HTWG Konstanz 23.3.2022
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

1.) (4 Punkte) Die Funktion $f(x) = -x^2+2x+3$ und die x-Achse umschließen ein Rechteck.
a.) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des größten möglichen Rechtecks.

2.) (4+6 Punkte)

$$g(x) = \int_1^x \frac{ln(t^2) + 1 + at}{t} dt$$

a.) Wo hat die Funktion g(x) für a = 1 ihr Minimum? Berücksichtigen Sie zwei Iterationsschritte und den Startwert $x_0 = 1$ beim Newtonverfahren.
b.) Es sei a = 0. Für welches x hat die Funktion g(x) den Wert 2?

3.) (6+3 Punkte) a.) Bestimmen Sie neben $z_1 = 1$ die weiteren Lösungen der Gleichung.

$$z^2 - (1 + 4i)z - 4 + 4i = -\frac{4 + 2i}{z} + 2i$$

b.) Skizzieren Sie in der Gausschen Zahlenebene die Lösungsmenge der Ungleichung.

$$1 \leq \left|e^{i\pi/2}z + 1\right| \leq 2$$

4.) (5+2 Punkte) a.) Bestimmen Sie den Grenzwert mit einer Partialbruchzerlegung.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k - 2}$$

b.) Untersuchen Sie, ob die Reihe konvergiert.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$$

5.) (5 Punkte) Geben Sie die Funktion F(z) ohne Integral an.

$$F(z) = \int_0^{\infty} sin(t)e^{-zt}dt$$

6.) (6 Punkte) Bestimmen Sie mit der komplexen e-Funktion die Konstanten a,b,c und d.

$$1 - 2sin^2(x) = a \cdot cos(bx) \qquad cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = c \cdot sin(dx)$$

7.) (5+3 Punkte) a.) Linearisieren Sie die Funktion f(x) = ln(x)/x am Entwicklungspunkt x_0 = 1. In welchem Intervall [0.932; b] muss x gewählt werden, damit die Differenz zwischen f(x) und ihrer Linearisierung maximal 10% beträgt (für x > 1 ist die Linearisierung größer als die Funktion)? Wählen Sie beim Newtonverfahren den Startwert 1.1 und berücksichtigen Sie einen Iterationsschritt.
b.) Entwickeln Sie die Funktion f(x) in eine Taylorreihe $T_3(x)$ mit $x_0 = 1$.

8.) (4+5+2 Punkte) a.) Zeigen Sie, dass $g(x) = ln(x+(x^2+1)^{1/2})$ die Umkehrfunktion von sinh(x) ist.
b.) Geben Sie F(a) als Funktion des natürlichen Logarithmus an.

$$F(a) = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{9 + x^2}}$$

c.) Bestimmen Sie näherungsweise F(3) mit dem Trapezverfahren und drei Teilintervallen.

HTWG Konstanz 23.3.2022
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

HTWG Konstanz 23.3.2022
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

WIEDERHOLKLAUSUR MATHEMATIK 1 WS21/22

AUFGABE 1

1/2

$f'(x) = -2x+2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\overset{x=u+1}{\Longrightarrow} f(u) = -(u+1)^2+2(u+1)+3 = -u^2-2u-1+2u+2+3$
$= 4-u^2$

$\Rightarrow A(u) = (u-(-u))\, f(u) = 2u(4-u^2) = 8u-2u^3$

$A'(u) = 8-6u^2 = 0 \Rightarrow u = \sqrt{4/3}$

$A(\sqrt{4/3}) = 8\sqrt{4/3} - 2(\sqrt{4/3})^3 = 6{,}1584$

AUFGABE 2

a.) $g'(x) = \dfrac{\ln(x^2)+1+x}{x} = 0$

$\Rightarrow f(x) = \ln(x^2)+1+x$

$f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\cdot 2x + 1 = \dfrac{2}{x}+1$

$x_1 = 1 - \dfrac{\ln(1^2)+1+1}{2/1+1} = 1-\dfrac{2}{3} = 1/3 \qquad x_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{\ln((1/3)^2)+1+\frac{1}{3}}{2/(1/3)+1} = 0{,}456$

b.) $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t^2)+1}{t}\,dt = \int_1^x \frac{2\ln(t)+1}{t}\,dt$

$\Rightarrow u = 2\ln(t)+1 \Rightarrow \dfrac{du}{dt} = \dfrac{2}{t} \Rightarrow dt = \dfrac{t}{2}\,du$

$= \displaystyle\int_1^{2\ln(x)+1} \frac{u}{t}\frac{t}{2}\,du = \frac{1}{2}\int_1^{2\ln(x)+1} u\,du = \frac{1}{4}\left[u^2\right]_1^{2\ln(x)+1}$

$= \dfrac{1}{4}\left((2\ln(x)+1)^2-1\right) = \dfrac{1}{4}\left(4\ln^2(x)+4\ln(x)+1-1\right)$

$= \ln^2(x)+\ln(x) = 2$

$\Rightarrow v = \ln(x)$

$v^2+v-2 = 0 \Rightarrow v_{1/2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot2}}{2} = 1$

$\Rightarrow \ln(x) = 1 \Rightarrow x = e$

AUFGABE 3

a.) $z^2-(1+4i)z-4+2i+\dfrac{4+2i}{2} = 0$

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

$$\Rightarrow z^3 - (1+4i)z^2 - (4-7i)z + 4+7i = 0$$

$$\Rightarrow z^3 - (1+4i)z^2 - (4-7i)z + 4+7i = (z-1)(z^2 - 4iz - 4 - 7i)$$

$$\begin{array}{l} z^3 - z^2 \\ \hline -4iz^2 - (4-7i)z \\ -4iz^2 + 4iz \\ \hline (-4-7i)z + 4+7i \\ (-4-7i)z + 4+7i \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow z^2 - 4iz - 4 - 7i = 0$$

$$z_{2/3} = \frac{4i \pm \sqrt{-16+16+8i}}{2} = 2i \pm \sqrt{2i}$$

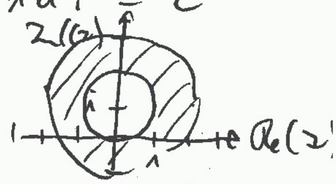
$$2i = 2\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\sqrt{2i} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right) = 1+i$$

$$z_{2/3} = 2i \pm 1+i \Rightarrow z_2 = 1+3i, \quad z_3 = -1+i$$

b.) $1 \le |e^{i\frac{\pi}{2}}z + 1| = |i(a+ib)+1| = |1-b+ia| \le 2$

$$\Rightarrow 1 \le (1-b)^2 + a^2 \le 4$$



AUFGABE 4

a.) $k^2+k-2=0$

$$\Rightarrow k_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2+4\cdot 1\cdot 2}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow k_1 = -2, \; k_2 = 1$$

$$\Rightarrow k^2+k-2 = (k+2)(k-1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k^2+k-2} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+2} = \frac{a(k+2)+b(k-1)}{(k-1)(k+2)}$$

$$\Rightarrow a+b=0 \Rightarrow a=-b$$

$$2a-b = 2a+a = 1 \Rightarrow a = 1/3, \; b = -1/3$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2+k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1/3}{k-1} - \frac{1/3}{k+2} = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k+2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k}\right) = 1/3\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{k}\right) = \frac{11}{18}$$

b.) $$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}}{\frac{k^2}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{k}\right)^2$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}\right) = 1/2 < 1$$

HTWG Konstanz 23.3.2022
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

WIEDERHOLKLAUSUR MATHEMATIK 1 WS 21/22

$\Rightarrow$ REIHE KONVERGIERT

2/2

AUFGABE 5

$$\int_0^\infty \sin(t)\, e^{-zt}\, dt = \left[\sin(t) \frac{1}{-z} e^{-zt}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \cos(t) \frac{1}{-z} e^{-zt}\, dt$$

$$= 0 + \frac{1}{z} \int_0^\infty \cos(t)\, e^{-zt}\, dt$$

$$= \frac{1}{z}\left(\left[\cos(t) \frac{1}{-z} e^{-zt}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\sin(t) \frac{1}{-z} e^{-zt}\, dt\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2} \int_0^\infty \sin(t)\, e^{-zt}\, dt$$

$$\Rightarrow F(z) = \int_0^\infty \sin(t)\, e^{-zt}\, dt = \frac{1/z^2}{1 + 1/z^2} = \frac{1}{z^2+1}$$

AUFGABE 6

$$1 - 2\sin^2(x) = 1 - 2\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\,\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\left(e^{i2x} - e^0 - e^0 + e^{-i2x}\right) = \frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} = \cos(2x$$

$$\Rightarrow a = 1\ ,\ b = 2$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}+x)} + e^{-i(\frac{\pi}{2}+x)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{2}} e^{ix} + e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{-ix}\right) = \frac{1}{2}\left(i e^{ix} - i e^{-ix}\right)$$

$$= \frac{i}{2}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \frac{-1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = -\sin(x)$$

$$\Rightarrow c = -1\ ,\ d = 1$$

AUFGABE 7

a) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ $\quad f'(x) = \frac{1/x \cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

$$T(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 0 + 1(x-1) = x - 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\ln(b)}{b} \;\hat{=}\; 100\,\% \\ b - 1 \;\hat{=}\; 110\,\% \end{array}\right\} \Rightarrow 1{,}1\,\frac{\ln(b)}{b} = b - 1$$

$$\Rightarrow g(b) = 1{,}1\ln(b) - b^2 + b$$

$$g'(b) = \frac{1.1}{b} - 2b + 1$$

HTWG Konstanz 23.3.2022
Fakultät Maschinenbau

Klausur Mathematik 1 für WIM

Name/Mat-Nr.: Punkte: Note:

$$b_1 = 1{,}1 - \frac{1{,}1 \ln(1{,}1) - 1{,}1^2 + 1{,}1}{\frac{1{,}1}{1{,}1} - 2\cdot 1{,}1 + 1} = 1{,}0742$$

b.) $$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} x^2 - (1-\ln(x))\,2x}{x^4} = \frac{-1-2+2\ln(x)}{x^3} = \frac{2\ln(x)-}{x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{\frac{2}{x} x^3 - (2\ln(x)-3)\,3x^2}{x^6} = \frac{2-6\ln(x)+9}{x^4} = \frac{11-6\ln(x}{x^4}$$

$$\Rightarrow T_3(x) = \frac{1}{0!}\,0 + \frac{1}{1!}\,1(x-1) + \frac{1}{2!}(-3)(x-1)^2 + \frac{1}{3!}\,11(x-1)$$
$$= x-1 - \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3$$

AUFGABE 8

a.) $$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow e^x - e^{-x} - 2y = 0 \Rightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

$$u = e^x \Rightarrow u^2 - 2yu - 1 = 0 \Rightarrow u = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4\cdot 1(-1)}}{2}$$
$$= y + \sqrt{y^2+1}$$

$$\Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2+1} \Rightarrow x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \Rightarrow y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

b.) $$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx$$

$$\frac{x}{3} = \sinh(u) \Rightarrow \frac{dx}{du} = 3\cosh(u)$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(u)}}\,3\cosh(u)\,du = \int \frac{\cosh(u)}{\cosh(u)}\,du = \int 1\,du$$

$$= u = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$= \ln\left(a + \sqrt{\frac{a^2}{9}+1}\right)$$

$$\Rightarrow F(a) = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}\,dx = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a}{3}\right) - \operatorname{arcsinh}\left(\frac{0}{3}\right) = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a}{3}\right)$$

c.) $$F(3) = \frac{3-0}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9+0^2}} + \frac{1}{\sqrt{9+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{9+2^2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9+3^2}}\right)$$
$$= 1\left(0{,}1667 + 0{,}3162 + 0{,}2774 + 0{,}1179\right) = 0{,}8782$$