \frac{1-i \pm (1+3i)}{2} \Rightarrow z_1 = 1+i,\ z_2 = -2i$

b.) $\xRightarrow{z=a+ib}$ $|f(z)| = |a+ib-1+i| = |a-1+i(b+1)| \leq 1$

$\Rightarrow \sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2} \leq 1 \Rightarrow (a-1)^2 + (b+1)^2 \leq 1$

KREIS MIT MITTELPUNKT $(1|-1)$ UND RADIUS 1

$\xRightarrow{z=a+ib}$ $g(z) = \frac{i-1}{a+ib} = \frac{(i-1)(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{-a+b+i(a+b)}{a^2+b^2}$

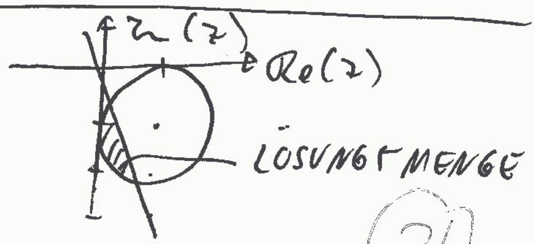
$\Rightarrow \frac{-a+b}{a^2+b^2} \geq 2\frac{a+b}{a^2+b^2} \Rightarrow -a+b \geq 2a+2b$

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

KLAUSUR MATHEMATIK 1 WS 21/22

$b \le -3a$



AUFGABE 5

a.) $x_k = 1 + \frac{k}{n}$, $\Delta x = \frac{1}{n}$

$$O_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_{k-1}}\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k-1}{n}}\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

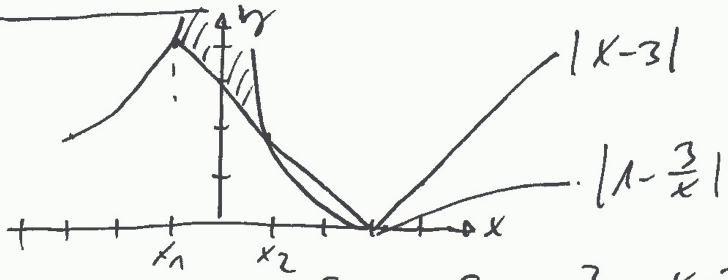
$$O_4 - U_4 = \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7} - \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}-\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

b.) $$O_n - U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$= \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon} = 50$$

AUFGABE 6



x_1: $3 - x = 1 - \frac{3}{x} \Rightarrow 3x - x^2 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2 - \sqrt{4+12}}{2} = -1$$

x_2: $3 - x = \frac{3}{x} - 1 \Rightarrow 3x - x^2 = 3 - x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{4 - \sqrt{16-12}}{2} = 1$$

LÖSUNGSMENGE: $-1 \le x < 0$ UND $0 < x \le 1$

HTWG Konstanz 7.2.2022
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

AUFGABE 7

a.) $\sin(x_1)\cos(x_2) + \cos(x_1)\sin(x_2)$

$$= \frac{e^{ix_1} - e^{-ix_1}}{2i} \frac{e^{ix_2} + e^{-ix_2}}{2} + \frac{e^{ix_1} + e^{-ix_1}}{2} \frac{e^{ix_2} - e^{-ix_2}}{2i}$$

$$= \frac{e^{i(x_1+x_2)} + e^{i(x_1-x_2)} - e^{i(-x_1+x_2)} - e^{-i(x_1+x_2)}}{4i}$$

$$+ \frac{e^{i(x_1+x_2)} - e^{i(x_1-x_2)} + e^{i(-x_1+x_2)} - e^{-i(x_1+x_2)}}{4i}$$

$$= \frac{2e^{i(x_1+x_2)} - 2e^{-i(x_1+x_2)}}{4i} = \sin(x_1 + x_2)$$

AUFGABE 8

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} - \frac{e^x x^2 - e^x 2x}{x^4} = \frac{e^x}{x} - 2\frac{e^x}{x^2} + 2\frac{e^x}{x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} - 2\frac{e^x x^2 - e^x 2x}{x^4} + 2\frac{e^x x^3 - e^x 3x^2}{x^6}$$

$$= \frac{e^x}{x} - 3\frac{e^x}{x^2} + 6\frac{e^x}{x^3} - 6\frac{e^x}{x^4}$$

$f(x=1) = e$, $f'(x=1) = 0$, $f''(x=1) = e$, $f'''(x=1) = -2e$

$$\Rightarrow T_3 = e + \frac{0}{1!}(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{-2e}{3!}(x-1)^3$$

$$= e\left[1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3\right]$$

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx \approx \int_1^2 e\left[1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{3}(x-1)^3\right]dx = e\left[x + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4\right]_1^2$$

$$= e\left[2 + \frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right] - e[1] = \frac{13}{12}e = 2{,}9448$$

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx \approx \int_1^2 \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}}{x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}dx$$

$$= \left[\ln(x) + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{18}x^3\right]_1^2$$

$$= \left[\ln(2) + 2 + 1 + \frac{8}{18}\right] - \left[\ln(1) + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{18}\right]$$

$$= \ln(2) + 2 - 1/4 + \frac{7}{18} = 2{,}8320$$

$$\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{e^1}{1} + \frac{e^{1{,}5}}{1{,}5} + \frac{1}{2}\frac{e^2}{2}\right) = 3{,}0971$$