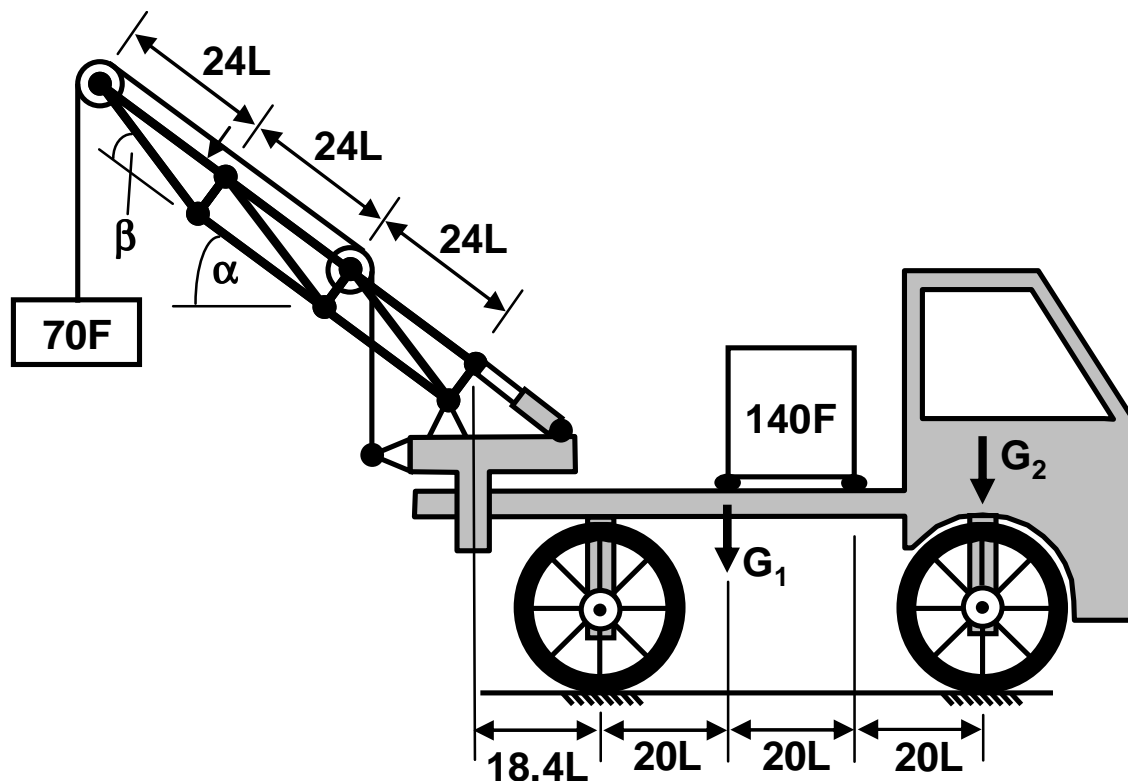


Vorlesungsvorlage Technische Mechanik

Wintersemester 2015/16
Philipp Steibler
HTWG Konstanz



1. Einleitung

Ein wichtiger Bestandteil der Technischen Mechanik ist die Untersuchung von Bauteilen unter dem Einfluss von Kräften. Dabei treten Verformungen und Spannungen auf. Da diese vorgegebene Grenzen nicht überschreiten dürfen, müssen sie für die Konstruktion eines Bauteils vorab bestimmt werden.

Im Rahmen dieser Vorlesungsvorlage sollen nur Bauteile betrachtet werden, die im Wesentlichen stabförmig sind. Sie stehen unter dem Einfluss von Kräften, befinden sich aber in einem statischen Ruhezustand. Das bedeutet, der dynamische Weg in diesen Ruhezustand soll nicht untersucht werden. Dadurch resultiert eine standardisierte Vorgehensweise zur Bestimmung der Spannungen und Verformungen:

- Bestimmung der Kräfte und Momente, die auf das Gesamtbauteile wirken
- Berechnung von sogenannten Schnittkräften und -momenten, die an den Teilbauteilen wirksam sind
- Ermittlung der Schaubilder für die sogenannten inneren Kräfte und Momente
- Bestimmung der Spannungen und Verformungen
- Bewertung der Ergebnisse

Für die Bestimmung der Kräfte und Momente müssen Gleichgewichtsbedingungen ausgewertet werden. Diese müssten eigentlich am verformten Bauteil aufgestellt werden. Das bedeutet, für die Bestimmung der Kräfte und Momente bzw. Verformungen und Spannungen müsste man die jeweils anderen Größen kennen. Da diese nicht vorhanden sind, wählt man eine Vereinfachung und bestimmt die Kräfte und Momente an den unverformten Bauteilen. Man spricht von **starren Ersatzbauteilen**. Anhand dieser Größen ermittelt man die Verformungen und Spannungen an den in Wirklichkeit **elastischen Bauteilen**. Das ist allerdings nur zulässig, wenn die Verformungen „ausreichend“ klein sind. Diese Bedingung ist bei den Herleitungen und Aufgaben dieses Manuscripts immer erfüllt. Gleichzeitig ermöglicht Sie, dass für die Bestimmung der Spannungen und Verformungen Gleichungen abgeleitet werden können, für welche zwar auch Vereinfachungen notwendig sind, die aber relativ einfach hergeleitet und angewandt werden können.

Diese Vereinfachungen haben aber zur Folge, dass immer eine Differenz zwischen Berechnung und Realität existiert. Das bedeutet, der Ingenieur in der Praxis muss nicht nur die Spannungen und Verformungen ermitteln, sondern er muss auch entscheiden, ob sie den realen Zustand ausreichend beschreiben bzw. er muss den begangenen Fehler abschätzen.

2. Kräfte und Momente

Eine Kraft beschreibt die Wirkung eines Objektes, welches in diesem Manuscript als Bauteil bezeichnet wird, auf ein anderes. Durch das Wirken der Kraft kann sich das Bauteil beschleunigen, eine Bewegung kann verhindert werden oder es kann sich verformen. Die Beobachtung zeigt, dass die Kraft eine gerichtete Größe mit einem Betrag sein muss. Für das Arbeiten mit solchen Größen stellt die Mathematik Vektoren zur Verfügung. Somit kann die Kraft als dreidimensionaler Vektor betrachtet werden. Sie besitzt in jede Raumrichtung eine Komponente F_x , F_y und F_z und einen Betrag F .

$$\text{Kraft: } \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad \text{Betrag der Kraft: } F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

- Kräfte:

Ihr wird die Einheit Newton [N] zugeordnet. Sie kann durch einen Kraftpfeil, der auf der Wirklinie der Kraft liegt, dargestellt werden. Die Kraftkomponenten F_x , F_y und F_z können ebenso als Kräfte betrachtet werden, die jeweils nur in eine der drei Raumrichtungen x , y oder z zeigen. Die Komponenten spannen einen Quader auf, dessen Diagonale die Kraft F beschreibt.

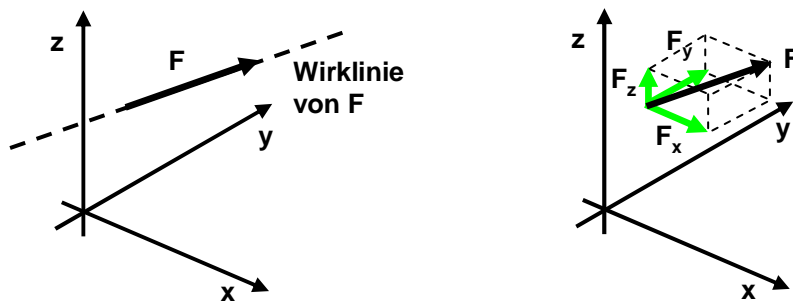


Abbildung 2.1: Kraft und ihre Kraftkomponenten

Möchte man mit Kräften rechnen, muss man die Rechenregeln für Vektoren anwenden. Vier häufig angewandte Regeln sollen im Folgenden vorgestellt werden.

Verschiebung der Kraft auf ihrer Wirklinie:

Beim Rechnen mit Kräften dürfen diese beliebig entlang ihrer Wirklinien verschoben werden.

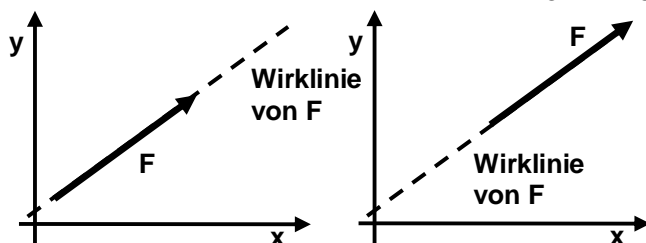


Abbildung 2.2: Verschieben der Kraft auf ihrer Wirklinie

Zerlegung einer Kraft in ihre Kraftkomponenten:

Sind der Kraftbetrag F und die Orientierung der Wirklinie bekannt, dann können die drei Kraftkomponenten ermittelt werden. Im ebenen Fall ($F_z = 0$) erfolgt dies, wie in Abbildung 2.3 dargestellt, über

das sogenannte rechtwinkelige **Kräftedreieck**, welches die zwei verbleibenden Komponenten F_x und F_y als Kathete und die Gesamtkraft F als Hypotenuse beinhaltet.

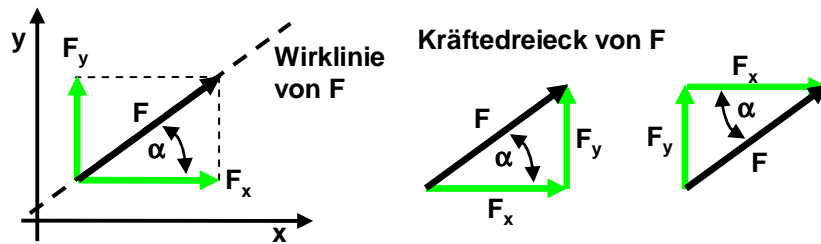


Abbildung 2.3: Berechnung der ebenen Kraftkomponenten mittels Orientierungswinkel α

Im ebenen Beispiel (Abbildung 2.3) ist die Orientierung durch den Winkel α , welchen die Wirklinie mit der x-Achse einschließt, definiert. Für die Kraft gelte $F = 5\text{N}$ und für den Winkel $\tan\alpha = 0.75$. Diese Winkelgröße impliziert $\sin\alpha = 0.6$ und $\cos\alpha = 0.8$. Die Komponenten F_x und F_y stellen dann die Projektionen der Kraft F auf die x- und y-Achsen dar. Für ihre Berechnung kann entweder die Komponente F_y nach rechts oder die Komponente F_x nach oben verschoben werden, um ein sogenanntes **Kräftedreieck** zu erhalten. Mit diesem rechtwinkligen Dreieck erhält man die gesuchten Komponenten.

$$\frac{F_x}{F} = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad F_x = F \cos\alpha = 5\text{N} \cdot 0.8 = 4\text{N}$$

$$\frac{F_y}{F} = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad F_y = F \sin\alpha = 5\text{N} \cdot 0.6 = 3\text{N}$$

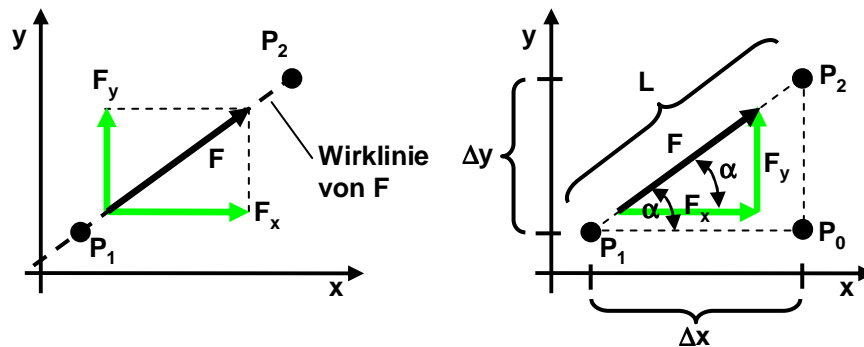


Abbildung 2.4: Berechnung der ebenen Kraftkomponenten mittels Richtungskosinus

Alternativ kann die Lage der Wirklinie dadurch bestimmt werden, dass die Koordinaten zweier Punkte P_1 und P_2 gegeben sind, durch welche die Wirklinie verläuft. Für die Berechnung werden, wie in Abbildung 2.4 dargestellt, die Koordinaten $P_{1x} = 2$, $P_{1y} = 2$, $P_{2x} = 8$ und $P_{2y} = 6.5$ gewählt. Die Kraft hat den Betrag $F = 5\text{N}$. Durch die zwei Punkte kann ein rechtwinkliges Dreieck $P_1P_0P_2$ aufgespannt werden, welches den gleichen Winkel α , wie das Kräftedreieck besitzt. Für die Berechnung muss der waagrechte Abstand $\Delta x = 6$, der senkrechte $\Delta y = 4.5$ und der Gesamtabstand $L = 7.5$ der beiden Punkte P_1 und P_2 bestimmt werden.

$$\sin\alpha = \frac{\Delta y}{L} = \frac{4.5}{7.5} = 0.6$$

$$\cos\alpha = \frac{\Delta x}{L} = \frac{6}{7.5} = 0.8$$

Mit den Werten für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ können wie im vorausgegangenen Beispiel die Kraftkomponenten F_x und F_y bestimmt werden. Verknüpft man die Ergebnisse der beiden Beispiele, kann man die Komponenten ohne die explizite Bestimmung des Winkels ermitteln

$$F_x = F \cos \alpha = F \frac{\Delta x}{L} = 5N \cdot 0.8 = 4N$$

$$F_y = F \sin \alpha = F \frac{\Delta y}{L} = 5N \cdot 0.6 = 3N$$

Die beiden Quotienten $\Delta x/L$ und $\Delta y/L$ werden als **Richtungskosinus** bezeichnet. Führt man ebenso $\Delta z/L$ ein, können allgemein die Kraftkomponenten aus dem Kraftbetrag und den drei Richtungskosinus bestimmt werden.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \Delta x/L \\ \Delta y/L \\ \Delta z/L \end{pmatrix} = F \frac{1}{L} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Vor allem bei räumlichen Aufgaben erweist sich die Zerlegung mit Hilfe der Richtungskosinus als vorteilhaft.

Addition zweier Kräfte:

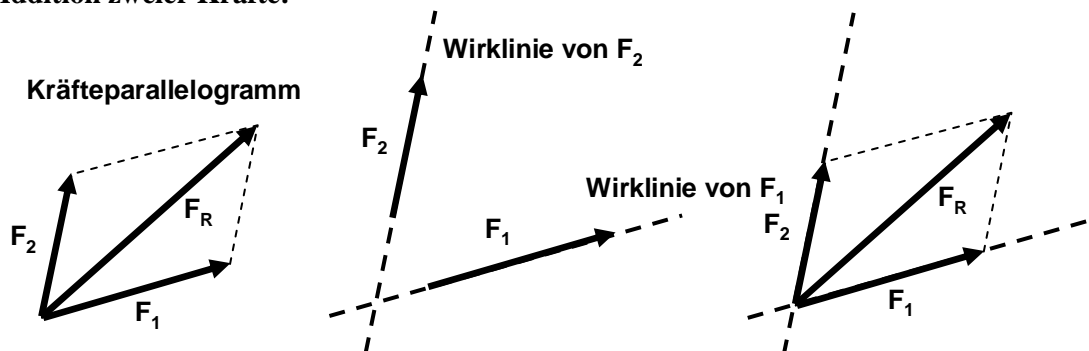


Abbildung 2.5: Berechnung der ebenen Kraftkomponenten mittels Richtungskosinus

Ebene Kräfte werden zeichnerisch mit dem **Kräfteparallelogramm** (Abbildung 2.5, links) addiert. Die beiden Ausgangskräfte F_1 und F_2 stellen die Seiten des Parallelogramms dar, die resultierende Kraft F_R die Diagonale. Dabei ist zu beachten, dass im Allgemeinen die Summe der Beträge der beiden Ausgangskräfte nicht gleich dem Betrag der resultierenden ist.

$$F_R \leq F_1 + F_2$$

Nur wenn beide Ausgangskräfte parallel zueinander sind, darf das Gleichheitszeichen verwendet werden. Gehen die beiden Kräfte nicht von einem gemeinsamen Punkt aus (Abbildung 2.5, Mitte), können sie auf ihren Wirklinien verschoben werden, um das Kräfteparallelogramm zu erzeugen (Abbildung 2.5, rechts).

Um bei der rechnerischen Addition nur mit Komponenten arbeiten zu können, wird ein Bezugssystem eingeführt, in welches man die Kräfte bzw. ihre Kraftkomponenten einzeichnet. Anschließend können die einzelnen Komponenten der resultierenden Kraft F_R unabhängig voneinander bestimmt werden. Dazu verwendet man nur die positiven Beträge der Ausgangskomponenten. Zeigen

diese in die positiven Koordinatenrichtungen wird den Beträgen ein positives Vorzeichen vorausgestellt, andernfalls ein negatives.

$$\begin{aligned} F_{Rx} &= (\pm F_{1x}) + (\pm F_{2x}) \\ F_{Ry} &= (\pm F_{1y}) + (\pm F_{2y}) \\ F_{Rz} &= (\pm F_{1z}) + (\pm F_{2z}) \end{aligned}$$

Der positive Betrag des resultierenden Wertes stellt den Betrag der Komponente dar. Ist der Wert größer null, zeigt die Komponente in die positive Koordinatenrichtung, andernfalls in die negative. Die Lage der Wirklinie der resultierenden Kraft wird dabei nicht ermittelt (vgl. Abbildung 2.6).

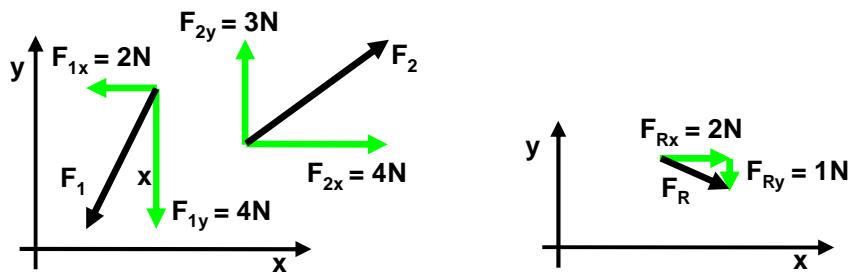


Abbildung 2.6: Rechnerische Addition der Kräfte F_1 und F_2

$$F_{Rx} = (-F_{1x}) + (+F_{2x}) = (-2N) + (4N) = 2N$$

$$F_{Ry} = (-F_{1y}) + (+F_{2y}) = (-4N) + (3N) = -1N$$

Zerlegung einer Ausgangskraft in zwei einzelne Kräfte:

Eine in Abbildung 2.7 gegebene Ausgangskraft F_R kann in zwei Kräfte F_1 und F_2 zerlegt werden, wenn die Orientierung der Wirklinien der beiden gesuchten Kräfte bekannt ist. Dazu soll im folgenden Beispiel die gegebene senkrechte Kraft F_R in zwei Kräfte F_1 und F_2 zerlegt werden, deren Wirklinien durch die Punkte P_1 und P_2 bzw. durch den Winkel α gegeben sind.

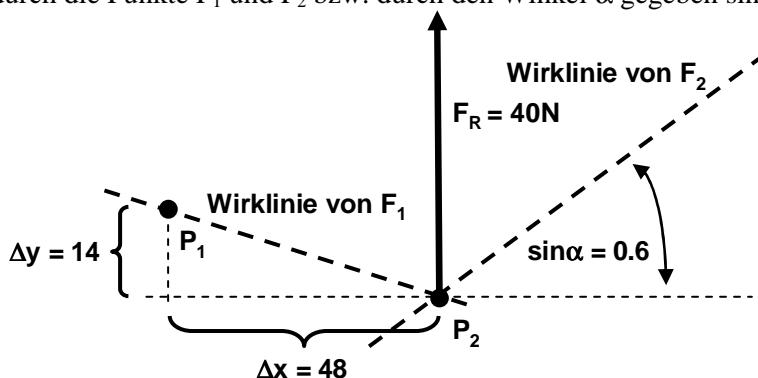


Abbildung 2.7: Aufgabenstellung zur Kräftezerlegung

Erfolgt dies bei ebenen Aufgaben zeichnerisch, bedeutet dies, dass die Diagonale des Kräfteparallelogramms bekannt ist und die Kantenlängen gesucht sind. Dazu werden die beiden Parallelen zu den Wirklinien von F_1 und F_2 durch die Pfeilspitze von F_R gezeichnet. Dabei resultiert das Kräfteparallelogramm. Zeichnet man maßstabsgetreu, kann man in der Skizze aus den Seitenlängen die Beträge der gesuchten Kräfte bestimmen. Für die rechnerische Bestimmung werden mit Hilfe der Skizze die Kraftkomponenten F_{1x} , F_{1y} , F_{2x} und F_{2y} durch die Gesamtkräfte F_1 und F_2 dargestellt.

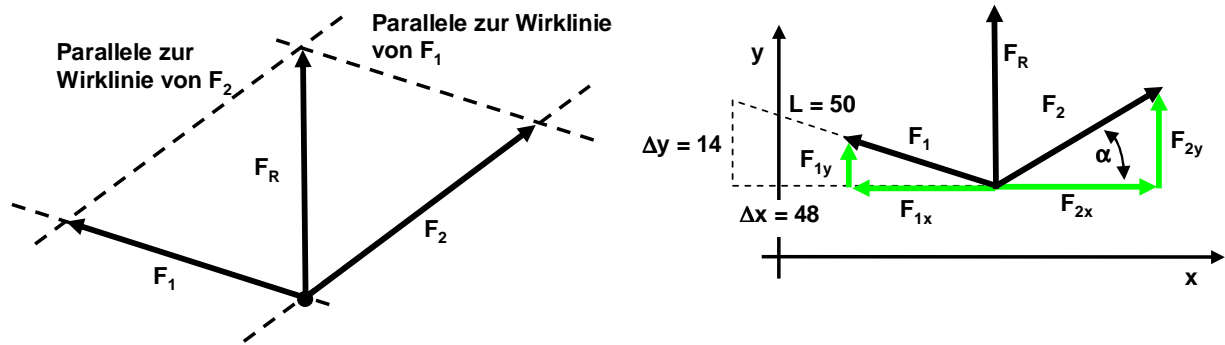


Abbildung 2.8: Zeichnerische (links) und rechnerische Kräftezerlegung (rechts)

$$F_{1x} = \Delta x / L \cdot F_1 = 48 / 50 F_1 = 0.96 F_1$$

$$F_{1y} = \Delta y / L \cdot F_1 = 14 / 50 F_1 = 0.28 F_1$$

$$F_{2x} = \cos \alpha \cdot F_2 = 0.8 F_2$$

$$F_{2y} = \sin \alpha \cdot F_2 = 0.6 F_2$$

Anschließend werden komponentenweise die Summen gebildet.

$$F_{Rx} = 0 = (-F_{1x}) + (+F_{2x}) = -F_{1x} + F_{2x} = -0.96 F_1 + 0.8 F_2$$

$$F_{Ry} = 40 \text{ N} = (+F_{1y}) + (+F_{2y}) = F_{1y} + F_{2y} = 0.28 F_1 + 0.6 F_2$$

Die beiden resultierenden Gleichungen ergeben $F_1 = 40 \text{ N}$ und $F_2 = 48 \text{ N}$. Die Zerlegung einer Kraft in ihre Kraftkomponenten stellt einen Spezialfall der Kräftezerlegung dar.

- Momente:

Als weitere Wirkung einer Kraft ist zu beobachten, dass sie versucht, ein Bauteil um einen Drehpunkt oder Bezugspunkt P_0 zu verdrehen. Diese Wirkung kann als Moment M bezeichnet werden. Es lässt sich feststellen, dass die Wirkung dieses Moments mit wachsender Kraft und mit wachsendem Abstand der Wirklinie der Kraft vom Bezugspunkt zunimmt. Mathematisch lässt sich diese Eigenschaft durch ein Kreuzprodukt eines Abstandes r zwischen dem Bezugspunkt P_0 und dem Kraftangriffspunkt P_1 und der Kraft F beschreiben.

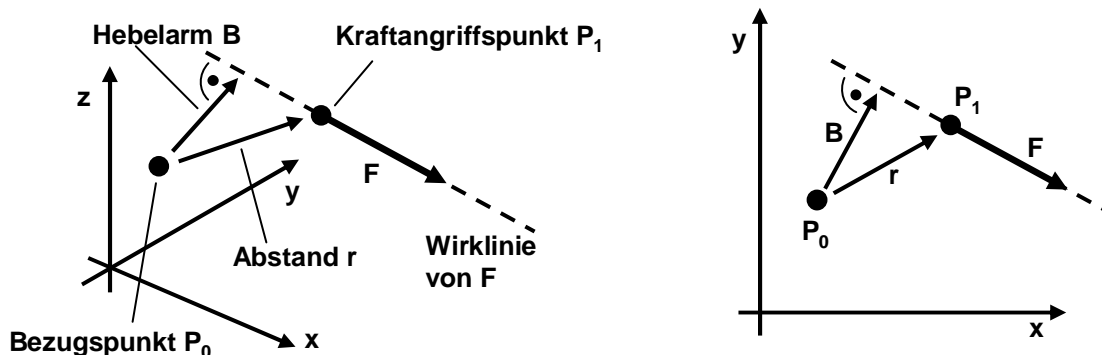


Abbildung 2.9: Benötigte Größen zur Bestimmung des durch eine Kraft erzeugten Moments

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_y F_z - r_z F_y \\ r_z F_x - r_x F_z \\ r_x F_y - r_y F_x \end{pmatrix}$$

Da das Ergebnis eines Kreuzproduktes ebenso ein Vektor ist, gelten für das Moment alle Rechenregeln wie für die Kraft. Es steht senkrecht auf dem Ortsvektor P_0P_1 und auf dem Kraftvektor von F .

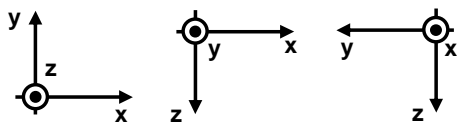
Wählt man einen beliebigen Punkt auf der Wirklinie, so kann man den Abstand dieses Punktes vom Bezugspunkt P_0 bestimmen. Der Hebelarm B ist der Abstand des Punktes, bei welchem der Abstandswert minimal wird. Der Betrag M des Momentes ist das Produkt des Hebelarmes B , welcher senkrecht auf der Kraft F steht, mit dem Betrag der Kraft F (vgl. Anhang A1). Das Moment hat daher die Einheit [Nmm] oder [Nm].

$$M = |\vec{M}| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = BF$$

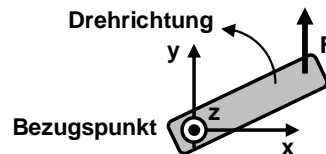
Liegt die Kraft F und der Ortsvektor P_0P_1 in einer Ebene, so steht das resultierende Moment senkrecht auf dieser Ebene. Ist dies die xy -Ebene, folgt, dass nur M_z ungleich null ist. Entsprechend bei der xz -Ebene M_y und bei der yz -Ebene M_x . Somit kann dann $M_z = M$ bzw. $M_y = M$ oder $M_x = M$ verwendet werden und es muss nicht zwischen den Komponenten und dem Gesamtmoment unterschieden werden. Das Moment M versucht das Bauteil um eine Drehachse, die senkrecht auf der Ebene steht, zu verdrehen.

Verwendet man ein kartesisches Koordinatensystem, bei welchem die nicht gezeichnete Koordinatenachse aus der Ebene herausragt (Abbildung 2.10, links), so dreht ein positives Moment mathematisch positiv gegen die Uhr (Abbildung 2.10, Mitte).

zu verwendende
Koordinatensysteme



Kraft erzeugt
positives Moment



Kraft erzeugt negatives
Moment

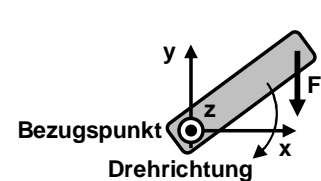


Abbildung 2.10: Geeignete ebene Koordinatensysteme (links) und Drehsinn der Momente (rechts)

Da Kraft und Moment immer senkrecht zueinander stehen, hat das Moment in Richtung der Kraft eine Komponente mit dem Betrag null. **Somit kann die Kraft, die parallel zu einer Drehachse zeigt, bezüglich dieser kein Moment erzeugen.**

Im folgenden Beispiel aus Abbildung 2.11 soll das von F bezüglich des Bezugspunktes erzeugte Moment bestimmt werden. Die Kraft F ist durch die Komponenten $F_x = 1\text{N}$ und $F_y = 2\text{N}$ definiert.

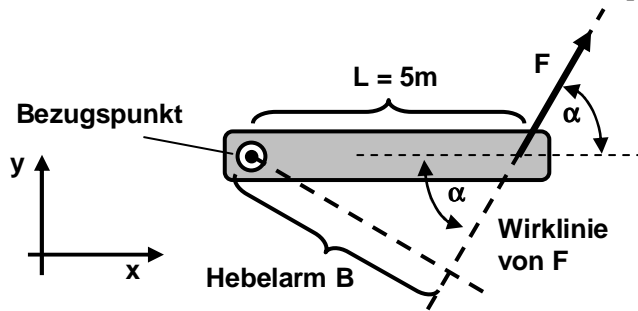


Abbildung 2.11: Aufgabenstellung zur ebenen Bestimmung eines Moments

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{5}\text{N}$$

$$\sin \alpha = \frac{F_y}{F} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$B = L \sin \alpha = \frac{10}{\sqrt{5}}\text{m}$$

$$M = BF = 10\text{Nm}$$

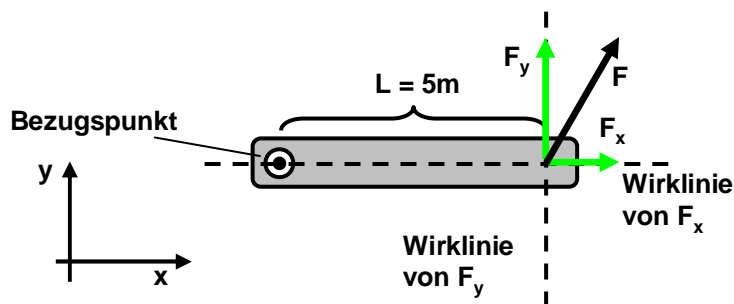


Abbildung 2.12: Bestimmung des Moments durch Berücksichtigung der Kraftkomponenten

Bestimmt man nicht das Moment mit der Gesamtkraft F , sondern berechnet, wie in Abbildung 2.12 angewandt, die Teilmomente der Kraftkomponenten und addiert diese anschließend, so reduziert sich der Rechenaufwand

$$M = 0 \cdot F_x + LF_y = 10\text{Nm}$$

Dabei wird ersichtlich, dass eine Kraft, deren Wirklinie durch den Bezugspunkt geht, bezüglich des Bezugspunktes kein Moment erzeugt.

Mit dem folgenden Beispiel (Abbildung 2.13) kann die zweite Bedeutung des Begriffs Moment vorgestellt werden. Die beiden Kräfte sind entgegengesetzt orientiert und haben den gleichen Betrag. Das bedeutet, ihre Kräftesumme beträgt null. Bezüglich des Bezugspunktes P_1 erzeugen sie zusammen das Moment $M = L_2 F$. Somit ist der Betrag des Momentes nur vom Abstand L_2 der beiden Angriffspunkte der Kräfte abhängig. Ändert man die Lage des Bezugspunktes und somit die Länge L_1 , so ändert sich das resultierende Moment nicht. Dies bedeutet, dass die beiden Kräfte bezüglich allen Bezugspunkten das gleiche Moment erzeugen. Solche zwei Kräfte werden als **Kräftepaar** bezeichnet.

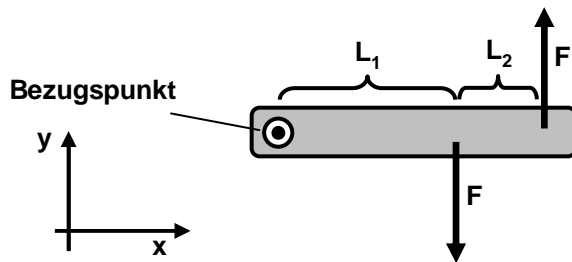


Abbildung 2.13: Wirkweise eines Kräftepaars

Verallgemeinert man dies, **kann man die Wirkung von zwei oder mehr Kräften, deren Kräfte-summe gleich null ist, als Moment M bezeichnen**. Betrag und Wirkrichtung des Moments sind von der Anordnung der Kräfte abhängig. Dieses Moment erzeugt bezüglich jedem Bezugspunkt das gleiche Moment. Versuchen die Kräfte das Bauteil mathematisch positiv zu verdrehen, spricht man von einem positiven Moment, welches in der ebenen Ansicht durch einen positiv drehenden Kreisfeil dargestellt wird. Andernfalls ergibt sich ein negatives Moment. Der Angriffspunkt des Momentes ergibt sich im Normalfall aus den geometrischen Gegebenheiten.

Kräfte erzeugen ein positives Moment

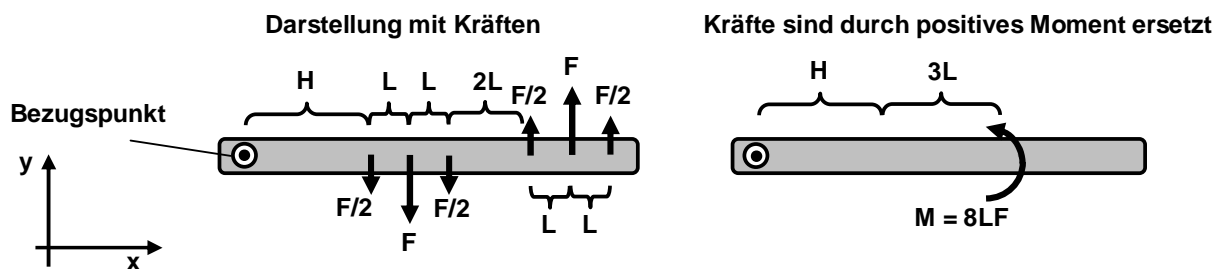


Abbildung 2.14: Zusammenfassung mehrerer Kräfte durch ein positives Moment

$$M = -H \frac{F}{2} - (H + L)F - (H + 2L) \frac{F}{2} + (H + 4L) \frac{F}{2} + (H + 5L)F + (H + 6L) \frac{F}{2} = 8LF$$

Kräfte erzeugen ein negatives Moment

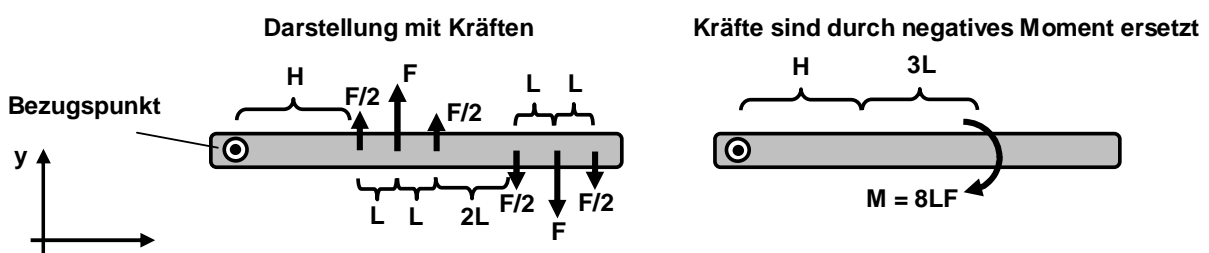


Abbildung 2.15: Zusammenfassung mehrerer Kräfte durch ein negatives Moment

$$M = H \frac{F}{2} + (H + L)F + (H + 2L) \frac{F}{2} - (H + 4L) \frac{F}{2} - (H + 5L)F - (H + 6L) \frac{F}{2} = -8LF$$

Bei der ebenen Darstellung ist der Kreisfeil sehr übersichtlich. Bei räumlichen Aufgaben müsste dieser perspektivisch dargestellt werden. Dies ist nicht immer eindeutig. Daher wird bei räumlicher Darstellung der ursprüngliche Vektorpfeil verwendet. Um den Unterschied zu Kräften zu betonen,

verwendet man bei Momenten eine Doppelpfeilspitze. Ein positives Moment zeigt in die positive Koordinatenrichtung.

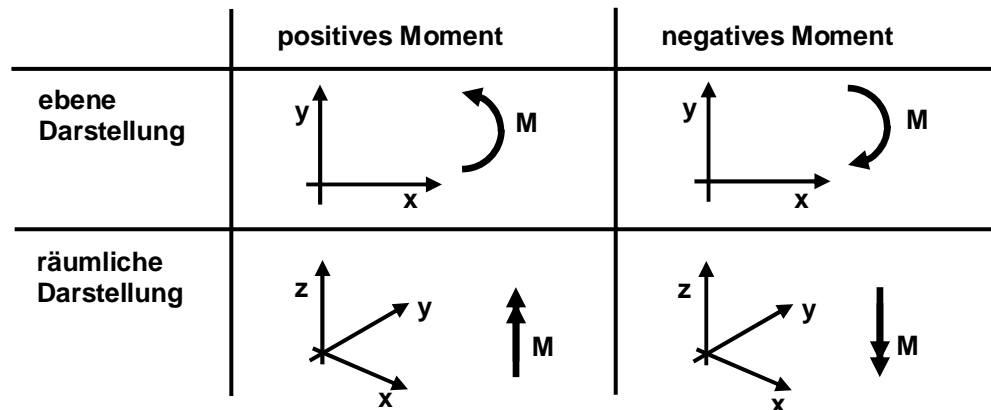


Abbildung 2.16: Ebene und räumliche Darstellung von Momenten

- Resultierende Kräfte:

Hat man n Kräfte, deren Kräftesumme nicht gleich null ist, können diese zu einer **resultierenden Kraft** F_R zusammengefasst werden. Dabei soll auch die Lage der Wirklinie der resultierenden Kraft ermittelt werden. Die resultierende Kraft F_R ist die Summe der n Ausgangskräfte.

$$F_{Rx} = (\pm F_{1x}) + (\pm F_{2x}) + \dots + (\pm F_{nx}) = \sum_{i=1}^n (\pm F_{ix})$$

$$F_{Ry} = (\pm F_{1y}) + (\pm F_{2y}) + \dots + (\pm F_{ny}) = \sum_{i=1}^n (\pm F_{iy})$$

$$F_{Rz} = (\pm F_{1z}) + (\pm F_{2z}) + \dots + (\pm F_{nz}) = \sum_{i=1}^n (\pm F_{iz})$$

Die Lage der Wirklinie der resultierenden ist dadurch bestimmt, dass die resultierende Kraft F_R bezüglich einem Bezugspunkt ein resultierendes Moment M_R erzeugt, welches der Summe der Teilmomente der n Ausgangskräfte F_i entspricht.

Bei ebenen Aufgaben in einem xy -Koordinatensystem legt man den Bezugspunkt P_1 in den Koordinatenursprung und bestimmt dann die x -Koordinate x_R des Schnittpunktes zwischen der Wirklinie von F_R und der x -Achse. Mit diesem Schnittpunkt ist ein Punkt der Wirklinie bekannt. Durch die Kraftkomponenten von F_R ist die Richtung der Wirklinie bestimmt. Da die Wirklinie eine Gerade ist, ist sie durch diese Angaben eindeutig bestimmt.

$$M_R = \pm x_R F_{Ry} = \pm y_i F_{1x} \pm x_i F_{1y} \dots \pm y_n F_{nx} \pm x_n F_{ny} = \sum_{i=1}^n (\pm y_i F_{ix} \pm x_i F_{iy})$$

Die Längen y_i und x_i beschreiben die Hebelarme der Kraftkomponenten F_{ix} und F_{iy} . Die positiven oder negativen Vorzeichen werden entsprechend, ob die Komponenten positive oder negative Momente erzeugen, verwendet. Im folgenden Beispiel soll aus den beiden gegebenen Kräften F_1 und F_2 mit den Komponenten $F_{1x} = 1\text{N}$, $F_{1y} = 2\text{N}$, $F_{2x} = 4\text{N}$ und $F_{2y} = 3\text{N}$ die resultierende Kraft F_R und die Lage Ihrer Wirklinie bestimmt werden.

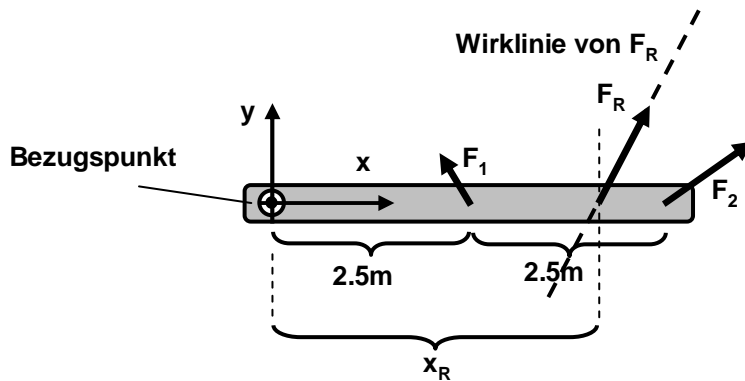


Abbildung 2.17: Aufgabenstellung zur Bestimmung der resultierenden Kraft F_R

$$F_{Rx} = -F_{1x} + F_{2x} = -1N + 4N = 3N$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} = 2N + 3N = 5N$$

$$x_R F_{Ry} = 2.5m \cdot F_{1y} + 5m \cdot F_{2y} = 2.5m \cdot 2N + 5m \cdot 3N \quad \Rightarrow \quad x_R = \frac{20Nm}{F_{Ry}} = \frac{20Nm}{5N} = 4m$$

Durch Wiederholung der Vorgehensweise in einem weiteren ebenen Koordinatensystem kann auch die Wirklinie bei räumlichen Aufgabenstellungen bestimmt werden.

Häufig treten viele Kräfte F_i , die jeweils in einem Streckenabschnitt Δx_i wirksam sind, auf. Für die dargestellte Skizze in Abbildung 2.18, links lässt sich die y -Komponente der resultierenden Kraft bestimmen, wofür die einzelnen Kräfte F_i durch den Quotient $q_i = F_i/\Delta x_i$ ersetzt werden. Die Größe x_i ist die x -Koordinate des Kraftangriffspunkt der Kraft F_i .

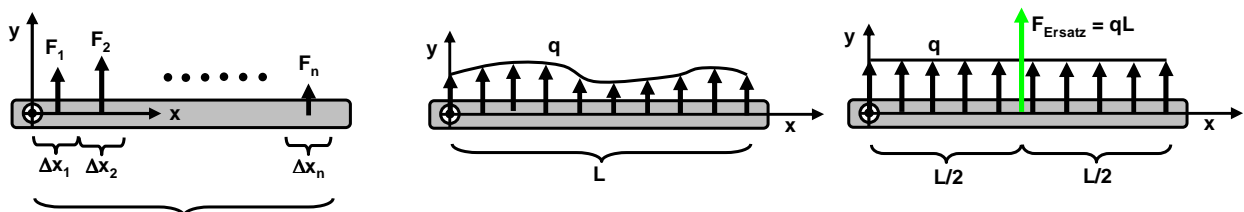


Abbildung 2.18: Definition von Streckenlasten q

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{\Delta x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n q_i \Delta x_i$$

$$x_R F_{Ry} = \sum_{i=1}^n x_i F_i = \sum_{i=1}^n x_i \frac{F_i}{\Delta x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^n x_i q_i \Delta x_i \quad \Rightarrow \quad x_R = \frac{1}{F_{Ry}} \sum_{i=1}^n x_i q_i \Delta x_i$$

Ist die Belastung durch den Quotient q_i über die gesamte Bauteillänge gleichmäßig verteilt und wirkt nicht nur an einzelnen Punkten, kann dies dadurch beschrieben werden, dass die Anzahl n der Abschnitte gegen unendlich und deren Länge Δx_i gegen unendlich klein strebt. Dies wird als **Streckenlast** mit der Einheit [N/mm] oder [N/m] bezeichnet und gemäß Abbildung 2.18, Mitte dargestellt.

$$F_{Ry} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n q_i \Delta x_i = \int_0^L q dx = \int q dx$$

$$x_R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{F_{Ry}} \sum_{i=1}^n x_i q_i \Delta x_i = \frac{1}{F_{Ry}} \int_0^L x q dx = \frac{1}{F_{Ry}} \int_L x q dx$$

Ist die Streckenlast q wie in Abbildung 2.18, rechts über der Bauteillänge L konstant, gilt für die resultierende Kraft $F_{Ry} = F_{Ersatz} = qL$ und $x_R = L/2$.

$$F_{Ry} = F_{Ersatz} = \int_L q dx = q \int_L dx = qL \quad \Rightarrow \quad F_{Ry} = F_{Ersatz} = qL$$

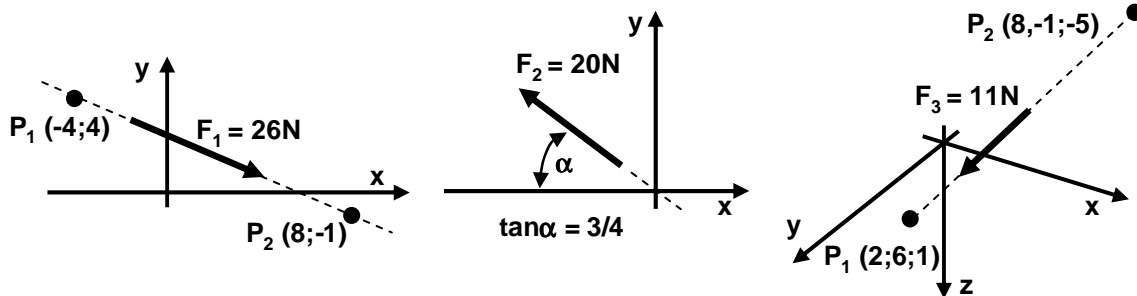
$$x_R = \frac{1}{F_{Ry}} \int_L x q dx = \frac{1}{qL} q \int_L x dx = \frac{1}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L = \frac{1}{L} \frac{L^2}{2} = \frac{L}{2} \quad \Rightarrow \quad x_R = \frac{L}{2}$$

Allgemein greift die Ersatzkraft F_{Ersatz} einer konstanten Streckenlast in der Mitte der Strecke, an der die Streckenlast wirksam ist, an.

Aufgaben zu Kapitel 2

Aufgabe 2.1

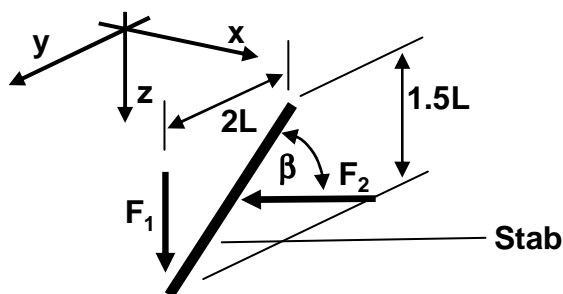
Es sei $F_{4x} = F_{4y} = 0$ und $F_{4z} \neq 0$. F_{4z} ist derart zu wählen, dass die Summe der vier Kräfte eine resultierende Kraft $F_R = 21\text{N}$ ergibt, die in die negative z-Richtung zeigt (Lösung $F_{4z} = -25\text{N}$).



Aufgabe 2.2

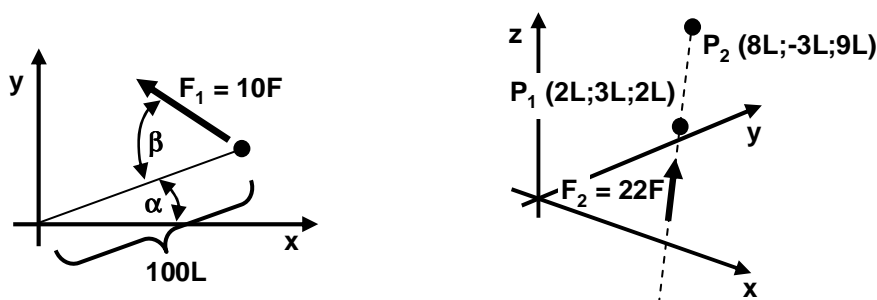
Die Kräfte $F_1 = 50\text{N}$ und F_2 liegen in einer Ebene, die parallel zur yz-Ebene verläuft.

- Die Kraft F_1 ist in einen zum Stab parallelen und in einem zum Stab senkrechten Anteil zu zerlegen.
- Wie groß muss der Winkel β sein, wenn $F_{2y} = 12/13F_2$ beträgt? Wie groß ist dann F_{2z} ?
- Die Kraft F_2 ist analog zu F_1 zu zerlegen.
- Wie groß ist F_2 zu wählen, wenn die beiden parallelen Komponenten zusammen 81N ergeben (Lösung $F_2 = 100\text{N}$)?



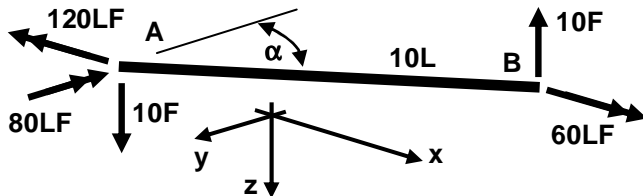
Aufgabe 2.3

Welche Momente erzeugen die Kräfte F_1 und F_2 bezüglich des Koordinatenursprungs ($\tan\alpha = 7/24$, $\tan\beta = 3/4$) (Lösung $M_1 = 800LF$, $M_2 = \text{Wurzel}(7972)LF$)?



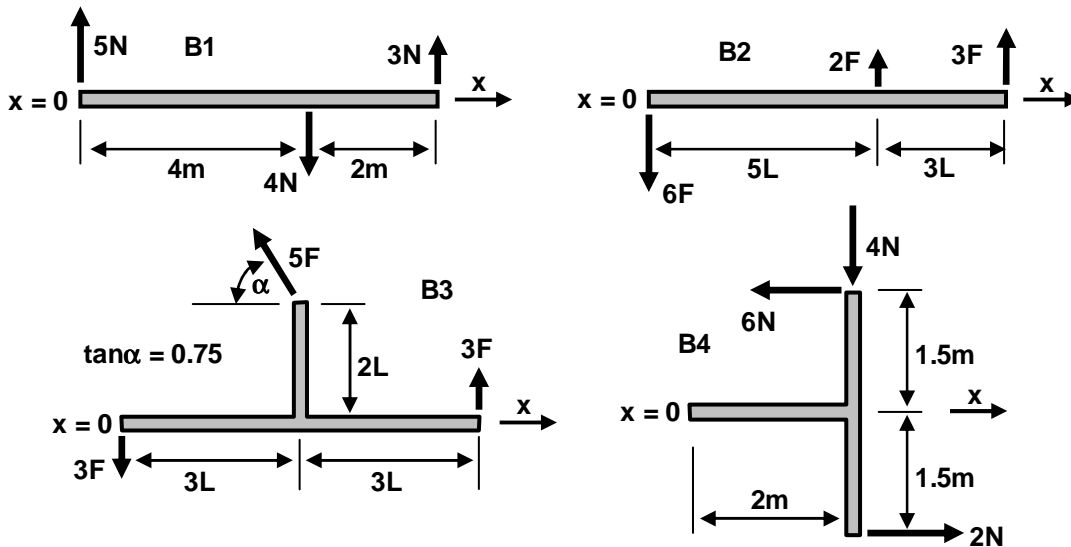
Aufgabe 2.4

Der Stab mit der Länge $10L$ liegt in der xy -Ebene. Die gegebenen Momente zeigen in x - oder y -Richtung ($\tan\alpha = 4/3$). Welche Momente wirken an den beiden Punkten A und B in Stabrichtung und quer zum Stab (Lösung: $|M_{A,parallel}| = M_{B,parallel} = 48 LF$, $|M_{A,quer}| = 136LF$, $M_{B,quer} = 36LF$)?



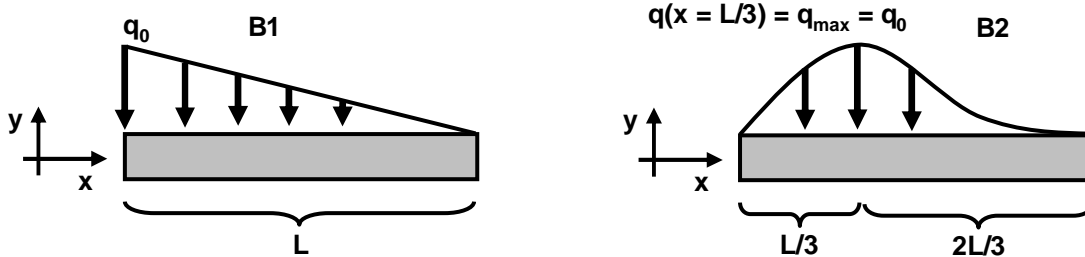
Aufgabe 2.5

Welche resultierende Kraft ergibt sich? Wo schneidet ihre Wirklinie die x -Achse (Lösung: $x_{R,B1} = 0.5m$, $x_{R,B2} = 34L$, $x_{R,B3} = 9L$, $x_{R,B4} = 1m$)?



Aufgabe 2.6

Die resultierenden Kräfte F_{R1} und F_{R2} und die Schnittpunkte (x_1, x_2) ihrer Wirklinien mit der x -Achse sind zu bestimmen. Die Funktion $q(x)$ bei B2 ist ein Polynom 3. Grades (Lösung: $x_{R,B1} = L/3$, $x_{R,B2} = 2/5L$).



3. Schwerpunkt und Flächenmomente n-ten Grades

Es sei ein Bauteil gegeben, welches aus n Teilbauteilen besteht. Von diesen Teilbauteilen sei die Gewichtskraft G_i und die Lage ihrer Schwerpunkte $(x_i, y_i, z_i)^T$ bekannt. Die Gewichtskraft besitzt im Normalfall nur eine senkrechte Komponente. Über die Masse m_i [kg] und der Erdbeschleunigung g [m/s²] kann die Gewichtskraft G_i bestimmt werden.

$$G_i = m_i g$$

Die Gesamtgewichtskraft G des Bauteils ist die Summe aller Teilgewichtskräfte G_i .

$$G = \sum_{i=1}^n G_i$$

Der Gesamtschwerpunkt $(x_s, y_s, z_s)^T$ ist der Bezugspunkt, bezüglich welchem die Summe aller Teilmomente durch die Teilgewichtskräfte G_i gleich null ist.

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} x_i - x_s \\ y_i - y_s \\ z_i - z_s \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} G_{ix} \\ G_{iy} \\ G_{iz} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} (y_i - y_s)G_{iz} - (z_i - z_s)G_{iy} \\ (z_i - z_s)G_{ix} - (x_i - x_s)G_{iz} \\ (x_i - x_s)G_{iy} - (y_i - y_s)G_{ix} \end{pmatrix}$$

Geht man davon aus, dass die Gewichtskraft nur in z-Richtung wirksam ist und somit deren Komponenten $G_{iz} = G_i$ und $G_{ix} = G_{iy} = 0$ gesetzt werden können, so ist in der obigen Gleichung nur die erste und zweite Zeile ungleich null.

$$0 = \sum_{i=1}^n (y_i - y_s)G_{iz} = \sum_{i=1}^n (y_i - y_s)G_i = \sum_{i=1}^n y_i G_i - \sum_{i=1}^n y_s G_i = \sum_{i=1}^n y_i G_i - y_s \sum_{i=1}^n G_i = \sum_{i=1}^n y_i G_i - y_s G$$

$$0 = -\sum_{i=1}^n (x_i - x_s)G_{iz} = \sum_{i=1}^n (-x_i + x_s)G_i = -\sum_{i=1}^n x_i G_i + \sum_{i=1}^n x_s G_i = -\sum_{i=1}^n x_i G_i + x_s \sum_{i=1}^n G_i = -\sum_{i=1}^n x_i G_i + x_s G$$

Verwendet man ein gedrehtes Koordinatensystem, so erhält man zusätzlich eine Bestimmungsgleichung für die z-Koordinaten z_s .

$$0 = \sum_{i=1}^n z_i G_i - z_s G$$

Zusammengefasst bzw. umgeformt, erhält man die Lage des Gesamtschwerpunktes.

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n x_i G_i \\ y_s &= \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n y_i G_i \\ z_s &= \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n z_i G_i \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{pmatrix} = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} G_i = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^n \vec{x}_i G_i$$

Kann man voraussetzen, dass die Erdbeschleunigung g konstant ist, folgt mit $G = mg$ der Massenmittelpunkt $(x_m, y_m, z_m)^T$.

$$\vec{x}_m = \frac{1}{mg} \sum_{i=1}^n \vec{x}_i m_i g = \frac{g}{mg} \sum_{i=1}^n \vec{x}_i m_i = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{x}_i m_i$$

Besteht das Bauteil aus einem Material mit konstanter Dichte ρ , so folgt mit $m = \rho V$ der Volumenmittelpunkt $(x_v, y_v, z_v)^T$.

$$\vec{x}_v = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \vec{x}_i V_i$$

Geht man davon aus, dass das Bauteil eine konstante Höhe H bzw. eine Einheitshöhe (ebene Flächen) besitzt, folgt mit $V = AH$ der Flächenmittelpunkt $(x_a, y_a, z_a)^T = (x_s, y_s, z_s)^T$, welcher im Folgenden auch mit dem Indice „s“ gekennzeichnet werden soll.

$$\vec{x}_s = \vec{x}_a = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n \vec{x}_i A_i = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n x_i A_i \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_s &= \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n x_i A_i \\ y_s &= \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n y_i A_i \\ z_s &= \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n z_i A_i \end{aligned}$$

Für das erste Beispiel (Abbildung 3.1) soll, was leicht nachzuvollziehen ist, vorausgesetzt werden, dass der Flächenmittelpunkt eines Rechteckes im Schnittpunkt der beiden Diagonalen liegt und somit bekannt ist.

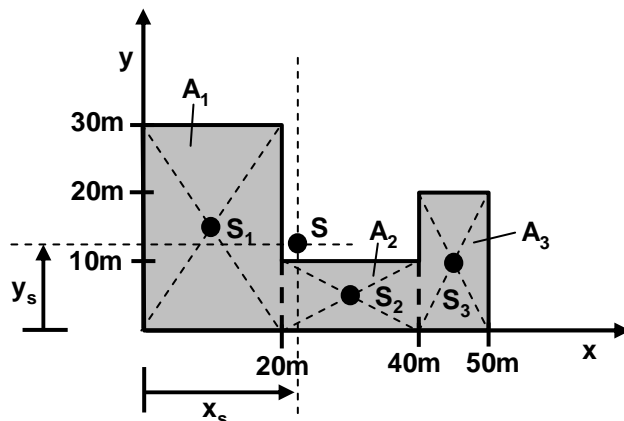


Abbildung 3.1: Aufgabenstellung zum Berechnen des Gesamtflächenmittelpunktes S

Aus Abbildung 3.1 können alle zur Berechnung der Lage des Gesamtflächenmittelpunktes notwendigen Größen ($x_1 = 10\text{m}$, $y_1 = 15\text{m}$, $A_1 = 600\text{m}^2$, $x_2 = 30\text{m}$, $y_2 = 5\text{m}$, $A_2 = 200\text{m}^2$, $x_3 = 45\text{m}$, $y_3 = 10\text{m}$, $A_3 = 200\text{m}^2$) der drei Teilflächen ($n = 3$) herausgelesen werden.

$$A = \sum_{i=1}^3 A_i = 600\text{m}^2 + 200\text{m}^2 + 200\text{m}^2 = 1000\text{m}^2$$

$$x_s = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^3 x_i A_i = \frac{1}{1000\text{m}^2} (10\text{m} \cdot 600\text{m}^2 + 30\text{m} \cdot 200\text{m}^2 + 45\text{m} \cdot 200\text{m}^2) = 21\text{m}$$

$$y_s = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^3 y_i A_i = \frac{1}{1000\text{m}^2} (15\text{m} \cdot 600\text{m}^2 + 5\text{m} \cdot 200\text{m}^2 + 10\text{m} \cdot 200\text{m}^2) = 12\text{m}$$

Ist eine Fläche symmetrisch zu einer Geraden, so gilt allgemein, dass ihr Flächenmittelpunkt auf dieser Geraden liegt. Dies soll bei der Berechnung des Flächenmittelpunktes eines Dreieckes, welches in Abbildung 3.2 dargestellt ist, berücksichtigt werden. Der Koordinatenursprung liegt auf der mittleren Symmetrieachse, wodurch $x_s = 0$ resultiert und nur noch die y -Koordinate des Flächenmittelpunktes zu bestimmen ist.

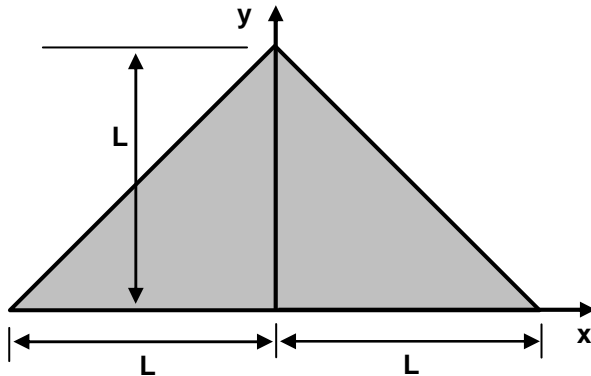


Abbildung 3.2: Bestimmung des Flächenmittelpunktes eines Dreieckes

Das Dreieck kann man nicht in endlich viele Rechtecke, von welchen man die Lage der Flächenmittelpunkte kennt, zerlegen. Deshalb wird das Dreieck in der Abbildung 3.3, links näherungsweise durch zwei überdeckende Rechtecke beschrieben. Man kann eine Flächenmittelpunktskoordinate $y_s = L/2$ ermitteln. Eine Überdeckung des Dreieckes mit 6 Rechtecken beschreibt das Dreieck (Abbildung 3.3, Mitte) „besser“ und liefert eine Flächenmittelpunktskoordinate von $y_s = 5/12L$. Wird das Dreieck mit 20 nochmals kleineren Rechtecken substituiert, die eine Flächenmittelpunktskoordinate von $y_s = 3/8L$ ergeben, reduziert sich der Fehler durch die Näherung weiter (Abbildung 3.3, rechts).

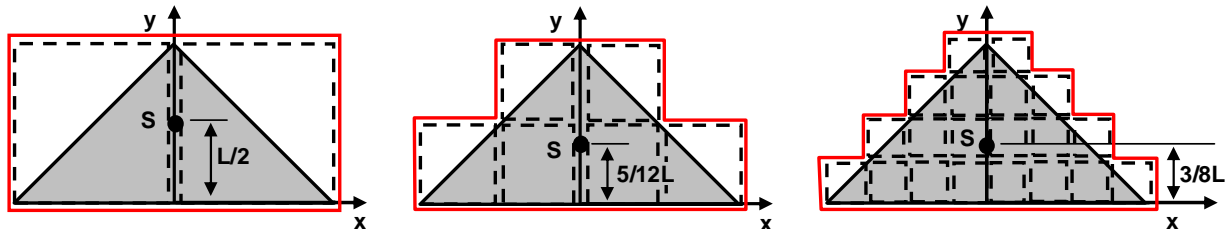


Abbildung 3.3: Näherungsweise Flächenmittelpunktbestimmung eines Dreieckes mit überdeckenden Rechtecken

Setzt man diesen Prozess fort, so strebt der Fehler gegen null. Bei unendlich vielen, unendlich kleinen Rechtecken erhält man einen Fehler null. Der Flächeninhalt dA dieser unendlich kleinen Teilflächen ist das Produkt von Breite dx multipliziert mit der Höhe dy .

$$\begin{aligned}
 y_s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n y_i A_i = \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_{-L+y}^{L-y} y dx dy = \frac{1}{L^2} \int_0^L y [x]_{-L+y}^{L-y} dy \\
 &= \frac{1}{L^2} \int_0^L y [2L - 2y] dy = \frac{1}{L^2} \int_0^L 2Ly - 2y^2 dy = \frac{1}{L^2} \left[Ly^2 - \frac{2y^3}{3} \right]_0^L = \frac{L}{3}
 \end{aligned}$$

Diese Vorgehensweise ist bei jeder beliebigen Fläche anwendbar. Dies ergibt die allgemeinen Formeln zur Bestimmung der Flächenmittelpunkte.

$$x_s = \frac{1}{A} \int_A x dA$$

$$y_s = \frac{1}{A} \int_A y dA$$

$$z_s = \frac{1}{A} \int_A z dA \quad \Rightarrow \quad S_y = z_s A = \int_A z dA$$

Das Integral S_y nennt man **statisches Moment** oder Flächenmoment ersten Grades, da z in erster Potenz vorkommt. Ersetzt man z durch z^0 , berechnet man den Flächeninhalt A oder das Flächenmoment nullten Grades. Wählt man unter dem Integral statt z die Funktion z^2 , so wird das Integral Flächenmoment zweiten Grades oder **Flächenträgheitsmoment** I_y genannt.

$$A = \int_A z^0 dA = \int_A dA$$

$$S_y = z_s A = \int_A z dA$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

Für das in Abbildung 3.4 dargestellte Rechteck sollen die Flächenmomente bestimmt werden. Der Koordinatenursprung wird in den Rechtecksmittelpunkt gelegt. Die kleine Teilfläche dA kann durch das Produkt Breite dy und Höhe dz beschrieben werden.

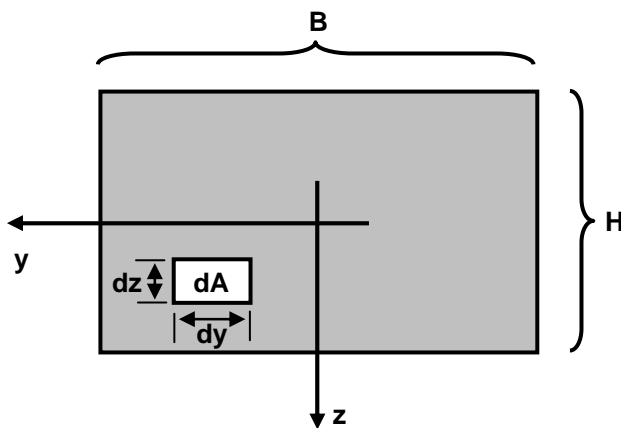


Abbildung 3.4: Rechteck zur Bestimmung der Flächenmomente nullten, ersten und zweiten Grades

- Flächeninhalt A

$$\begin{aligned} A &= \int_A dA = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} dy dz = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left[\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} dy \right] dz = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} [y]_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} dz = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \left[\frac{B}{2} - \left(-\frac{B}{2} \right) \right] dz = B \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} dz \\ &= B \left[z \right]_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = B \left[\frac{H}{2} - \left(-\frac{H}{2} \right) \right] = BH \end{aligned}$$

- statisches Moment S_y

$$\begin{aligned}
 S_y &= \int_A z dA = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} z dy dz = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z \left(\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} dy \right) dz = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z [y]_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} dz = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z \left[\frac{B}{2} - \left(-\frac{B}{2} \right) \right] dz \\
 &= B \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z dz = B \left[\frac{z^2}{2} \right]_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = B \left[\left(\frac{H/2}{2} \right)^2 - \left(\frac{-H/2}{2} \right)^2 \right] = 0
 \end{aligned}$$

- Flächenträgheitsmoment I_y

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_A z^2 dA = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} z^2 dy dz = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 \left(\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} dy \right) dz = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 [y]_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} dz = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 \left[\frac{B}{2} - \left(-\frac{B}{2} \right) \right] dz \\
 &= B \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} z^2 dz = B \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = B \left[\left(\frac{H/2}{3} \right)^3 - \left(\frac{-H/2}{3} \right)^3 \right] = B \left[\frac{H^3}{24} - \left(\frac{-H^3}{24} \right) \right] = \frac{BH^3}{12}
 \end{aligned}$$

Da beim hier berechneten Rechteck $S_y = z_s A = 0$ und $A \neq 0$ gilt, folgt, dass die z-Koordinate z_s des Flächenmittelpunktes den Wert null besitzen muss. Analog kann auch gezeigt werden, dass $y_s = 0$ gilt. Daher ist die ursprüngliche Annahme, dass der Flächenmittelpunkt eines Rechteckes im Kreuzungspunkt der Diagonalen liegt, bewiesen.

Berechnet man die Flächenmomente für den in Abbildung 3.5 dargestellten Kreis, so ist es sinnvoll, mit den Polarkoordinaten r und α zu rechnen. Der Koordinatenursprung wird in den Kreismittelpunkt gelegt. Da die Kantenlängen der Teilflächen dA unendlich klein sind, stellt dA auch ein Rechteck dar, dessen Flächeninhalt durch die Kantenlänge dr in radialer Richtung und der Kantenlänge $r d\alpha$ in Umfangsrichtung berechnet werden kann. Die z-Koordinate kann mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks zu $z = r \sin \alpha$ bestimmt werden.

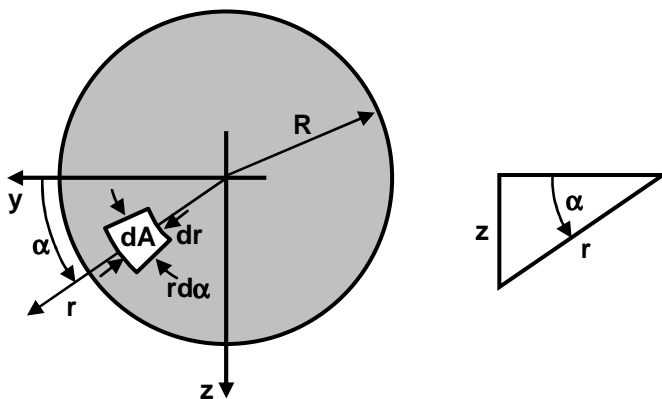


Abbildung 3.4: Kreis zur Bestimmung der Flächenmomente nullten, ersten und zweiten Grades

- Flächeninhalt A

$$A = \int_A dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\alpha dr = \int_0^R r \left(\int_0^{2\pi} d\alpha \right) dr = \int_0^R r [\alpha]_0^{2\pi} dr = \int_0^R r 2\pi dr = 2\pi \int_0^R r dr = 2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R = \pi R^2$$

- statisches Moment S_y

$$S_y = \int_A z dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} (r \sin \alpha) r d\alpha dr = \int_0^R r^2 \left(\int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha \right) dr = \int_0^R r^2 [-\cos \alpha]_0^{2\pi} dr = \int_0^R r^2 [0] dr = 0$$

- Flächenträgheitsmoment I_y

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} (r^2 \sin^2 \alpha) r d\alpha dr = \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha \right) dr = \int_0^R r^3 \left[\frac{1}{2} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \right]_0^{2\pi} dr$$

$$= \int_0^R r^3 [\pi] dr = \pi \int_0^R r^3 dr = \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi}{4} R^4$$

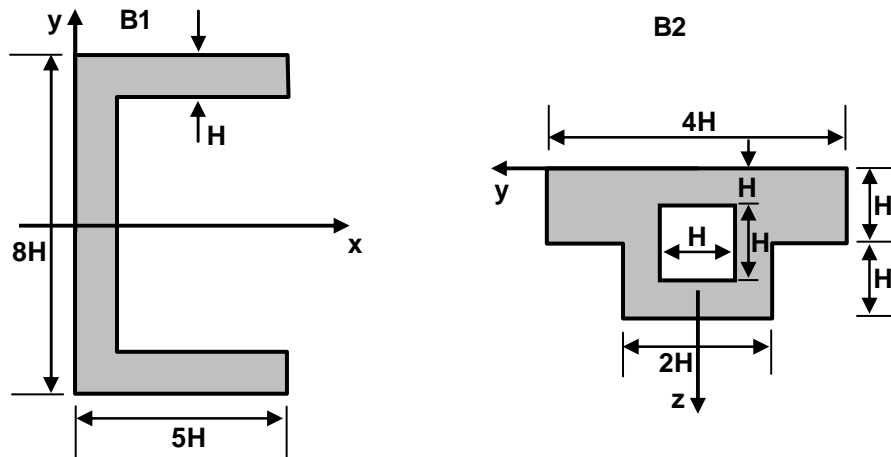
Da beim Kreis das statische Moment S_y wie beim Rechteck den Wert null einnimmt, muss sein Flächenmittelpunkt die Koordinaten $y_s = z_s = 0$ besitzen und somit im Kreismittelpunkt liegen.

Die am Rechteck und Kreis ermittelten Ergebnisse für das statische Moment S_y lassen sich auf beliebige Querschnitte übertragen. Es ist genau dann gleich null, wenn der Flächenmittelpunkt im Koordinatenursprung liegt.

Aufgaben zu Kapitel 3

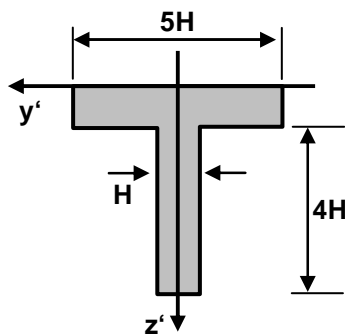
Aufgabe 3.1

Gesucht ist die Lage der Flächenmittelpunkte der grauen Flächen (Lösung: $x_{S,B1} = 7/4H$, $z_{S,B2} = 4/5H$).



Aufgabe 3.2

a.) Die Lage der Flächenmittelpunkte ist durch Integration und durch Zerlegung der Gesamtfläche in Teilflächen zu bestimmen (Lösung: $z_S = 29/18H$).



b.) Der Koordinatenursprung ist in den Flächenmittelpunkt zu verlegen. Das Flächenträgheitsmoment I_y ist durch Integration zu bestimmen. Die Fläche ist in 9 identische Quadrate zu zerlegen. A_i ist deren Flächeninhalt, z_i sind die z -Koordinaten der Flächenmittelpunkte der Teilflächen. Näherungsweise ist das Flächenträgheitsmoment I_y mit der Formel

$$I_y = \sum_{i=1}^n z_i^2 A_i$$

und $n = 9$ zu bestimmen. Wie groß ist der resultierende prozentuale Fehler (Lösung: Fehler: 3%)?

4. Freischneiden

Ein Bauteil 1 wirkt mit einer oder mehreren Kräften auf ein Bauteil 2 ein. Die Wirkung dieser Kräfte wird durch eine Ersatzkraft oder resultierende Kraft $F_{1,2}$ und einem Moment $M_{1,2}$ zusammengefasst. Dann lässt sich beobachten, dass das Bauteil 2 mit einer Kraft $F_{2,1}$ und einem Moment $M_{2,1}$ auf das Bauteil 1 einwirkt. Die beiden Kräfte und Momente haben die gleichen Beträge und sind entgegengesetzt orientiert. Daher werden Sie mit „**Aktio und Reaktio**“ bezeichnet.

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$$

$$\vec{M}_{1,2} = -\vec{M}_{2,1}$$

Diese Kräfte und Momente werden wie in Abbildung 4.1 dargestellt sichtbar, wenn man die beiden Bauteile trennt und ersatzweise die gegenseitigen Einwirkungen durch diese Größen beschreibt. Dieses Zerlegen und Einzeichnen der Kräfte und Momente nennt man **Freischneiden**.

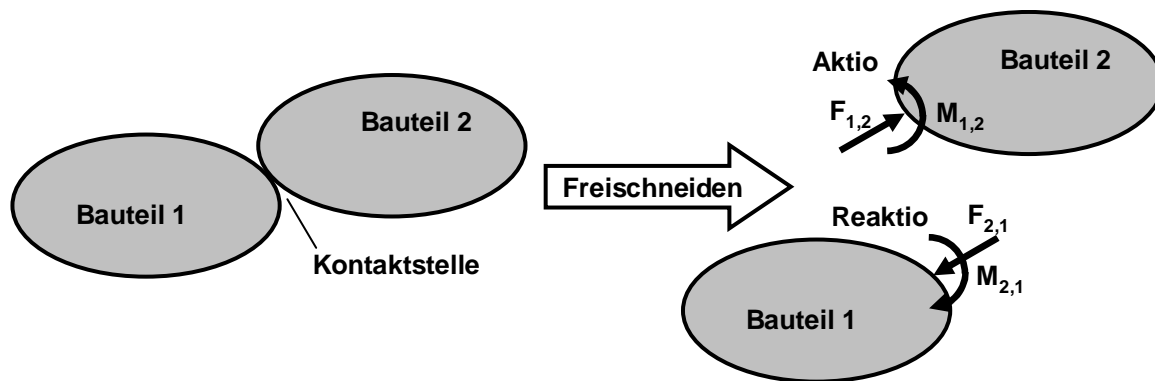


Abbildung 4.1: Freischneiden zweier Bauteile

Ist die Summe aller angreifenden Kräfte und Momente, die auf ein Bauteil wirken, gleich null, so befindet es sich im Gleichgewicht. Befindet es sich in Ruhe, so ist es im **statischen Gleichgewicht**. Andernfalls bewegt es sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit. Man spricht von einem **dynamischen Gleichgewicht**. Bei beiden Gleichgewichtszuständen sind die identischen Kräfte und Momente wirksam. Daher wird für die Untersuchung eines dynamischen Gleichgewichts dieses häufig durch ein statisches ersetzt. Der Impulssatz, der in seiner einfachsten Version „Masse mal Beschleunigung ist gleich der Summe aller Kräfte“ lautet, und der Drehimpulssatz „Massenträgheitsmoment mal Winkelbeschleunigung ist gleich der Summe aller Momente“ ergeben mit den Beschleunigungen null die **Gleichgewichtsbedingungen**.

$\sum F_x = 0$	$\sum F_y = 0$	$\sum F_z = 0$
$\sum M_x = 0$	$\sum M_y = 0$	$\sum M_z = 0$

Bei ebenen Aufgabenstellungen sind eine Kräftesumme und zwei Summen der Momente nicht zu berücksichtigen bzw. automatisch erfüllt.

Mit diesen Gleichgewichtsbedingungen können die beim Freischneiden sichtbar werdenden Kräfte und Momente berechnet werden. Je nach Art, wie oder was man schneidet, werden sie Lagerkräfte und Lagermomente, Schnittkräfte und Schnittmomente bzw. innere Kräfte und Momente genannt.

4.1 Lagerkräfte und Lagermomente

Möchte man ein Gesamtbauteil betrachten, so muss man den Einfluss der Umgebung auf das Bauteil durch Kräfte und Momente darstellen. Dieser Einfluss wird im Normalfall durch eine Lagerung ausgeübt. In der Betrachtungsweise von Abbildung 4.1 entspricht das Bauteil dem Bauteil 2 und die Umgebung dem Bauteil 1. Dabei werden in der Regel nur die Lagergrößen dargestellt, die am Bauteil bzw. Bauteil 2 wirksam sind. Die Gegengrößen, die an der Umgebung oder am Bauteil 1 angreifen, werden meistens nicht dargestellt.

An den ebenen Betrachtungen in den Abbildungen 4.2 bis 4.4 sieht man, welche unterschiedlichen Lagerkräfte und Lagermomente bei den einzelnen Kontakten zwischen Umgebung und Bauteil übertragen werden. In der Ebene sind prinzipiell drei Bewegungsmöglichkeiten vorhanden. Das Bauteil kann in waagrechter (u_x) und in senkrechter Richtung (u_y) verschoben werden, und es kann um eine Drehachse, die senkrecht zur Ebene steht, gedreht werden (α). Es soll vorausgesetzt werden, dass das Bauteil eine große Gewichtskraft besitzt.

In der in Abbildung 4.2 dargestellten Lagervariante besteht ein flächiger, fest zusammenhängender Kontaktbereich zwischen der Umgebung und dem Bauteil. Durch diesen Kontakt werden die waagrechte und die senkrechte Bewegung, sowie die Drehung verhindert. Die waagrechte Bewegung wird durch eine waagrechte Kraft unterdrückt. Entsprechend wird die senkrechte Bewegung durch eine senkrechte Kraft, die Normalkraft bezeichnet wird, unterdrückt. Die Drehung wird durch ein Moment verhindert. Daher müssen an der zusammenhängenden Kontaktfläche in Summe eine waagrechte Kraft F_x , eine senkrechte Kraft F_y und ein Moment M wirksam sein.

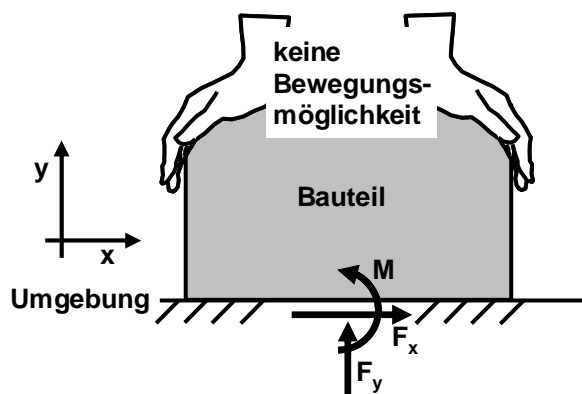


Abbildung 4.2: Flächiger Kontaktbereich zwischen Bauteil und Umgebung

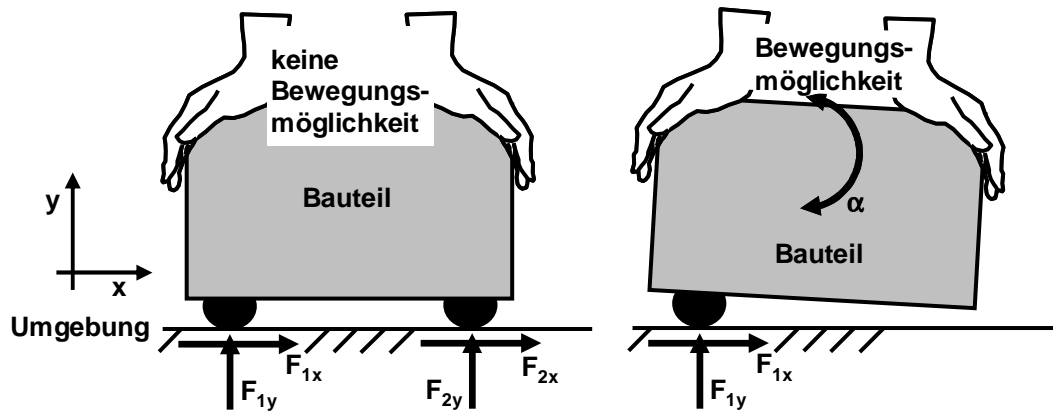


Abbildung 4.3: Punktueller Kontaktbereich mittels Füße

Ändert man den Kontaktbereich, wie in Abbildung 4.3, links dargestellt, indem man das Bauteil auf zwei Füße stellt, so entstehen zwei Kontaktflächen, an denen andere Kräfte wirksam werden. Beide Füße können für sich betrachtet die waagrechte und die senkrechte Bewegung unterdrücken. Dazu ist jeweils eine waagrechte und senkrechte Kraft notwendig. Dass beide Füße diese Bewegungen unterdrücken können, wird sichtbar, wenn man wie in Abbildung 4.3, rechts einen Fuß entfernt. Die waagrechte und senkrechte Bewegungsmöglichkeit bleibt unterdrückt. Allerdings kann jetzt die Drehung allein durch einen Fuß nicht verhindert werden. Daher kann an einer einzelnen Kontaktstelle auch kein Moment wirksam sein. Nur wenn beide Füße wie in Abbildung 4.3, links vorhanden sind, kann die Drehung verhindert werden. Das bedeutet, eine Drehung kann nicht nur durch ein Moment, sondern auch durch ein Zusammenspiel mehrerer Kräfte verhindert werden.

Ersetzt man wie in Abbildung 4.4 links einen Fuß durch eine Rolle, so besitzt das Bauteil wieder keine Bewegungsmöglichkeit. Allerdings kann das für sich betrachtete Rad nur die senkrechte Bewegung mit einer senkrechten Kraft F_{1y} unterdrücken. Dies wird sichtbar, wenn das Bauteil auf 2 Räder (Abbildung 4.2, rechts) gestellt wird. Nun kann die waagrechte Bewegung nicht mehr verhindert werden. Dies bedeutet, es können auch keine waagrecht wirkenden Kräfte wirksam sein.

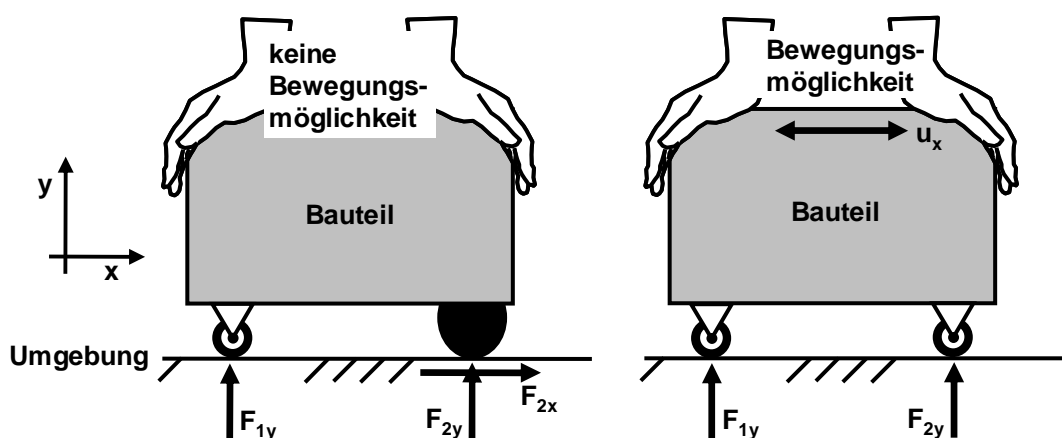


Abbildung 4.4: Punktueller Kontaktbereich mittels Fuß und Rollen

Die Beispiele in Abbildung 4.2 bis 4.4 zeigen, dass je nach Art des Kontaktes unterschiedliche Kräfte und Momente von der Umgebung auf das Bauteil wirken. Werden bei einer ebenen Aufgabenstellung alle drei Bewegungsmöglichkeiten unterdrückt, so spricht man von einer **festen Einspannung**, die auch als 3-wertige Lagerung bezeichnet wird. Verhindert man die waagrechte und senkrechte Bewe-

gungsmöglichkeit, nicht aber die Drehung, so bezeichnet man dies als ein **gelenkiges Festlager**, bzw. als ein 2-wertiges Lager. Wird nur die waagrechte oder senkrechte Bewegungsmöglichkeit unterdrückt, so wird dies als **Loslager** bzw. als 1-wertiges Lager bezeichnet. Für jedes Lager werden die in Abbildung 4.5 dargestellten Symbole verwendet. Andere Kombinationen von unterdrückten Bewegungsmöglichkeiten werden durch die Kombination dieser drei Lagertypen erreicht.

Räumliche Bauteile kennen 6 Bewegungsmöglichkeiten. Zur Unterdrückung dieser können auch Kombinationen von ebenen Lagern verwendet werden. Z.B ist eine räumliche feste Einspannung ein 6-wertiges Lager.

	ebenes Lagersymbol	auf das Bauteil wirkende Kräfte und Momente
feste Einspannung		
gelenkiges Festlager		
Loslager		

Abbildung 4.5: Ebene Lagersymbole

Ein Bauteil ist **kinematisch unbestimmt gelagert**, wenn es trotz Lagerung eine Bewegungsmöglichkeit besitzt. Das Bauteil ist **statisch bestimmt gelagert**, wenn die Anzahl der unbekanntem Lagerkräfte und Lagermomente (Anzahl der Unbekannten) gleich der Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen (Anzahl der Gleichungen, eben: 3, räumlich: 6) ist. Ist die Anzahl der Gleichungen größer als die Anzahl der Unbekannten, ist das Bauteil **statisch unbestimmt gelagert**. Das bedeutet häufig, dass es auch kinematisch unbestimmt gelagert ist. Sind mehr Unbekannte als Gleichungen zu bestimmen, ist das Bauteil **statisch überbestimmt gelagert**.

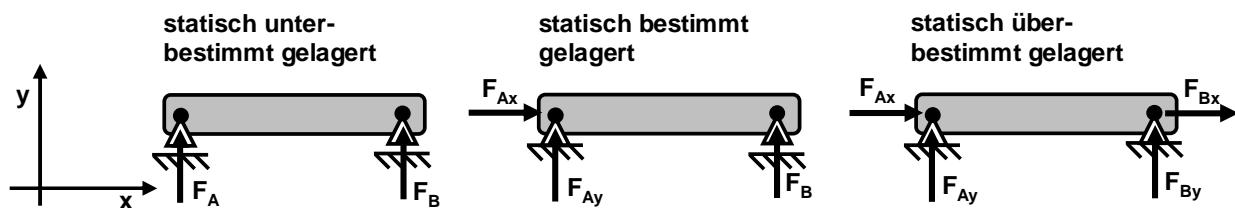


Abbildung 4.6: Unterbestimmte, bestimmte und überbestimmte ebene Lagerung

In den folgenden beiden Beispielen sollen die Lagerkräfte und die Lagermomente mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen an zwei statisch bestimmt gelagerten, ebenen Bauteilen ermittelt werden.

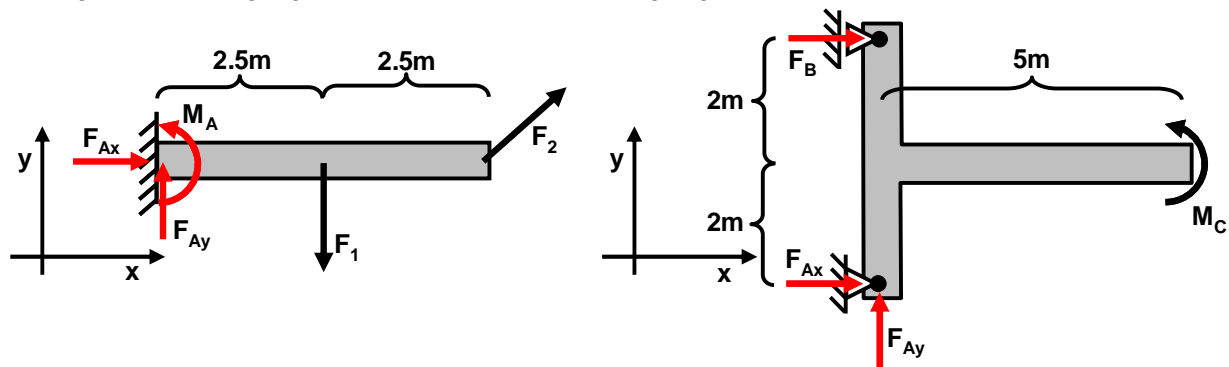


Abbildung 4.7 ebene Aufgabenstellungen mit eingezeichneten Lagerkräften und Lagermomente

Bei der linken Geometrie in Abbildung 4.7 ist die Kraft $F_1 = 2\text{N}$ gegeben. Die Kraft F_2 ist über die beiden Komponenten $F_{2x} = 4\text{N}$ und $F_{2y} = 3\text{N}$ definiert. Die feste Einspannung wird durch die zwei Lagerkräfte F_{Ax} und F_{Ay} und das Lagermoment M_A ersetzt. Diese drei Größen werden mit Hilfe der drei ebenen Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Für die Momentenbilanz wird der Lagerungspunkt A als Bezugspunkt verwendet.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + F_{2x} &= 0 & \Rightarrow \quad F_{Ax} &= -4\text{N} \\ \sum F_y = 0: \quad F_{Ay} - F_1 + F_{2y} &= 0 & \Rightarrow \quad F_{Ay} &= -1\text{N} \\ \sum M|_A = 0: \quad M_A - 2,5m \cdot F_1 + 0 \cdot F_{1y} + 5m \cdot F_{2y} &= 0 & \Rightarrow \quad M_A &= -10\text{Nm} \end{aligned}$$

Bei der rechten Geometrie in Abbildung 4.7 ist das Moment $M_C = 10\text{Nm}$ gegeben. Die drei Lagerkräfte F_{Ax} , F_{Ay} und F_B erhält man über die 3 ebenen Gleichgewichtsbedingungen.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad F_{Ax} + F_B &= 0 & \Rightarrow \quad F_{Ax} &= -F_B \\ \sum F_y = 0: \quad F_{Ay} &= 0 \\ \sum M|_C = 0: \quad M_C + 2m \cdot F_{Ax} - 5m \cdot F_{Ay} - 2m \cdot F_B &= 0 & \Rightarrow \quad F_{Ax} - F_B &= \frac{-M_C}{2m} \end{aligned}$$

Die drei Gleichgewichtsbedingungen ergeben nicht direkt die drei gesuchten Lagerkräfte. Setzt man aber die erste in die dritte Gleichung, kann man zuerst die Kraft F_B und dann F_{Ax} bestimmen.

$$\begin{aligned} F_{Ax} + F_B = -F_B - F_B = -2F_B = \frac{-M_C}{2m} & \Rightarrow \quad F_B = 2,5\text{N} \\ F_{Ax} = -F_B & \Rightarrow \quad F_{Ax} = -2,5\text{N} \end{aligned}$$

In Abbildung 4.8 ist eine Geometrie dargestellt, an welcher die räumliche Lagerkraftberechnung durchgeführt werden muss. Loslager sind im Räumlichen wie in der Ebene 1-wertige Lager. Das gelenkige Festlager wird im Räumlichen zu einem 3-wertigen Lager. Zur Bestimmung der 5 Lagerkräfte sind die 6 räumlichen Gleichgewichtsbedingungen auszuwerten. Somit ist das Bauteil statisch unterbestimmt und kinematisch unbestimmt gelagert. Die fehlende Lagerung macht sich allerdings nicht negativ bemerkbar, da durch die belastende Kraft $4F$ die mögliche Drehung um die z-Achse nicht angeregt wird. Als Bezugspunkt wird das Lager A gewählt.

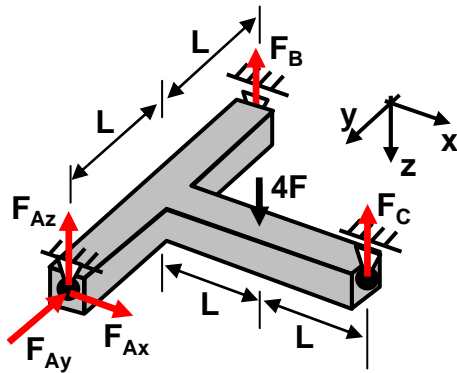


Abbildung 4.8: räumliche Aufgabenstellung mit eingezeichneten Lagerkräften

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad F_{Ax} = 0 \\ \sum F_y = 0: & \quad F_{Ay} = 0 \\ \sum F_z = 0: & \quad 4F - F_{Az} - F_B - F_C = 0 \\ \sum M_x|_A = 0: & \quad -L \cdot 4F + 2LF_B + LF_C = 0 \\ \sum M_y|_A = 0: & \quad -L \cdot 4F + 2LF_C = 0 \\ \sum M_z|_A = 0: & \quad \text{keine Kraft ist zu berücksichtigen, Momentenbilanz ist automatisch erfüllt} \end{aligned}$$

Aus der Momentenbilanz um die y-Achse folgt $F_C = 2F$. Setzt man dies in die Momentenbilanz um die x-Achse ein, folgt $F_B = F$. Zuletzt ergibt die Kräftebilanz in z-Richtung $F_{Az} = F$.

4.2 Seilkräfte

Möchte man ein Seil zusammendrücken oder eine Kraft quer zum Seil aufbringen, kann das Seil keinen Widerstand aufbringen. Das bedeutet, dass an einem Seil, wie in Abbildung 4.9, links dargestellt, nur ziehende Kräfte in Seilrichtung wirksam sein können. Bildet man das Kräftegleichgewicht in x-Richtung, erkennt man, dass beide Seilkräfte F_1 und F_2 betragsmäßig identisch sein müssen.

$$\sum F_x = 0: \quad -F_1 + F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = F_2$$

Somit muss zwischen F_1 und F_2 nicht unterschieden werden und nur eine Seilkraft berücksichtigt werden.

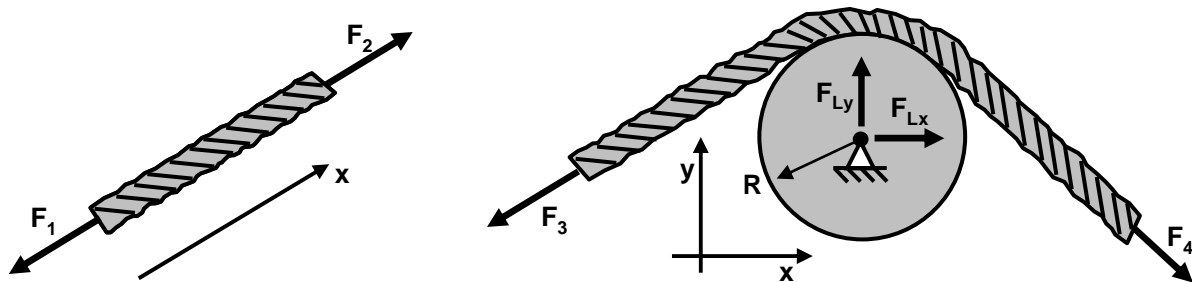


Abbildung 4.9: Seilkräfte

Verläuft das Seil wie in Abbildung 4.9, rechts über eine freidrehbare Rolle mit dem Radius R , ergibt die Momentenbilanz um den Rollenmittelpunkt R , dass auch hier beide Seilkräfte F_3 und F_4 identisch sein müssen. Auch in dieser Situation ist im Seil immer nur eine Seilkraft wirksam.

$$\sum M|_L = 0: \quad RF_3 - RF_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_3 = F_4$$

Diese Ergebnisse lassen sich auf Riemen und Ketten übertragen, die sich mechanisch wie Seile verhalten.

4.3 Schnittkräfte und Schnittmomente

Wird nicht das Gesamtbauteil von seiner Umgebung freigeschnitten, sondern teilt man das Gesamtbauteil in zwei oder mehrere Teilbauteile, so müssen die Wirkungen des Teilbauteiles i auf das Teilbauteil j durch eine Kraft $F_{i,j}$ und teilweise auch durch ein Moment $M_{i,j}$ beschrieben werden. Wegen „Aktio und Reaktio“ sind dann die Kraft $F_{j,i}$ und das Moment $M_{j,i}$ vom Teilbauteil j auf das Teilbauteil i wirksam, wobei die Kräfte und Momente die gleichen Beträge besitzen und entgegengesetzt orientiert sind. Sie werden als Schnittkräfte und Schnittmomente bezeichnet.

Welche Kräfte und Momente an den Schnitt- oder Kontaktstellen einzuführen sind, hängt davon ab, wie die beiden Teilbauteile miteinander verbunden sind. Typische ebene Verbindungselemente sind die in den Abbildungen 4.10 und 4.11 dargestellte feste Verbindung und das Gelenk.

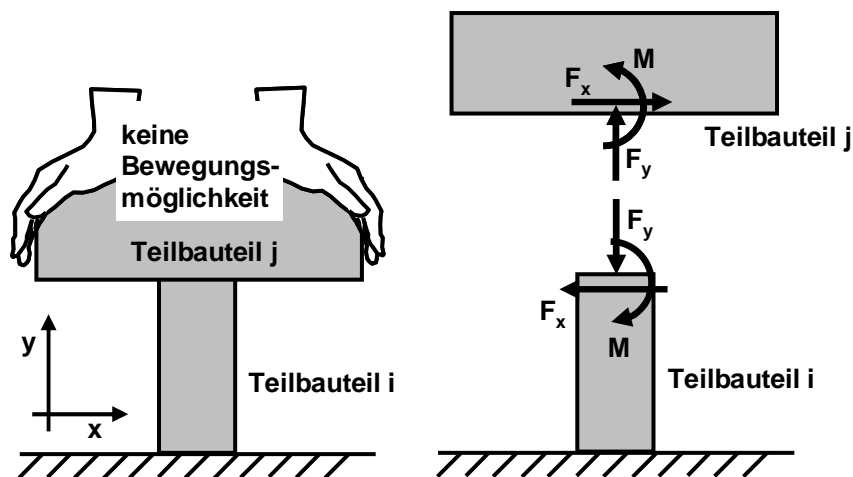


Abbildung 4.10: Wirkweise einer festen Verbindung zwischen den Teilbauteilen i und j

Bei der ebenen festen Verbindung kann sich das Teilbauteil i infolge der festen Einspannung an der Umgebung nicht bewegen. Infolge der festen Verbindung kann sich das Teilbauteil j relativ zum Teilbauteil i auch nicht bewegen. Das bedeutet, die waagrechte Bewegung des Teilbauteils j muss durch eine waagrechte Kraft F_x , die senkrechte Bewegung durch eine Kraft F_y und die Drehung durch ein Moment M unterdrückt werden. Diese Größen muss das Teilbauteil i aufbringen. Wegen „Aktio und Reaktio“ sind die Gegengrößen am Teilbauteil i wirksam. Bei einer räumlichen festen Verbindung müssten 3 Kräfte und 3 Momente angebracht werden.

Beim Gelenk werden wie bei der festen Verbindung die waagrechte und die senkrechte Bewegung unterdrückt. Allerdings kann das Teilbauteil beliebig um die z -Achse gedreht werden. Daher kann

zwischen den Teilbauteilen kein Moment wirksam sein, welches die Drehung unterdrückt. Somit wird das ebene Gelenk nur durch eine waagrechte Kraft F_x und durch eine senkrechte Kraft F_y ersetzt.

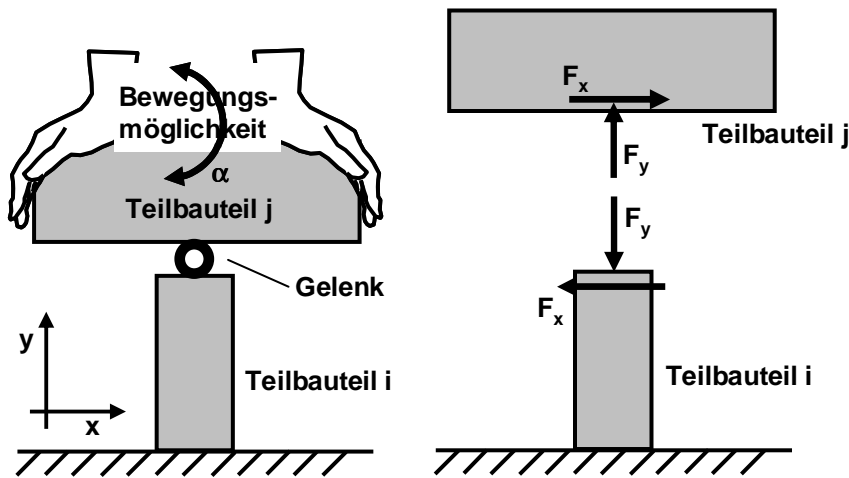


Abbildung 4.11: Wirkweise eines Gelenkes zwischen den Teilbauteilen i und j

Da jedes Teilbauteil für sich im Gleichgewicht sein muss, erhält man für jedes ebene Teilbauteil 3 und für jedes räumliche Teilbauteil 6 Gleichgewichtsbedingungen zum Bestimmen der Schnittkräfte und Schnittmomente. Ist die Summe der Gleichgewichtsbedingungen identisch mit der Summe der Anzahl der Lagerkräfte, Lagermomente, Schnittkräfte und Schnittmomente, so ist das Gesamtbauteil **statisch bestimmt** (Anzahl der Gleichungen gleich Anzahl der Unbekannten), andernfalls **statisch unbestimmt**.

Ist ein geradliniger, ebener Teilstab i, wie in Abbildung 4.12 dargestellt, mit zwei Teilbauteilen gelenkig verbunden und wirken sonst keine weiteren Kräfte auf diesen Stab, so zeigt das Momentengleichgewicht und die Kräftebilanz in y-Richtung, dass der Stab nur Kräfte in Stabrichtung übertragen kann.

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{1x} + F_{2x} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{1x} = F_{2x}$$

$$\sum M|_l = 0: \quad LF_{2y} = 0 \quad (L \neq 0) \Rightarrow \quad F_{2y} = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad -F_{1y} + F_{2y} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{1y} = 0$$

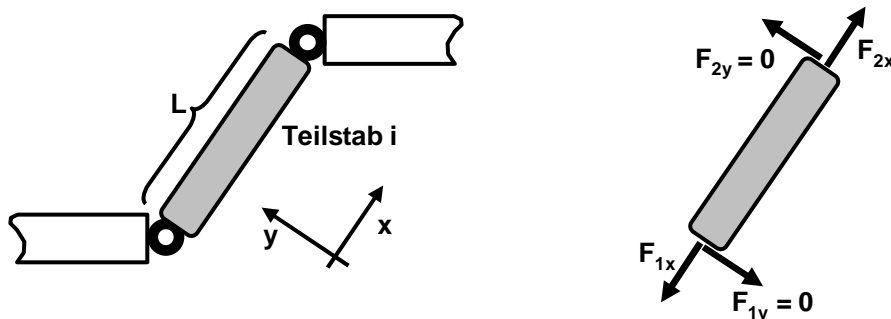


Abbildung 4.12: An zwei Punkten gelenkig angebundener Zugstab

Die beiden Kräfte F_{1x} und F_{2x} sind identisch. Zeigen sie wie in Abbildung 4.12 vom Stab heraus, ziehen sie diesen auseinander. Man bezeichnet den Stab als Zugstab. Andernfalls wird der Stab zusammengedrückt und man nennt ihn Druckstab. Diese Aussage gilt auch für räumliche Stäbe. Ein Bauteil, welches nur aus Zug- und Druckstäben aufgebaut ist, wird als **Fachwerk** bezeichnet.

Die Anwendung soll an der in der Abbildung 4.13, links oben dargestellten Geometrie verdeutlicht werden. Gesucht seien die Lagerkräfte. Zeichnet man wie in der Abbildung oben rechts nur die Lager ein, erhält man vier Lagerkräfte F_{Ax} , F_{Ay} , F_{Bx} und F_{By} , für welche man nur drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung hat. Somit ist das Bauteil statisch überbestimmt gelagert. Es fehlt für die Betrachtung des Gesamtbauteils eine Gleichung.

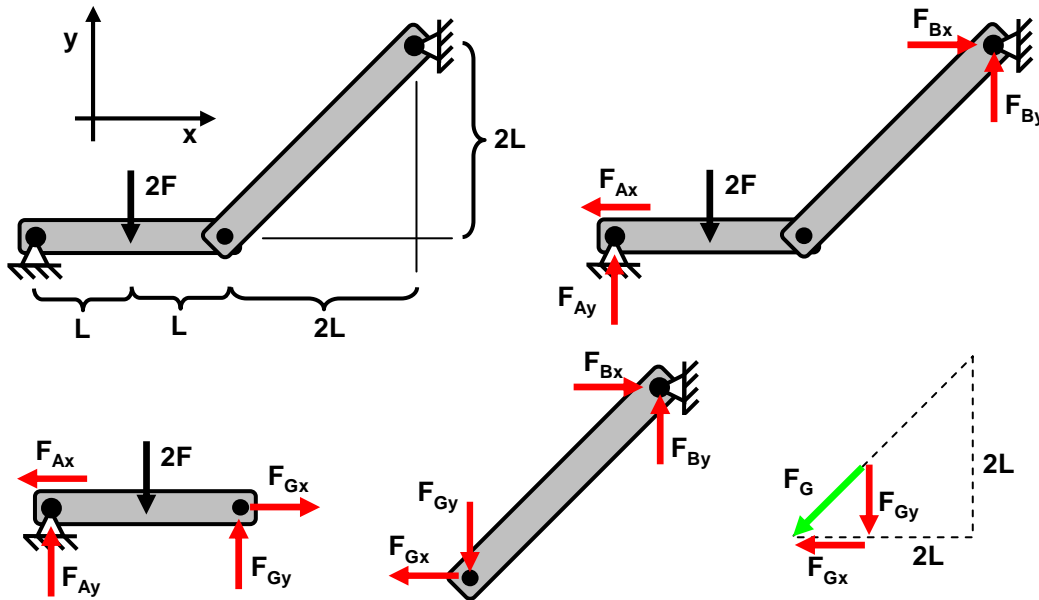


Abbildung 4.13: Berechnung der Lager- und Schnittkräfte an einem ebenen Bauteil

Zerschneidet man das Bauteil am Gelenk in zwei Teilbauteile, müssen dort zwei zusätzliche Schnittkräfte F_{Gx} und F_{Gy} eingeführt werden. Dadurch erhöht sich die Anzahl der Unbekannten auf 6. Allerdings hat man jetzt auch 2 mal 3 Gleichgewichtsbedingungen bzw. Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten. Betrachtet man den waagrechten Teilstab, so können die senkrechten Kräfte F_{Ay} und F_{Gy} bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \sum M|_A = 0: & \quad -L2F + 2LF_{Gy} = 0 & \Rightarrow & \quad F_{Gy} = F \\ \sum F_y = 0: & \quad F_{Ay} - 2F + F_{Gy} = 0 & \Rightarrow & \quad F_{Ay} = F \end{aligned}$$

Um die waagrechten Kräfte bestimmen zu können, muss der Diagonalstab betrachtet werden. Da dieser an 2 Punkten gelenkig angebunden und an keinem weiteren Punkt eine Kraft wirksam ist, überträgt der Stab nur Kräfte in Stabrichtung. Das bedeutet, die resultierende Kraft F_G muss in Stabrichtung zeigen. Wendet man den Strahlensatz am unten rechts dargestellten Kräfte Dreieck an, erhält man F_{Gx} .

$$\frac{F_{Gx}}{F_{Gy}} = \frac{2L}{2L} = 1 \quad \Rightarrow \quad F_{Gx} = F_{Gy} = F$$

Die beiden Kräftegleichgewichte ergeben F_{Bx} und F_{By} .

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad -F_{Gx} + F_{Bx} = 0 & \Rightarrow & \quad F_{Bx} = F \\ \sum F_y = 0: & \quad -F_{Gy} + F_{By} = 0 & \Rightarrow & \quad F_{By} = F \end{aligned}$$

Abschließend betrachtet man nochmals den waagrechten Stab und berechnet F_{Ax} .

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{Ax} + F_{Gx} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Ax} = F$$

Eine Verbindung zwischen einem ebenen Stab und einem Rad soll extra betrachtet werden. Wird diese wie in Abbildung 4.14 freigeschnitten, muss an der Kontaktstelle an beiden Teilbauteilen eine waagrechte Kraft F_R und eine senkrechte Kraft F_N eingetragen werden. Zusätzlich werden am Rad auch die beiden Lagerkräfte F_{Ax} und F_{Ay} eingezeichnet. Bildet man jetzt am Rad das Momentengleichgewicht um den Bezugspunkt A, folgt, dass die Kraft F_R gleich null sein muss.

$$\sum M|_A = 0: \quad R F_R = 0 \quad (R \neq 0) \Rightarrow F_R = 0$$

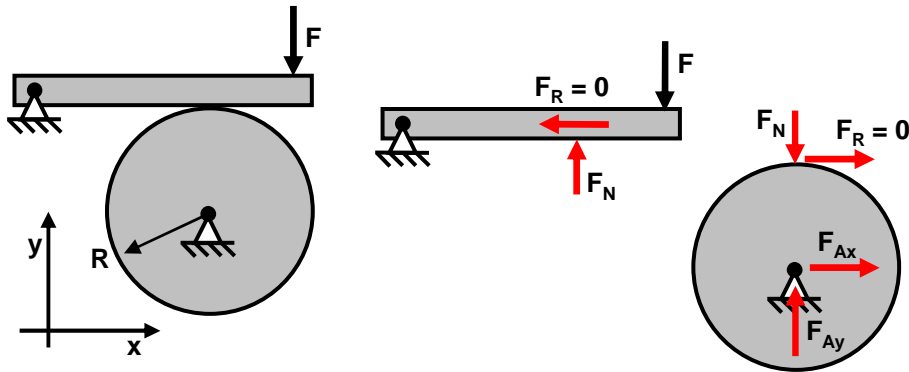


Abbildung 4.14: Freischneiden einer ebenen Verbindung zwischen Stab und nicht angetriebenem Rad

Dies liefert die wichtige Erkenntnis, dass wenn an einem Rad nur eine Kraft in Umfangsrichtung wirksam ist, diese gleich null sein muss. Das ist auch die Begründung, weshalb die Räder in Abbildung 4.4 keine waagrechten Kräfte übertragen können. Sind wie in Abbildung 4.15 nach dem Freischneiden zwei oder mehr Kräfte in Umfangsrichtung wirksam, so beeinflussen sie sich gegenseitig. Bei diesem Beispiel ergibt das Momentengleichgewicht um A für die Kraft $F_R = F$.

$$\sum M|_A = 0: \quad \frac{R}{2} 2F - R F_R = 0 \quad \Rightarrow F_R = F$$

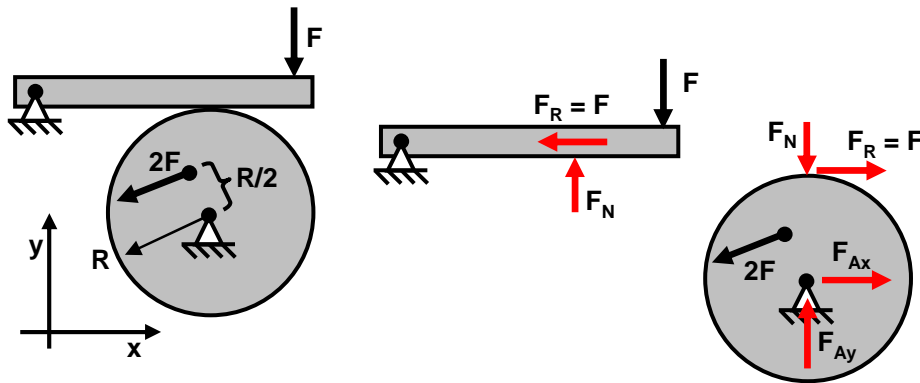


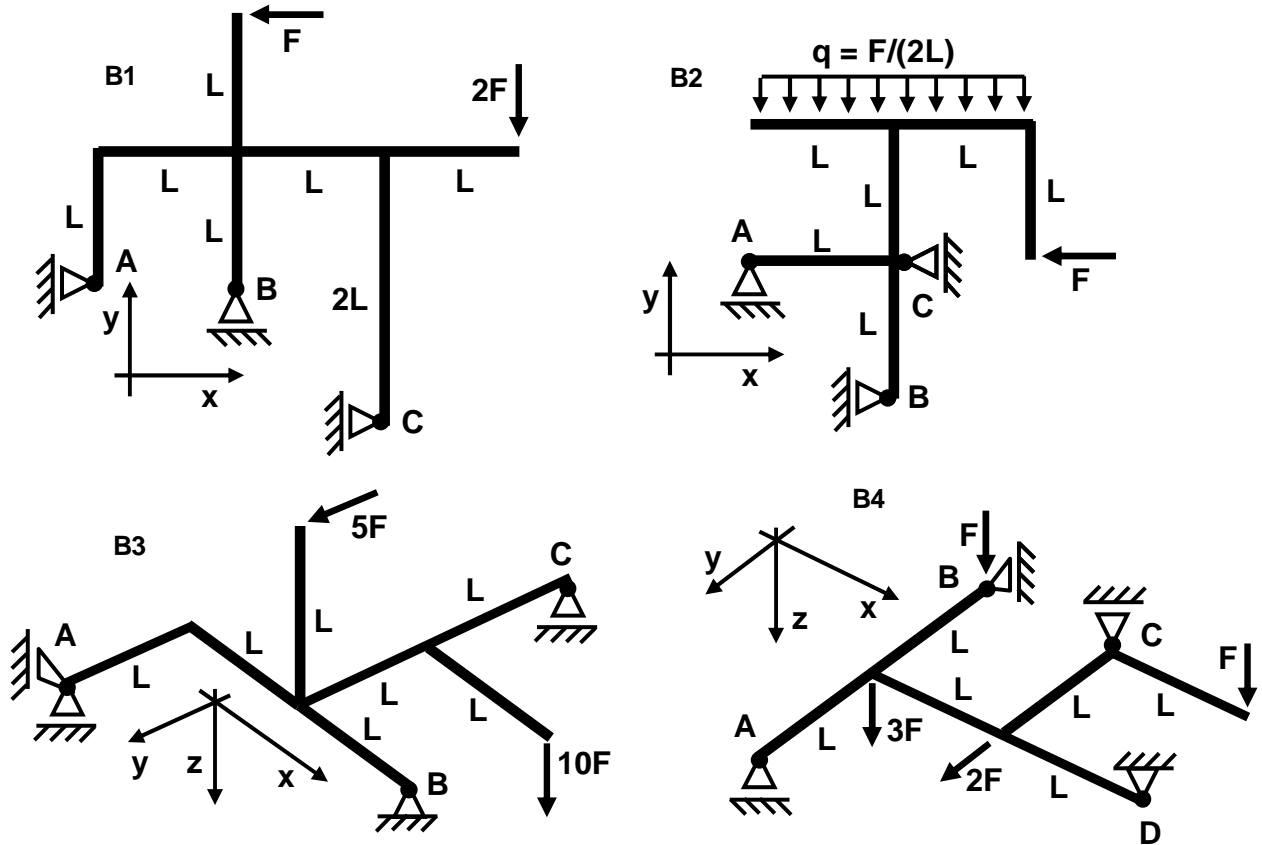
Abbildung 4.15: Freischneiden einer ebenen Verbindung zwischen Stab und angetriebenem Rad

Wirkt auf das Rad ein „antreibendes“ oder „bremsendes“ Moment M_A , so erhält man auch eine Kraft F_R ungleich null.

Aufgaben zu Kapitel 4.1 bis 4.3

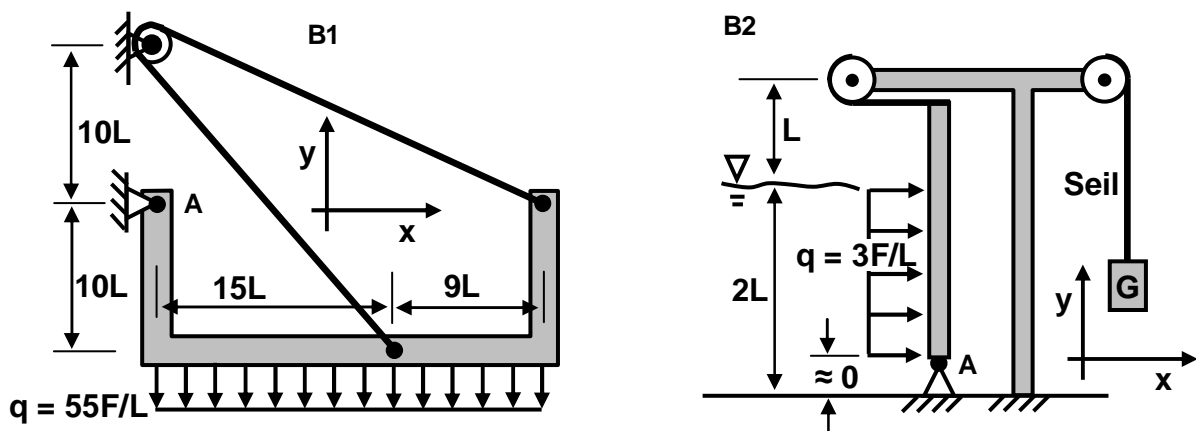
Aufgabe 4.1.1

Die Lagerkräfte in den vier Bauteilen sind zu bestimmen (Lösung: $F_{A,B1} = F$, $F_{B,B2} = F$, $F_{C,B3} = 9F$, $F_{B,B4} = F$).



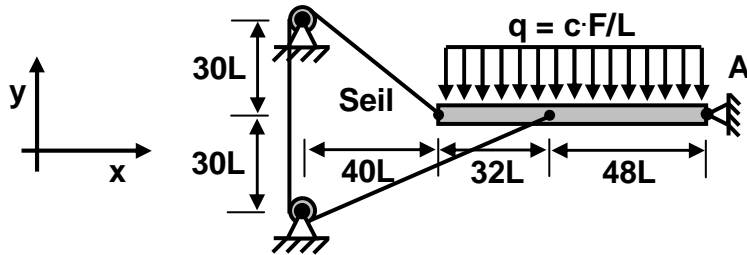
Aufgabe 4.2.1

Gesucht sind die Seilkräfte in Abhängigkeit von F (Lösung: $F_{S,B1} = 1040F$, $F_{S,B2} = 2F$).



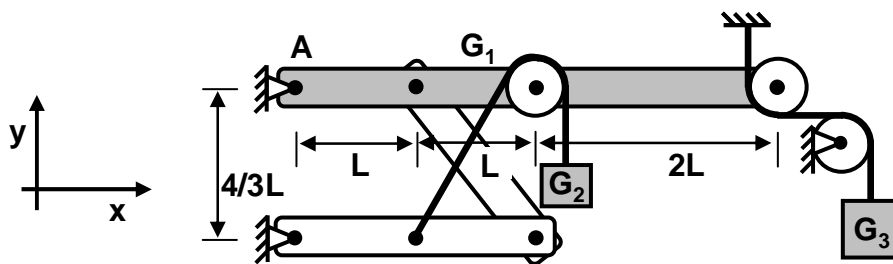
Aufgabe 4.2.2

Auf einen Balken, der über ein Seil fixiert wird, wirkt die konstante Flächenlast q . Wie groß darf der Faktor c maximal werden, wenn das Seil bei einer Seilkraft $F_S = 130F$ reißt? Wie groß sind dann die Kräfte am Lager A (Lösung: $F_{Ax} = 224F$, $F_{Ay} = 68F$)?



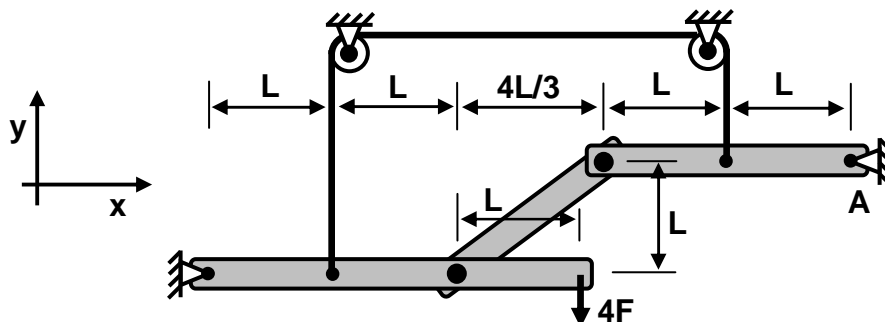
Aufgabe 4.3.1

Der graue Balken hat die Gewichtskraft $G_1 = G$. Für ein Gegengewicht gilt $G_2 = G$. Wie muss G_3 gewählt werden, damit das Bauteil im Gleichgewicht ist? Wie groß sind die resultierenden Kräfte am Lager A (Lösung: $F_{Ax} = 0.4G$, $F_{Ay} = 1.1G$)?



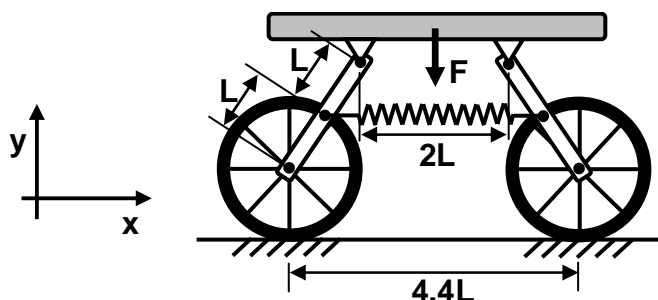
Aufgabe 4.3.2

Die Kräfte am Lager A sind gesucht (Lösung: $F_{Ax} = 4F$, $F_{Ay} = 3F$).



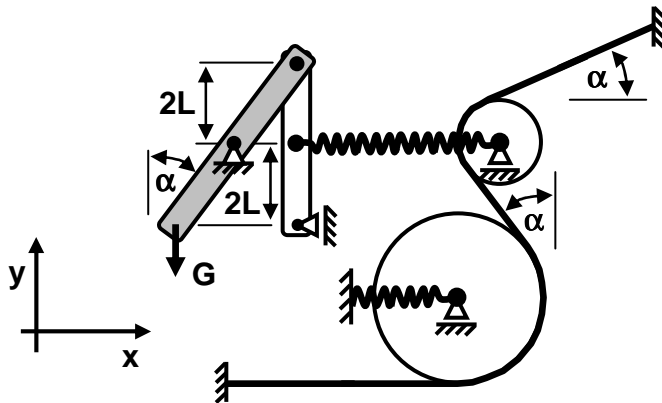
Aufgabe 4.3.3

Das Bauteil ist symmetrisch. F wirkt in der Mitte. Wie groß ist die Federkraft (Lösung: $F_{Feder} = 0.75F$)



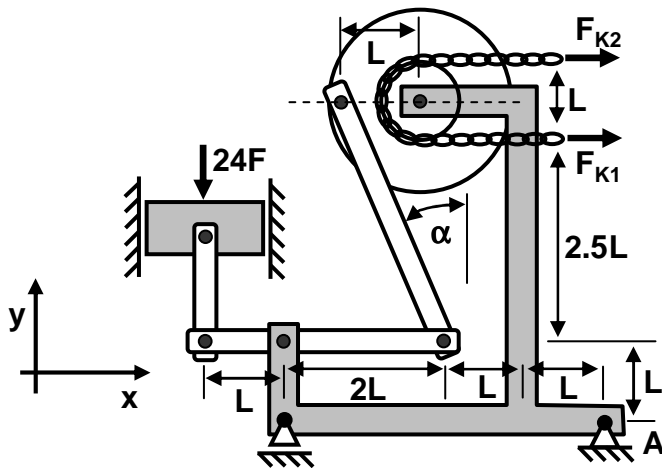
Aufgabe 4.3.4

Das Bauteil ist im Gleichgewicht ($\tan\alpha = 3/4$). Wie groß ist die Kraft G , wenn die Federkraft in der unteren Feder $12F$ beträgt (Lösung: $G = 7F$)?



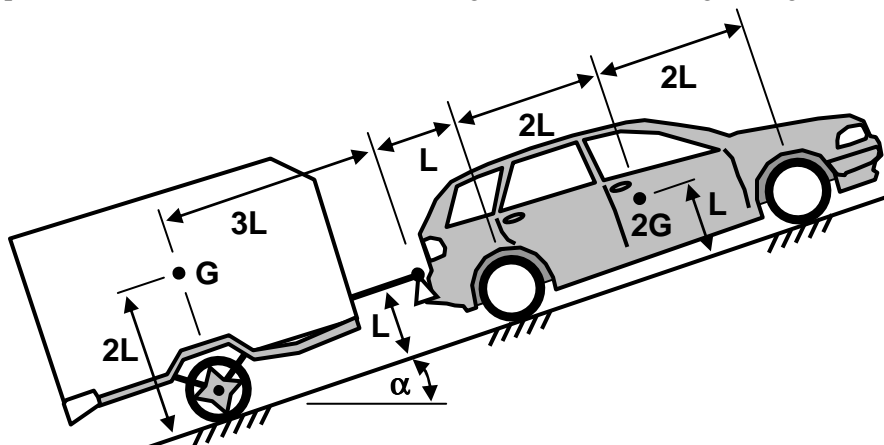
Aufgabe 4.3.5

Bei der Kette ist eine der beiden Kettenkräfte F_{K1} oder F_{K2} gleich null. Wie groß ist der Betrag der Kettenkraft ungleich null? Welche Kräfte wirken am Lager A (Lösung: $F_{Ax} = 24F$, $F_{Ay} = 15F$)?



Aufgabe 4.3.6

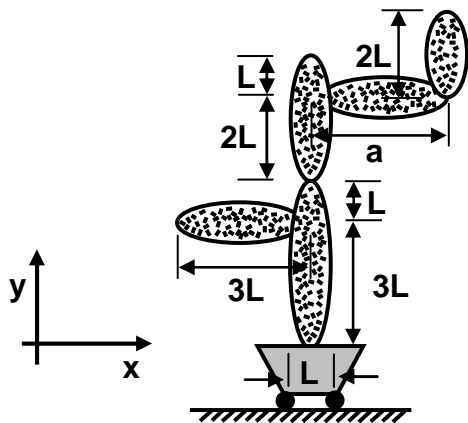
Nur die Vorderräder des Pkw sind angetrieben. Bei welchem Winkel α sind an den Vorderrädern die parallel und senkrecht zur Fahrbahn zeigenden Kräfte betragsmäßig identisch (Lösung: $\alpha = 15.26^\circ$)?



Aufgabe 4.3.7

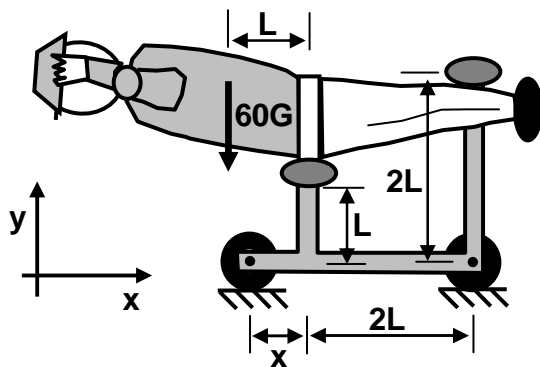
Trotz der ovalen Form der Kaktussegmente kann davon ausgegangen werden, dass die Gewichtskräfte G_{Si} der 5 Kaktussegmente mit der Länge L_{Si} durch die Formel $G_{Si} = G \cdot L_{Si} / L$ bestimmt werden können. Für die Berechnung greift die Gewichtskraft im jeweiligen Schwerpunkt des Segments an. Das unterste Kaktussegment steht in der Topfmitte.

Es sei $a = 4L$. Wie groß muss die Gewichtskraft F des symmetrischen Kaktustopfes mindestens sein, damit die Pflanze nicht kippt (Lösung: $F = 7G$)? Wie groß muss $a \geq 0$ sein, damit der Kaktus unabhängig vom Topfgewicht nicht kippt (Lösung: $0 \leq a \leq 3.322L$)?



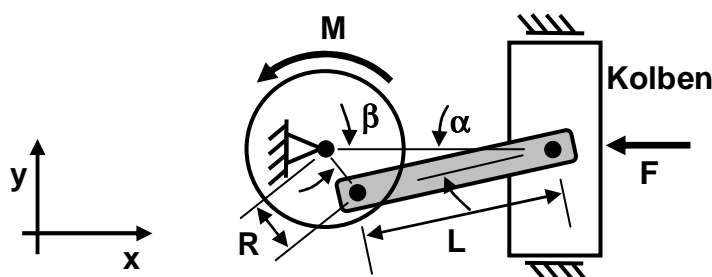
Aufgabe 4.3.8

Der Mann hat die Gewichtskraft $60G$. Der graue Rahmen hat pro Länge L die Gewichtskraft $6G$. Die restlichen Gewichtskräfte können vernachlässigt werden. Wie groß muss x mindestens sein, dass das Sportgerät nicht kippt (Lösung: $x = 0.264L$)?



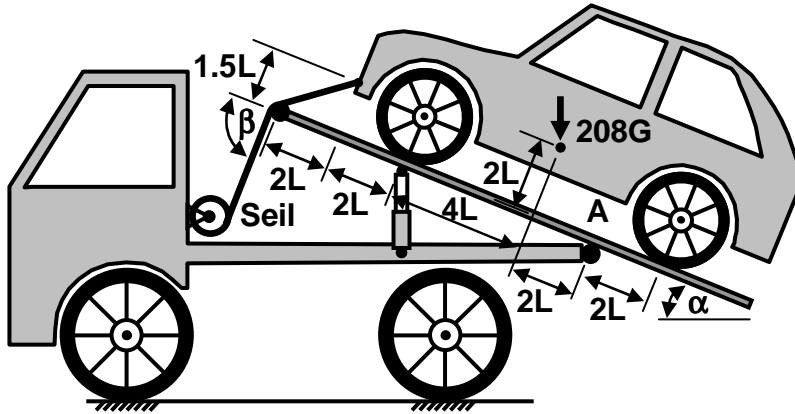
Aufgabe 4.3.9

Es gilt $R/L = 0.2$, $\cos^2\beta - \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1$ und näherungsweise $\sin\alpha = \tan\alpha$. Gesucht ist M in Abhängigkeit von F , R und β . Für welches β wird M maximal (Lösung: $\beta = 79.3^\circ$)?



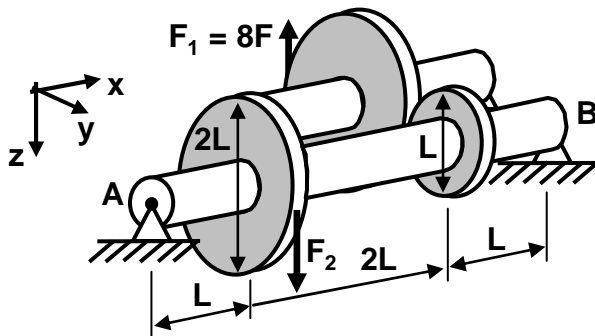
Aufgabe 4.3.10

Das Auto besitzt eine Gewichtskraft von $208G$, seine Räder sind frei drehbar ($\tan\alpha = 5/12$, $\beta = 90^\circ$). Gesucht sind die Seilkraft, die Kraft im Hydraulikzylinder und die Gesamtkraft $F_A^2 = F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2$ im Gelenk A (Lösung: $F_A = \text{Wurzel}(7769)G$).



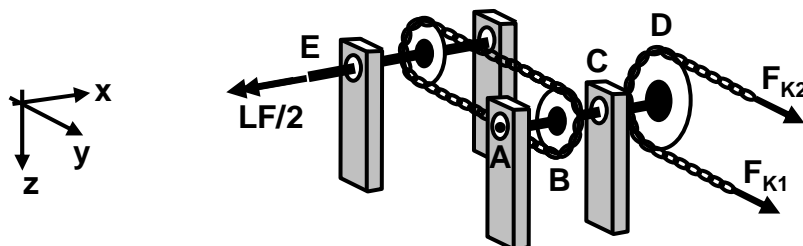
Aufgabe 4.3.11

Beide Achsen sind auf gleicher Höhe. An den Zahnrädern werden nur Kräfte in Umfangsrichtung übertragen. In x-Richtung wirken keine Kräfte. Wie groß sind die Kräfte an den Lagern A und B (Lösung: $F_A = 5F$, $F_B = 7F$)?



Aufgabe 4.3.12

Die kleinen Kettenräder haben den Radius L , das große den Radius $2L$. Die vordere Welle ABCD besteht aus drei gleichlangen Abschnitten mit der Gesamtlänge $3L$. Welche der Kettenkräfte F_{K1} oder F_{K2} ist gleich null, wie groß sind die Kräfte in den Lagern A und C (Lösung: $F_A = 3/8F$, $F_C = F/8$)?



4.4 Fachwerke

Besteht ein Bauteil nur aus Stäben, die die drei Bedingungen

- die Stäbe sind gerade
- die Stäbe sind an ihren beiden Endpunkten gelenkig verbunden
- Kräfte wirken nur an den Verbindungspunkten der Stäbe

erfüllen, so wird es als Fachwerk bezeichnet. Für die Verbindungspunkte verwendet man auch den Begriff Knoten. Die drei Bedingungen ergeben, dass nur Kräfte in Stabrichtung wirksam sind. Somit sind nur Zug- und Druckstäbe vorhanden. Zur Berechnung der Kräfte kann z.B. das **Knotenpunktverfahren** verwendet werden. Dazu werden z.B. am Fachwerk in Abbildung 4.16, links die Knoten freigeschnitten (Abbildung 4.16, rechts). An den Stäben können auch die Kräfte eingezeichnet werden. Da diese nur die Information (Kräftegleichgewicht in Stabrichtung) liefern, dass beide Stabkräfte identisch sind, werden die freigeschnittenen Stäbe häufig nicht dargestellt, sondern nur die Knoten. Das bedeutet, zeigt die Kraft vom Knoten weg, betrachtet man einen Zugstab, andernfalls ein Druckstab.

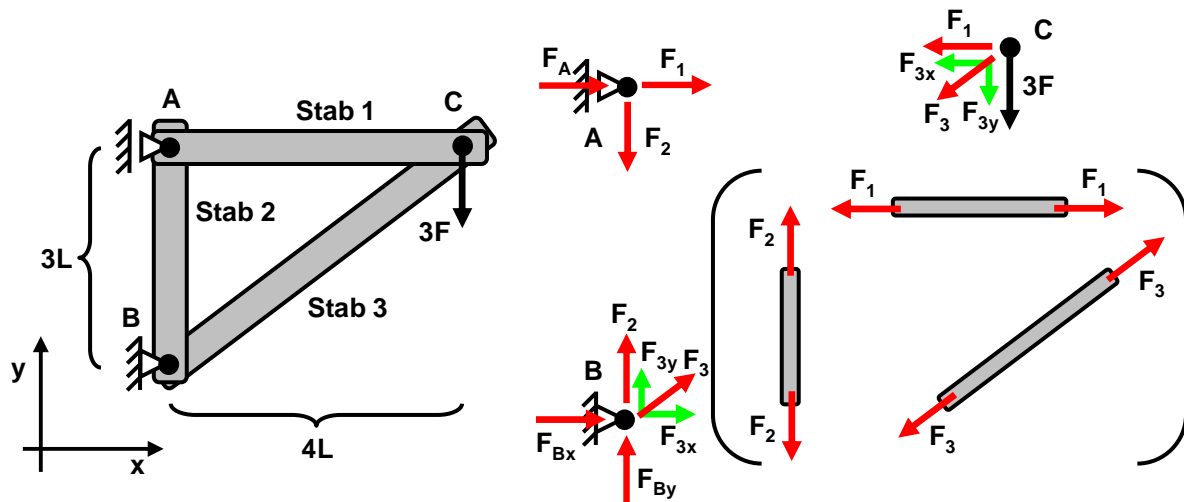


Abbildung 4.16: Aufgabenstellung zur Fachwerksberechnung und freigeschnittene Knoten

Bei einem ebenen bzw. räumlichen Bauteil resultieren für jeden Knoten 2 oder 3 Kräftegleichgewichte, die zur Bestimmung der Kräfte ausgewertet werden können. Durch die Art der Verbindung der Stäbe ist das Momentgleichgewicht für alle Kräfte erfüllt und ergibt keine Informationen zur Bestimmung der Kräfte. Das bedeutet, dass bei einem ebenen Bauteil pro Knoten 2 Kräfte bestimmt werden können. Am Beispiel in Abbildung 4.16 beginnt man am Knoten C und bestimmt die Kräfte F_3 und F_1 .

$$\sum F_y = 0: \quad -F_{3y} - 3F = -\frac{3}{5}F_3 - 3F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_3 = -5F$$

$$\sum F_x = 0: \quad -F_1 - F_{Bx} = -F_1 - \frac{4}{5}F_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = 4F$$

Anschließend betrachtet man den Knoten A und berechnet die Kräfte F_A und F_2 .

$$\sum F_x = 0: \quad F_A + F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = -4F$$

$$\sum F_y = 0: \quad -F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_2 = 0$$

Abschließend werden am Knoten B die verbleibenden Kräfte F_{Bx} und F_{By} ermittelt.

$$\sum F_x = 0: \quad F_{Bx} + F_{3x} = F_{Bx} + \frac{4}{5}F_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Bx} = 4F$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{By} + F_{3y} = F_{By} + \frac{3}{5}F_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{By} = 3F$$

Zusammenfassend wird der Stab 1 auseinandergezogen, der Stab 3 zusammengedrückt. Daher ist Stab 1 ein Zugstab, Stab 3 ein Druckstab. Da die Kraft im Stab 2 gleich null ist, wird dieser als **Nullstab** bezeichnet. Da diese Nullstäbe in den meisten Fällen auch ohne Berechnung erkannt werden können, sollen drei dazu notwendige Regeln vorgestellt werden. Von einem unbelasteten Knoten spricht man, wenn an diesem Knoten lediglich Stabkräfte wirksam sind und keine Lagerkräfte oder gegebene Belastungen. Für das Beispiel in Abbildung 4.16 bedeutet dies, dass alle Knoten belastet sind.

In Abbildung 4.17 werden die folgenden drei Regeln zum Finden der Nullstäbe skizziert:

- sind an einem unbelasteten Knoten 2 Stäbe angebunden und liegen diese nicht auf einer Geraden, so sind beide Nullstäbe (Regel 1)
- sind an einem unbelasteten Knoten drei Stäbe angebunden und zwei liegen auf einer Geraden, so ist der dritte ein Nullstab (Regel 2)
- sind an einem belasteten Knoten 2 Stäbe angebunden und die Kraft und der erste Stab liegen auf einer Geraden, so ist der zweite Stab ein Nullstab (Regel 3)

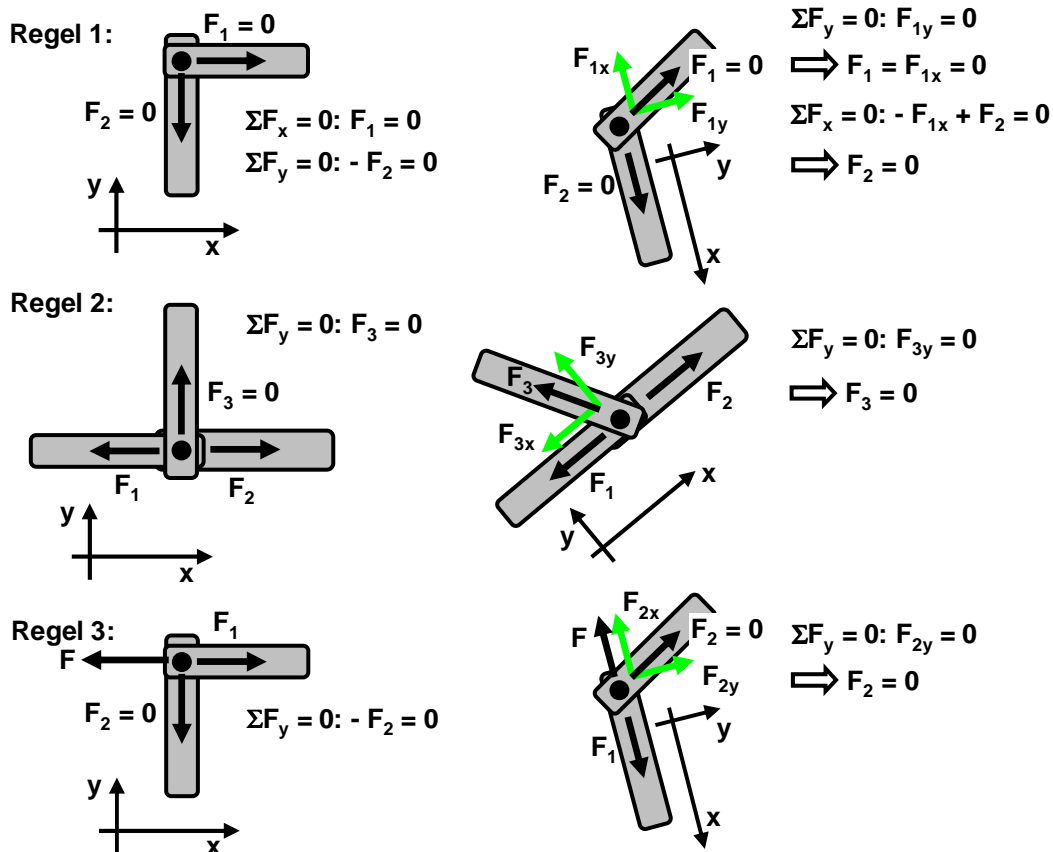
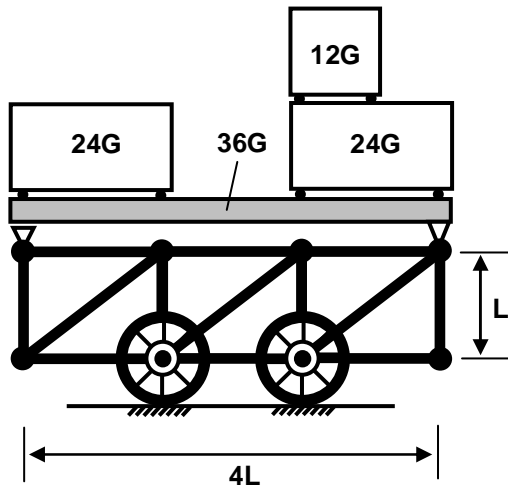


Abbildung 4.17: Regeln zum Finden von Nullstäben

Aufgaben zu Kapitel 4.4

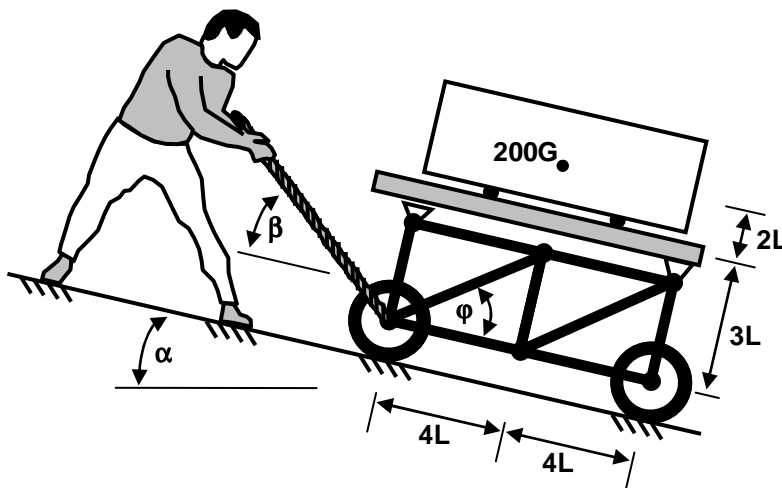
Aufgabe 4.4.1

Auf einem Wagen liegen drei Pakete mit den Gewichtskräften $24G$ und $12G$. Der rechte Auflagepunkt des Paketes mit der Gewichtskraft $12G$ liegt genau in der Mitte der Auflagepunkte des darunterliegenden Paketes. Das Auflagebrett hat die Gewichtskraft $36G$. Der Unterbau des Wagens besteht aus einem Fachwerk, welches aus drei identischen Segmenten aufgebaut ist. Die Stabkräfte im Unterbau sollen berechnet werden (Lösung: $F_{\max} = -85G$ (Druckstab)).



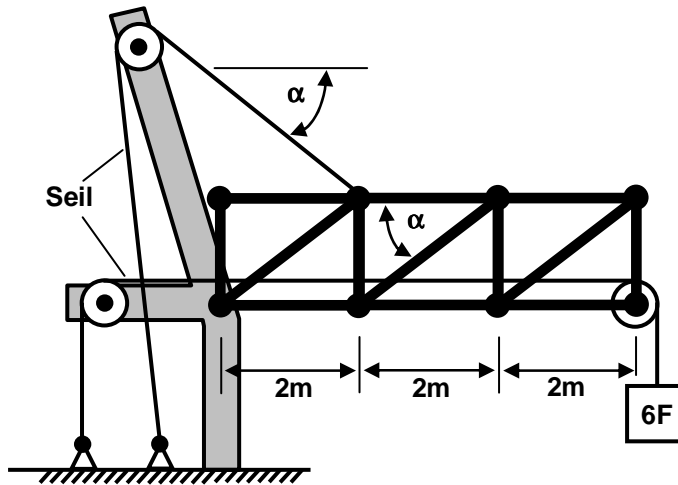
Aufgabe 4.4.2

Nur die Kiste hat eine zu berücksichtigende Gewichtskraft $200G$ ($\tan\alpha = 7/24$, $\beta = 45^\circ$, $\tan\varphi = 0.75$). Die Stabkräfte im Fachwerk des Unterbaus sind zu berechnen (Lösung: $F_{\max} = -131G$ (Druckstab)).

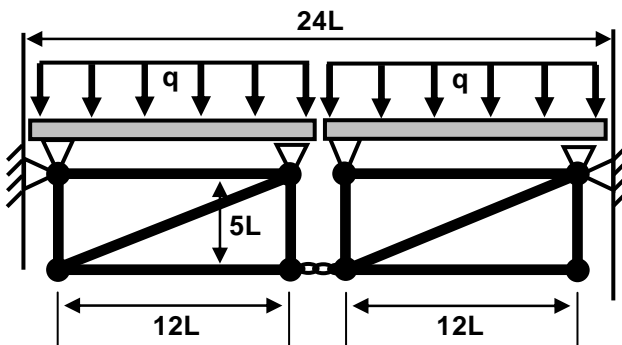


Aufgabe 4.4.3

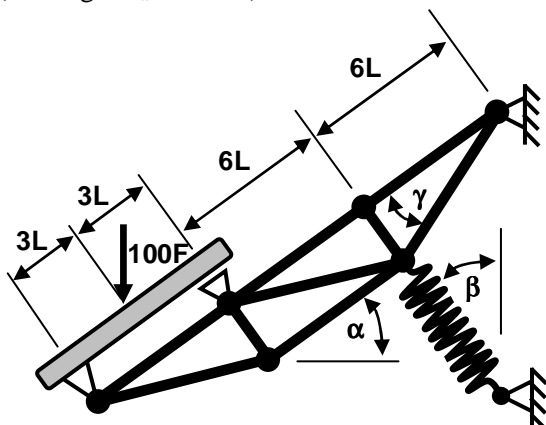
Gesucht sind die Stabkräfte im Fachwerk ($\tan\alpha = 0.75$) (Lösung: $F_{\max} = -22F$ (Druckstab)).

**Aufgabe 4.4.4**

Ein zweiteiliges Schleusentor wird durch ein Fachwerk verstärkt. Durch die gespannte Kette wird das Tor zusammengehalten. Das Wasser wirkt auf die grauen Balken mit einer Streckenlast $q = 2.5F/L$. Die Stabkräfte im Fachwerk sind zu berechnen (Lösung: $F_{\max} = 39F$).

**Aufgabe 4.4.5**

Gesucht sind die Stabkräfte des Fachwerks des Bremspedals ($\tan\alpha = \tan\beta = 0.75$, $\tan\gamma = 5/12$) (Lösung: $F_{\max} = 348F$):



4.5 Innere Kräfte und Momente

Ein Balken ist ein Stab, der nicht nur Kräfte in Stabrichtung, sondern auch Querkräfte und Momente übertragen kann. Dieser Balken sei im Gleichgewicht, und die x -Achse soll in Balkenrichtung zeigen. Schneidet man den Balken gemäß Abbildung 4.18 in zwei Teile, entstehen zwei Schnittflächen oder zwei **Schnittufer**. An den Schnittufern können Oberflächennormalen eingezeichnet werden, die senkrecht auf den Schnittufern stehen und aus den Teilbalken herauszeigen. Die Schnitte sollen so ausgeführt werden, dass die Oberflächennormalen in die positive oder negative x -Achse zeigen. Das Schnittufer, bei welchem die Oberflächennormale in die positive x -Richtung zeigt, wird positives Schnittufer genannt, das andere negatives.

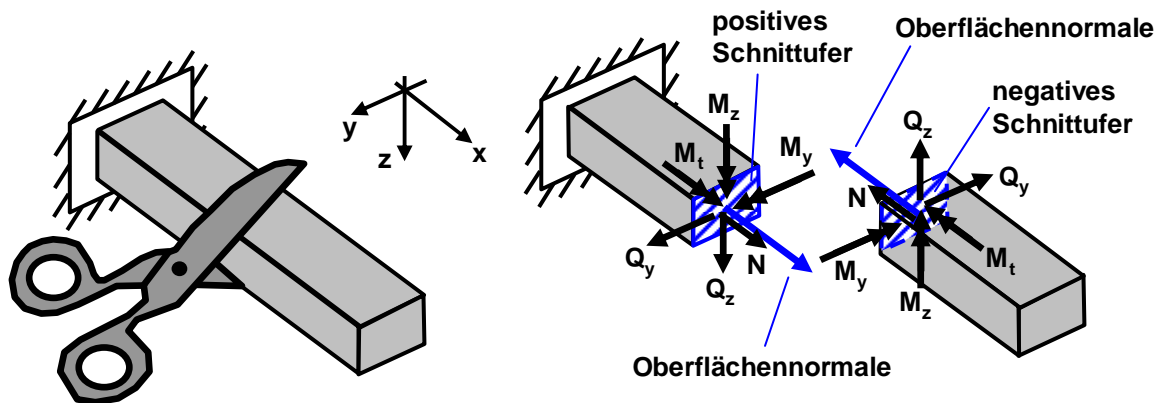


Abbildung 4.18: Positives und negatives Schnittufer mit den inneren Kräften und Momenten

Der Schnitt entspricht einer Trennung einer festen Verbindung. Beim räumlichen Balken müssen an jedem Schnittufer 3 Kräfte und 3 Momente angebracht werden, damit beide Teilbauteile für sich im Gleichgewicht sein können. Diese werden als die **inneren Kräfte und Momente** bezeichnet. Die Kraft in x -Richtung wird als **Normalkraft** N , die Kraft in y -Richtung als **Querkraft** Q_y und die Kraft in z -Richtung als **Querkraft** Q_z bezeichnet. Entsprechend wird das Moment in x -Richtung als **Torsionsmoment** M_t , das Moment in y -Richtung als **Biegemoment** M_y und das Moment in z -Richtung als **Biegemoment** M_z bezeichnet. Um allgemeingültige Regeln ableiten zu können, werden die inneren Kräfte und Momente so eingezeichnet, dass sie am positiven Schnittufer in die positiven Koordinatenrichtungen zeigen. Wegen „Aktio und Reaktio“ zeigen die inneren Kräfte und Momente am negativen Schnittufer entgegengesetzt in die negativen Koordinatenrichtungen. Die Schnitte werden an jeder x -Koordinate durchgeführt, die entsprechenden inneren Kräfte und Momente bestimmt und deren Werte in Schaubilder eingetragen. Somit erhält man den Verlauf dieser Größen über der Balkenlänge.

Im Folgenden soll an mehreren Balkenvarianten die Bestimmung der inneren Kräfte und Momente vorgestellt werden.

- Innere Kräfte und Momente am ebenen, geraden Balken:

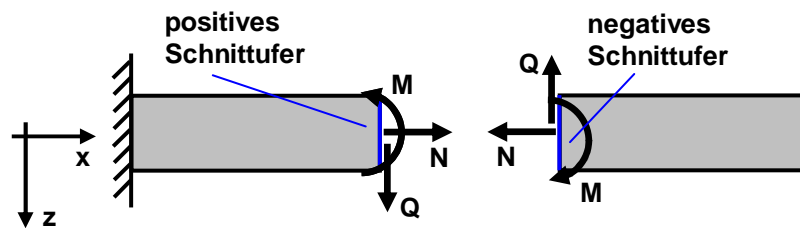


Abbildung 4.19: Innere Kräfte und Momente am ebenen, geraden Balken

Der ebene Balken soll wie in Abbildung 4.19 dargestellt im xz-Koordinatensystem betrachtet werden. Dann muss die Querkraft Q_y , das Biegemoment M_z und das Torsionsmoment M_t nicht berücksichtigt werden, da sie den Betrag null besitzen. Weil keine Verwechslungsgefahr besteht wird die Querkraft Q_z nur Q und das Biegemoment M_y nur M genannt.

Stellvertretend soll der in Abbildung 4.20, links dargestellte Balken der Länge L , der mit einer konstanten Streckenlast $q = q_z$ und rechts mit einer einzelnen waagrechten Kraft F belastet wird, untersucht werden. Die Lagerkraftberechnung ergibt $F_{Ax} = F$, $F_{Az} = qL/2$ und $F_B = qL/2$. Um die inneren Kräfte und Momente in Abhängigkeit von x zu bestimmen und den Werteverlauf in Schaubilder eintragen zu können, wird der Balken an einer beliebigen x -Position zerschnitten.

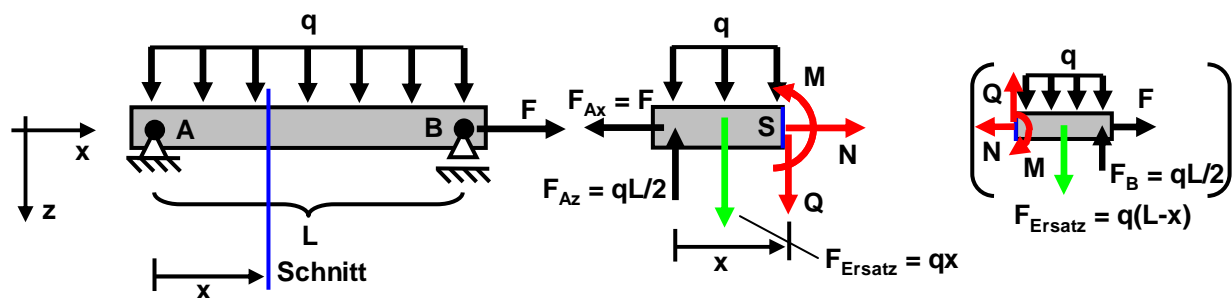


Abbildung 4.20: Aufgabenstellung für Berechnung der inneren Kräfte und Momente und Schnitt an der Position x

Da für beide Teile drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen und bei beiden Teilen die gleichen 3 unbekanntes Größen N , Q und M zu bestimmen sind, ist es ausreichend, nur den linken Teil zu betrachten. Daher wird der in Klammern gezeichnete rechte Teil nicht beachtet. Die am linken Teil wirksame Ersatzkraft $F_{Ersatz} = qx$ muss bestimmt werden. Anschließend müssen N , Q und M mit den Gleichgewichtsbedingungen so festgelegt werden, dass der linke Teil im Gleichgewicht ist. Als Bezugspunkt wird der Punkt S , welcher im Schnittufer liegt, gewählt.

$$\sum F_x = 0: \quad -F_{Ax} + N = -F + N = 0 \quad \Rightarrow \quad N = F$$

$$\sum F_z = 0: \quad -F_{Az} + F_{Ersatz} - Q = -\frac{qL}{2} + qx + Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{qL}{2} - qx$$

$$\sum M|_S = 0: \quad -xF_{Az} + \frac{x}{2}F_{Ersatz} + M = -x\frac{qL}{2} + \frac{x}{2}qx + M = 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

Unabhängig welchen Wert man für $0 < x < L$ wählt, sind die resultierenden Gleichgewichtsbedingungen und somit die Funktion für N , Q und M vom Aufbau identisch. Somit beschreiben die resultierenden Gleichungen die Verläufe über der gesamten Balkenlänge L , welche in drei Schaubildern der Abbildung 4.21 aufgezeichnet werden können.

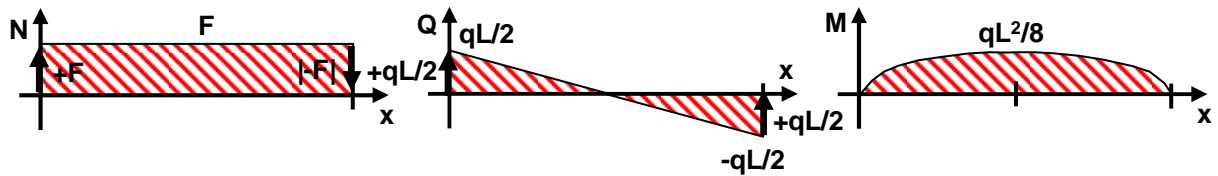


Abbildung 4.21: Verlauf der inneren Kräfte und Momente für den Balken aus Abbildung 4.20

Da für $x < 0$ der linke Teil keine Balkenanteile beinhaltet und somit im Gleichgewicht ist, müssen die inneren Kräfte und Momente für $x < 0$ gleich null sein. Gleiches gilt für $x > L$, da nun der linke Teil aus dem Gesamtbalken besteht, der gemäß Annahme im Gleichgewicht ist. Somit müssen am Balkenanfang ($x = 0$) und am Ende ($x = L$) des Balkens in den Schaubildern die in Abbildung 4.18 eingezeichneten Sprungstellen vorhanden sein, um den berechneten Funktionsverlauf für $0 < x < L$ zu ermöglichen. Man erkennt, dass die Sprunghöhen immer den Beträgen der Lagerkräfte bzw. der rechten waagrechten Kraft F entsprechen. Zeigt die entsprechende Kraft in die positive Koordinatenrichtung, fällt die innere Kraft sprunghaft, wirkt eine negative Lagerkraft, so steigt die innere Kraft sprunghaft an.

Leitet man die Funktionen für Q und M nach x ab, kann man einen Zusammenhang zwischen q , Q und M erkennen.

$$Q' = \frac{dQ}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{qL}{2} - qx \right) = -q$$

$$M' = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{qL}{2} x - \frac{q}{2} x^2 \right) = \frac{qL}{2} - qx = Q$$

Dieser Zusammenhang lässt sich verallgemeinern bzw. beweisen, wenn man einen kleinen Balkenabschnitt gemäß der Abbildung 4.22 der Länge dx betrachtet. Zwischen dem linken negativen Schnittufer und dem rechten positiven Schnittufer haben aufgrund der kleinen Länge dx die inneren Kräfte und Momente auch nur kleine Änderungen dQ und dM . Da keine Kräfte in x -Richtung vorhanden sind, ist die Normalkraft konstant gleich null und muss nicht betrachtet werden.

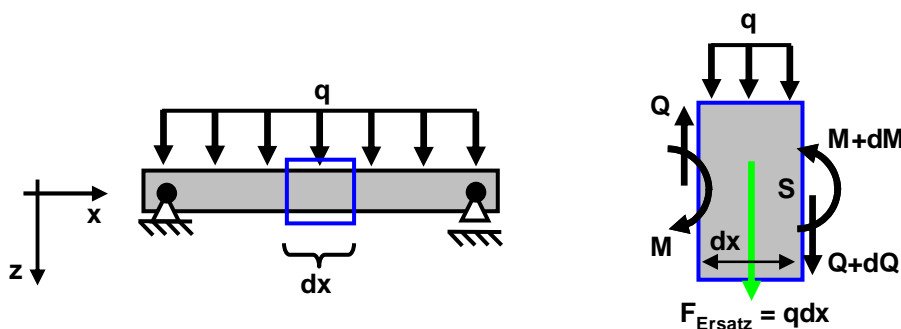


Abbildung 4.22: Innere Kräfte und Momente an einem kleinen Balkenabschnitt der Länge dx

Um den oben beobachteten Zusammenhang zu beweisen, wird das Kräftegleichgewicht in z -Richtung und das Momentengleichgewicht mit dem Bezugspunkt S gebildet.

$$\sum F_z = 0: \quad -Q + F_{Ersatz} + Q + dQ = qdx + dQ = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dx} = -q$$

$$\sum M|_S = 0: \quad -M - dxQ + \frac{dx}{2} F_{Ersatz} + M + dM = -dxQ + \frac{dx}{2} qdx + dM = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dM}{dx} = Q$$

Für das Aufstellen der Schaubilder der inneren Kräfte und Momente können am ebenen, geraden Balken folgende Regeln angewendet werden. Dabei werden alle Kräfte und Momente, die keine inneren sind, als **äußere Kräfte und Momente** bezeichnet.

- an der x-Position einer äußeren positiven Kraft wird die innere Kraft um den Betrag der äußeren sprunghaft reduziert (Sprungstelle nach unten).
- an der x-Position einer äußeren negativen Kraft wird die innere Kraft um den Betrag der äußeren sprunghaft erhöht (Sprungstelle nach oben).
- gleiches gilt auch für die Momente.
- zwischen den Sprungstellen verläuft die Normalkraft N in den hier vorgestellten Beispielen und Aufgaben konstant.
- der Verlauf der Querkraft Q und des Biegemoments M ist zwischen den Sprungstellen durch Ableitungsregeln definiert.

$$\frac{dQ}{dx} = -q \quad \text{und} \quad \frac{dM}{dx} = Q$$

- die Ableitungsregeln können durch Integralgleichungen ersetzt werden.

$$Q = -\int q dx + c_1 \quad \text{und} \quad M = \int Q dx + c_2$$

- die Integrationskonstanten c_1 und c_2 müssen aus den Randbedingungen an den Sprungstellen ermittelt werden.

- Innere Kräfte und Momente an ebenen, zusammengesetzten Bauteilen:

Betrachtet man ebene Bauteile, die aus geraden Balken zusammengesetzt sind, muss das Bauteil vor der Bestimmung der inneren Kräfte und Momente wie im Beispiel in Abbildung 4.23 in ebene gerade Balken zerlegt werden. Dabei sind feste Verbindungen oder Gelenke zu zerschneiden und durch Schnittkräfte und -momente zu ersetzen. Diese sind so zu bestimmen, dass jedes Teilbauteil bzw. jeder Balken für sich im Gleichgewicht ist.

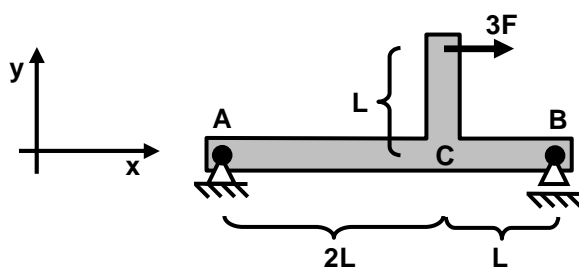


Abbildung 4.23: Aufgabenstellung zur Bestimmung der inneren Kräfte und Momente bei einem zusammengesetzten Bauteil

Zuerst müssen am Gesamtbauteil die Lagerkräfte $F_{Ax} = 3F$, $F_{Ay} = F$ und $F_B = F$ bestimmt werden. Anschließend wird das Bauteil am Punkt C in zwei gerade Balken zerlegt. Dazu muss wie in Abbildung 4.24, links eingezeichnet eine feste Verbindung getrennt werden, wofür zwei Schnittkräfte F_{Cx} und F_{Cy} und ein -moment M_C zu bestimmen sind.

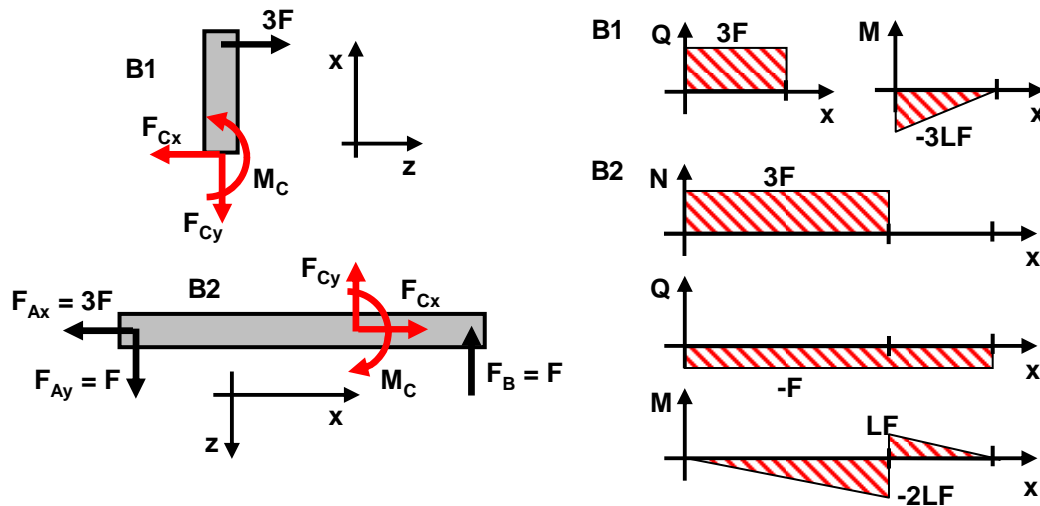


Abbildung 4.24: Zerlegung des Bauteils aus Abbildung 4.23 in gerade Balken und innere Kräfte und Momente

Für die Bestimmung der Schnittgrößen wird das Bauteil B1 betrachtet, da dabei weniger Größen zu berücksichtigen sind. Die Bilanzen werden bezüglich des lokalen xz-Koordinatensystems des Balkens B1 aufgestellt.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: & \quad -F_{Cx} + 3F = 0 & \Rightarrow & \quad F_{Cx} = 3F \\ \sum F_z = 0: & \quad -F_{Cy} = 0 & \Rightarrow & \quad F_{Cy} = 0 \\ \sum M|_C = 0: & \quad M_c - L \cdot 3F = 0 & \Rightarrow & \quad M_c = 3LF \end{aligned}$$

Anschließend können alle Balken unabhängig voneinander betrachtet werden. Da die x-Achse in Stabrichtung zeigen muss, wird für jeden Balken ein eigenes xz-Koordinatensystem verwendet. Es können die gleichen Regeln wie beim geraden, ebenen Balken angewandt werden. Somit resultieren die in Abbildung 4.24, rechts dargestellten inneren Kräfte und Momente.

Zeigen die Schnittkräfte, wie am Balken BC in Abbildung 4.25, an den Schnittstellen weder quer noch parallel zum Balken, müssen sie in Komponenten zerlegt werden, die in Balkenrichtung oder quer zum Balken zeigen.

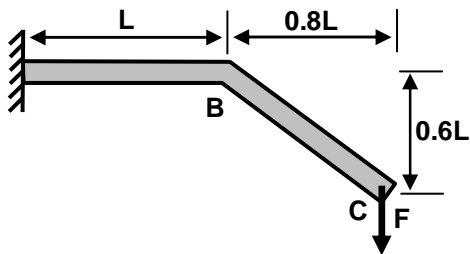


Abbildung 4.25: Bauteil mit Schnittkräften, die in Balken- und Querrichtung zerlegt werden müssen

Dazu muss wie in Abbildung 4.26 mit Hilfe der geometrischen Angaben der Winkel α , der den Zusammenhang zwischen den Komponenten und der Gesamtkraft F beschreibt, bestimmt werden. Mit diesem Winkel können die Kraftkomponenten in Balkenrichtung $F \sin \alpha = 0.6F$ und die Komponenten $F \cos \alpha = 0.8F$ quer zum Balken berechnet werden. Da die lokale x-Achse in Balkenrichtung und somit

diagonal zeigt, sind die Zerlegungskräfte die Ausgangsgrößen zur Bestimmung der inneren Kräfte N und Q .

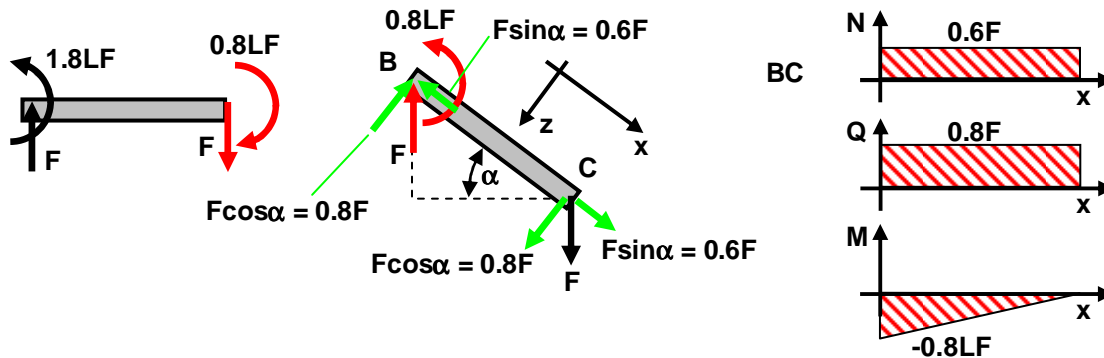


Abbildung 4.26: Innere Kräfte und Momente im Balken BC der Geometrie aus Abbildung 4.25

- Innere Kräfte und Momente an räumlichen Bauteilen mit Biegung um eine Achse:

Betrachtet man ein räumliches Bauteil, bei dem nur Biegung um eine Achse auftreten soll, muss die Betrachtung des vorigen Abschnitts (Innere Kräfte und Momente an ebenen, zusammengesetzten Bauteilen) nur um ein Torsionsmoment M_t , welches versucht, die Stäbe um ihre Stabachse (x -Achse) zu verdrehen, ergänzt werden. Dabei soll die folgende zusätzliche Regel beachtet werden:

- zwischen den Sprungstellen verläuft das Torsionsmoment M_t in den hier vorgestellten Beispielen und Aufgaben konstant

Die Anwendung wird an der in Abbildung 4.27 dargestellten Geometrie vorgestellt. Die verwendete Lagerung A stellt eine räumliche feste Einspannung dar.

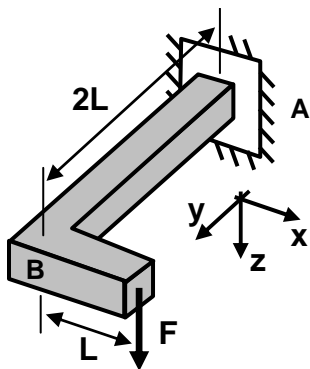


Abbildung 4.27: Aufgabenstellung zur Bestimmung der inneren Kräfte und Momente bei einem räumlichen Bauteil mit Biegung um eine Achse

Am Gesamtbauteil werden die Lagerkraft $F_A = F$, und die Lagermomente $M_{Ax} = 2LF$ und $M_{Ay} = LF$ bestimmt. Anschließend wird das Bauteil am Punkt B in zwei gerade Balken zerlegt. Dazu muss wie in Abbildung 4.28, links eingezeichnet eine feste Verbindung getrennt werden, wofür eine Schnittkraft F_B und ein -moment M_B zu bestimmen sind. Für die Bestimmung der Schnittgrößen wird das Bauteil B2 betrachtet, da dabei weniger Größen zu berücksichtigen sind. Die Bilanzen werden bezüglich des lokalen Koordinatensystems des Balkens B2 bestimmt.

$$\sum F_z = 0: \quad -F_B + F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_B = F$$

$$\sum M_y|_B = 0: \quad M_B - L \cdot F = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B = LF$$

Die weiteren Bilanzen beinhalten nur Kräfte und Momente mit dem Betrag Null und werden nicht aufgeführt.

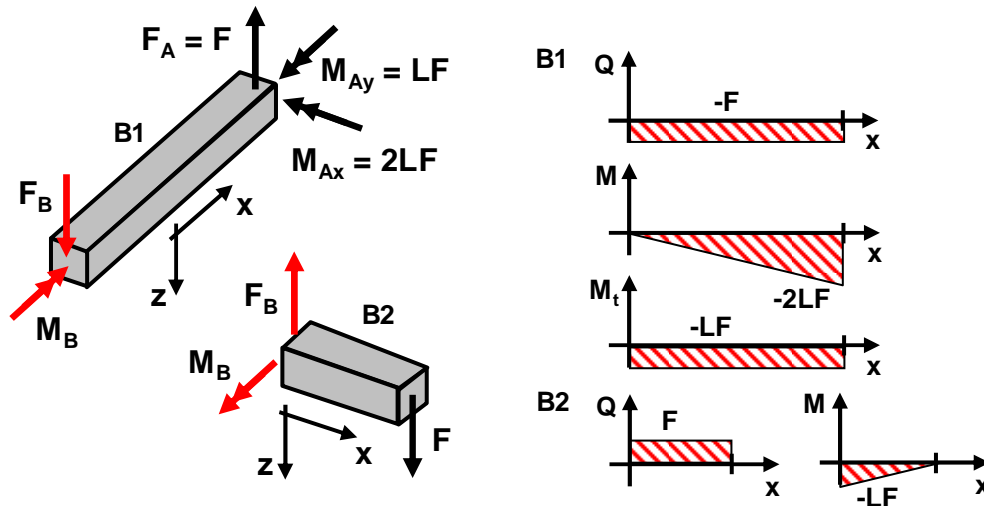


Abbildung 4.28: Zerlegung des Bauteils aus Abbildung 4.24 in gerade Balken und innere Kräfte und Momente

- Innere Kräfte und Momente an räumlichen Bauteilen mit Biegung um 2 Achsen:

Im Vergleich zur vorigen Betrachtung eines räumlichen Balkens mit nur einer Biegung um eine Achse müssen bei der Biegung um zwei Achsen zwei Querkräfte und zwei Biegemomente berücksichtigt werden. Daher wird wieder die ursprüngliche Bezeichnung $q = q_z, q_y, Q_z = Q, Q_y$ und $M_y = M$ und M_z verwendet.

Die beim ebenen Balken und am räumlichen Balken mit Biegung um eine Achse angegebenen Regeln gelten weiterhin. Zusätzlich muss der Zusammenhang zwischen der Streckenlast q_y in y -Richtung, der Querkraft Q_y und dem Biegemoment M_z berücksichtigt werden:

- der Verlauf der Querkraft Q_y und des Biegemoments M_z ist zwischen den Sprungstellen durch Ableitungsregeln definiert.

$$\frac{dQ_y}{dx} = -q_y \quad \text{und} \quad \frac{dM_z}{dx} = -Q_y$$

- die Ableitungsregeln können durch Integralgleichungen ersetzt werden.

$$Q_y = -\int q_y dx + c_3 \quad \text{und} \quad M_z = -\int Q_y dx + c_4$$

- die Integrationskonstanten c_3 und c_4 müssen aus den Randbedingungen an den Sprungstellen ermittelt werden.

Dieser Zusammenhang lässt sich mit der in Abbildung 4.29 dargestellten Betrachtung beweisen, Man betrachtet analog zur Abbildung 4.22 einen kleinen Balkenabschnitt der Länge dx .

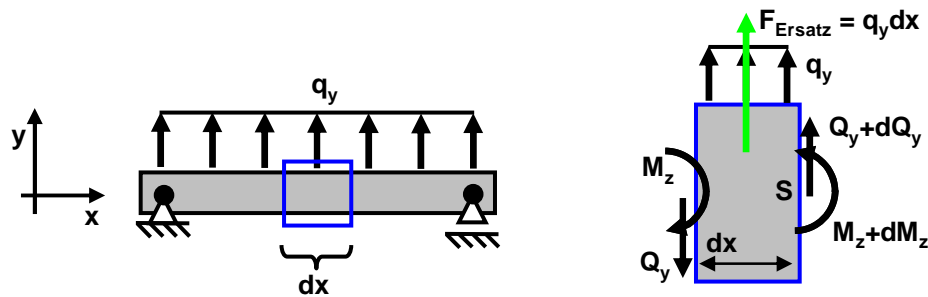


Abbildung 4.29: Innere Kräfte und Momente an einem kleinen Balkenabschnitt der Länge dx

Es wird das Kräftegleichgewicht in y -Richtung und das Momentengleichgewicht um die z -Achse mit dem Bezugspunkt S gebildet.

$$\sum F_y = 0: \quad -Q_y + F_{\text{Ersatz}} + Q_y + dQ_y = q_y dx + dQ_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ_y}{dx} = -q_y$$

$$\sum M_z|_S = 0: \quad -M_z + dx Q_y - \frac{dx}{2} F_{\text{Ersatz}} + M_z + dM_z = dx Q_y - \underbrace{\frac{dx}{2} q_y dx}_{\text{vernachlässigbar klein}} + dM_z = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dM_z}{dx} = -Q_y$$

Um die Vorgehensweise zu verdeutlichen, wird in der Geometrie aus Abbildung 4.27, wie in Abbildung 4.30 dargestellt, eine zusätzliche Kraft F in negativer y -Richtung angebracht

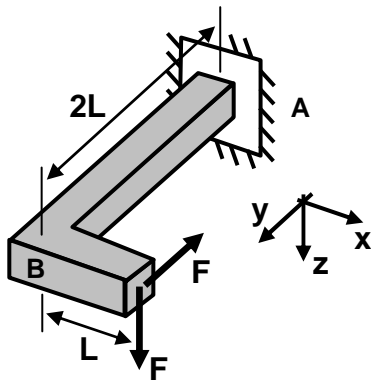


Abbildung 4.30: Aufgabenstellung zur Bestimmung der inneren Kräfte und Momente bei einem räumlichen Bauteil mit Biegung um zwei Achsen

Am Gesamtbauteil werden die Lagerkraft $F_{Ay} = F_{Az} = F$, und die Lagermomente $M_{Ax} = 2LF$, $M_{Ay} = LF$ und $M_{Az} = LF$ bestimmt. Anschließend wird das Bauteil wieder am Punkt B in zwei gerade Balken zerlegt. Für die Bestimmung der Schnittgrößen wird das Bauteil B2 betrachtet. Die Bilanzen werden bezüglich des lokalen Koordinatensystems des Balkens B2 bestimmt.

$$\sum F_z = 0: \quad -F_{Bz} + F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{Bz} = F$$

$$\sum M_y|_B = 0: \quad M_{By} - L \cdot F = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{By} = LF$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_{By} - F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{By} = F$$

$$\sum M_z|_B = 0: \quad M_{Bz} - L \cdot F = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{Bz} = LF$$

Die weiteren Bilanzen beinhalten nur Kräfte und Momente mit dem Betrag Null und werden nicht aufgeführt. In Abbildung 4.31 sind die resultierenden inneren Kräfte und Momente dargestellt.

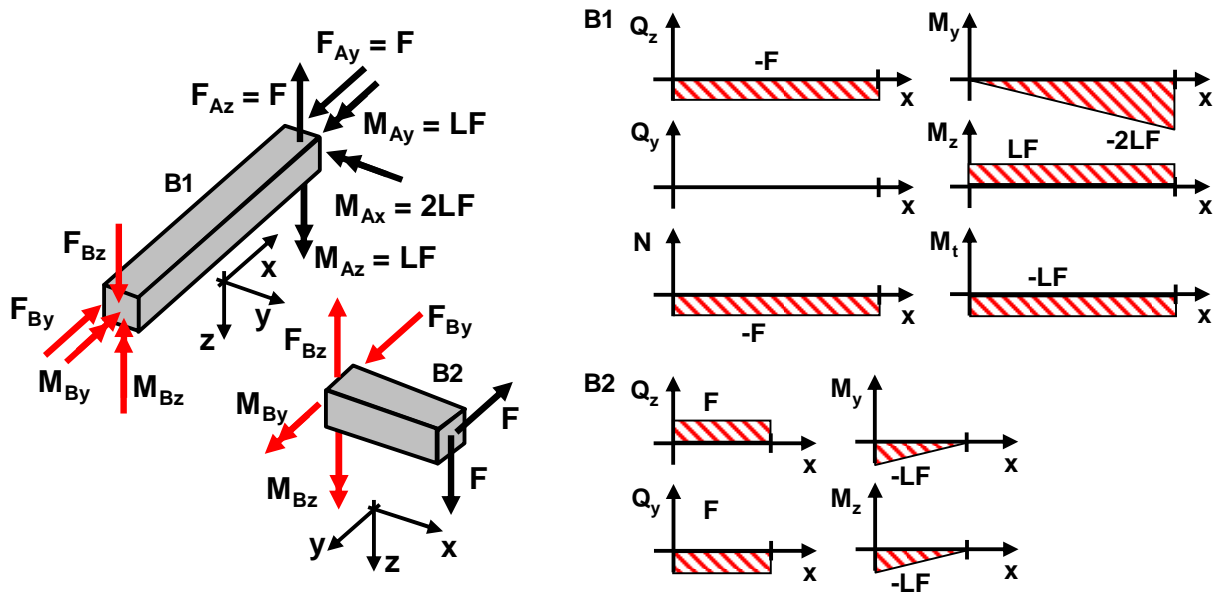
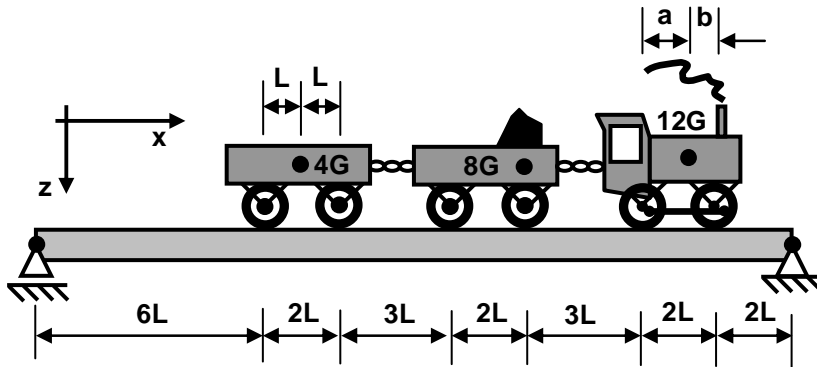


Abbildung 4.31: Zerlegung des Bauteils aus Abbildung 4.28 in gerade Balken und innere Kräfte und Momente

Aufgaben zu Kapitel 4.5

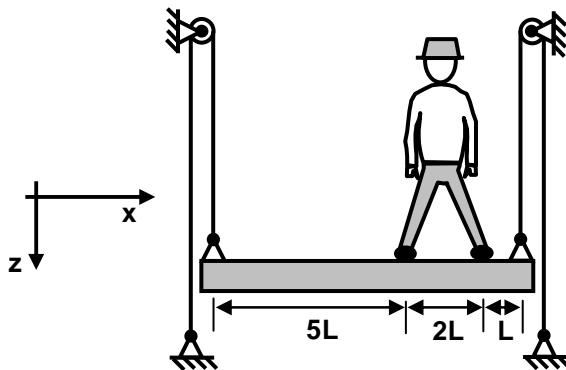
Aufgabe 4.5.1

Es gilt $a/b = 2$. Die Schaubilder der Querkraft und des Biegemoments sind zu bestimmen (Lösung: $M_{\max} = 67GL$).



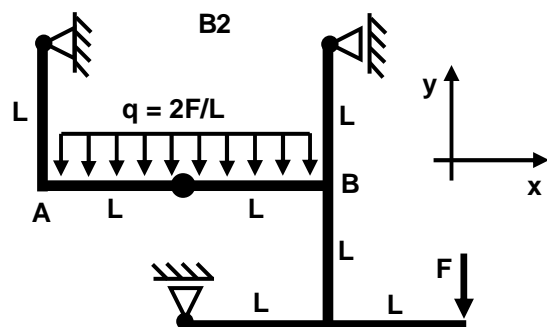
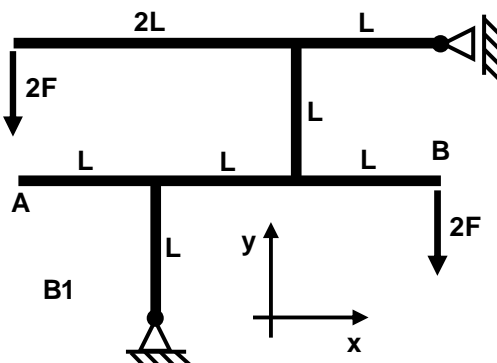
Aufgabe 4.5.2

Das Modell stellt einen vereinfachten Aufzug dar. Die Gewichtskraft des waagrechten, grauen Aufzugsbodens beträgt $8G$, welche als konstante Streckenlast zu betrachten ist. Der Mann besitzt die mittige Gewichtskraft $4G$, an seinen Füßen werden nur senkrechte Kräfte übertragen. Der Verlauf der Querkraft und des Biegemoments im Aufzugsboden ist anzugeben (Lösung: $M_{\max} = 12.5LG$).



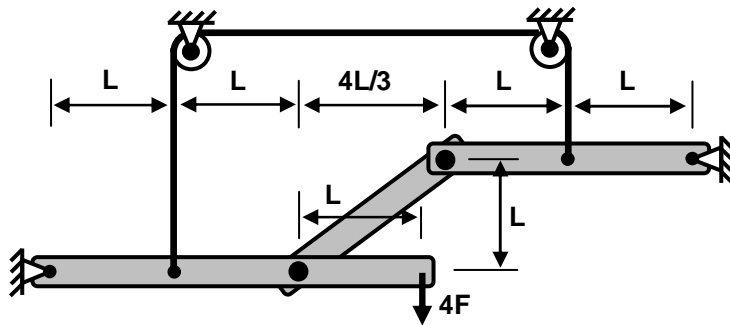
Aufgabe 4.5.3

Die inneren Kräfte und Momente in den Balken AB der ebenen Geometrien sind gesucht (Lösung: $M_{\max, B1} = 3LF$, $M_{\max, B2} = 10LF$).

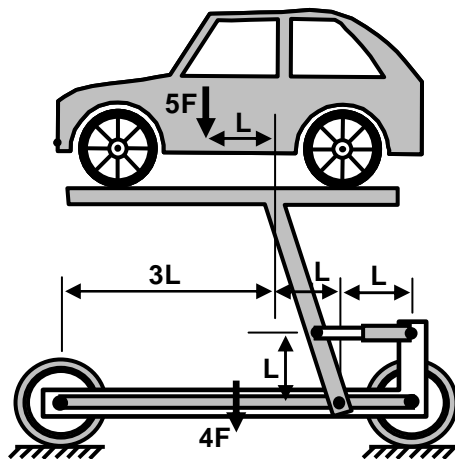


Aufgabe 4.5.4

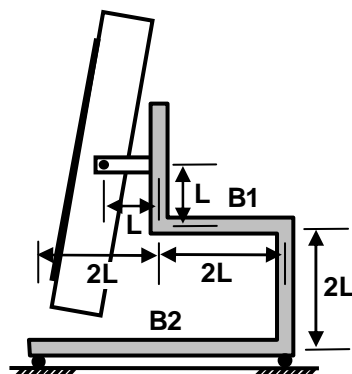
Die inneren Kräfte und Momente im unteren waagrechten Balken der Länge $3L$ sind gesucht
(Lösung: $M_{\max} = -5LF$)

**Aufgabe 4.5.5**

Die Hebebühne wird durch das Fahrzeuggewicht $5F$ und durch die Gewichtskraft $4F$ des waagrechten Balkens der Länge $5L$, welche als Streckenlast zu berücksichtigen ist, belastet. Zu bestimmen sind die inneren Kräfte und Momente im unteren, waagrechten Balken der Länge $5L$ (Lösung: $M_{\max} = 17.6LF$).

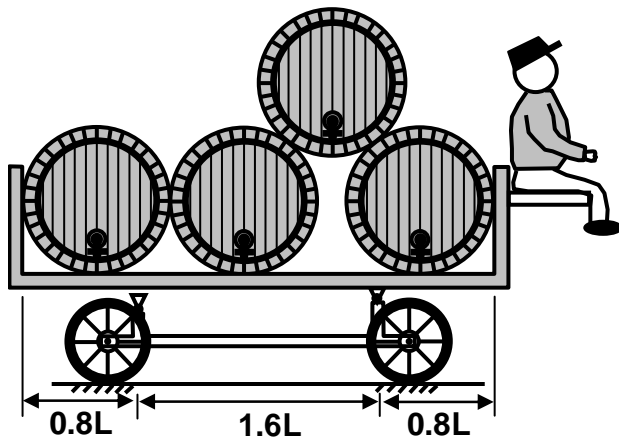
**Aufgabe 4.5.6**

Der graue Rahmen eines Computerbildschirmes soll untersucht werden. Der Rahmen hat eine zu vernachlässigende Gewichtskraft. Der Bildschirm hat die Gewichtskraft G , die am Aufhängungspunkt des Bildschirms wirksam ist. Gesucht sind die Verläufe des inneren Biegemoments in den beiden waagrechten Balken B1 und B2 (Lösung $M_{\max, B1} = -3LG$, $M_{\max, B2} = 3LG$).

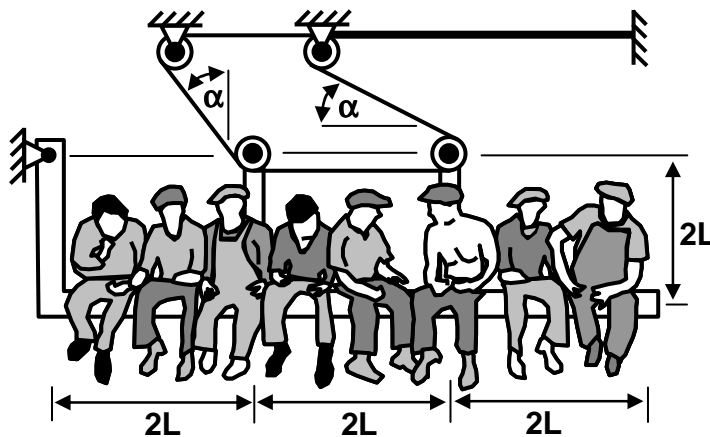


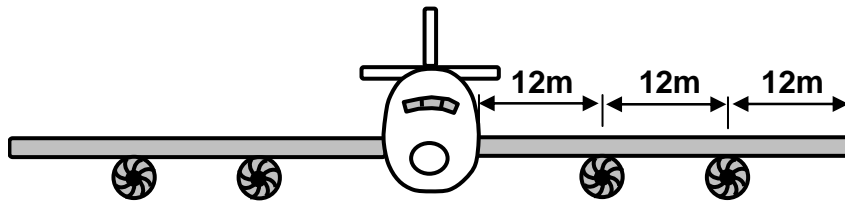
Aufgabe 4.5.7

Die vier Fässer des Bierwagens haben jeweils die Gewichtskraft $80G$ und den Radius $L/2$. Alle anderen Gewichtskräfte sind zu vernachlässigen. Zwischen den Fässern können nur Kräfte übertragen werden, die senkrecht auf den Fässern stehen. Wie groß ist das maximale Biegemoment im waagrechten grauen Balken der Länge $3.2L$ (Lösung: $M_{\max} = -51LG$)?

**Aufgabe 4.5.8**

Die Männer sitzen auf einem Balken der Länge $6L$, der fest mit den drei senkrechten Balken der Länge $2L$ verbunden ist. Die acht auf dem Balken sitzenden Männer haben jeweils die Gewichtskräfte $75G$, die als konstante Streckenlast über der gesamten Balkenlänge zu betrachten sind ($\tan\alpha = 3/4$). Die Querkraft und das Biegemoment im Balken der Länge $6L$ ist gesucht (Lösung: $M_{\max} = 12LG$).

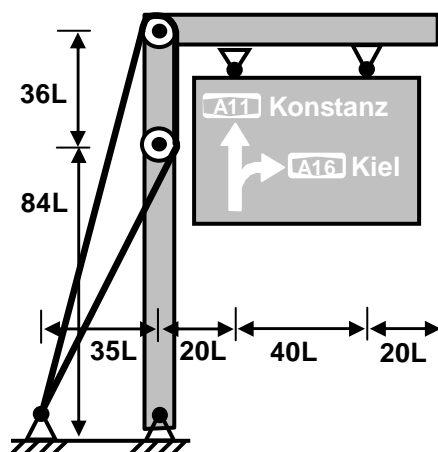


Aufgabe 4.5.9

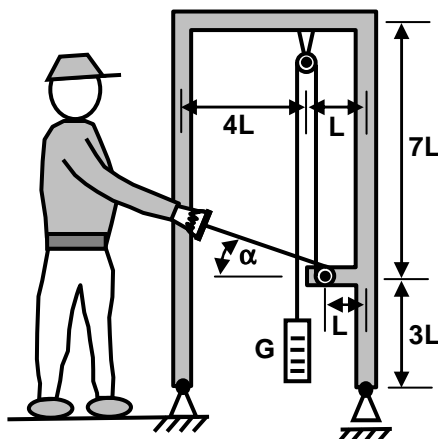
Beim dargestellten Airbus A380 hat jeder Flügel die Masse 90t (90 Tonnen) und die Turbinen jeweils 10t. Der Rest hat eine Gesamtmasse von 176t. Infolge der Auftriebskraft, die nur an den Flügeln wirksam ist, ist das Flugzeug im senkrechten Gleichgewicht (Erdbeschleunigung $g = 10\text{m/s}^2$). Die Gewichtskraft der Flügel und die Auftriebskraft sind als konstante Streckenlast zu betrachten. Der Verlauf des Biegemoments im rechten Flügel ist gesucht (Lösung: $M(x = 24\text{m}) = 2160\text{kNm}$).

Aufgabe 4.5.10

Das innere Biegemoment auf Höhe der unteren Rolle im grauen Balken ist gesucht. Das Schild hat die einzige zu beachtende Gewichtskraft 2142G (Lösung: $M_{\text{untere Rolle}} = -72576LG$).

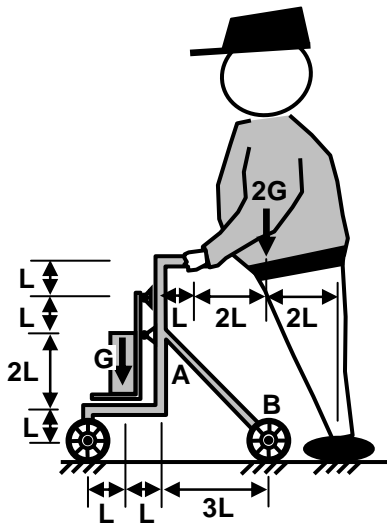
**Aufgabe 4.5.11**

Der Mann trainiert an der dargestellten Kraftmaschine. Die Durchmesser der beiden reibungsfreien Rollen, über welche ein Seil läuft, sind zu vernachlässigen. Für den Winkel gilt $\tan\alpha = 0.75$. Die inneren Kräfte und Momente im waagrechten Balken sind zu bestimmen (Lösung: $|M_{\text{min}}| = 5.76LG$).



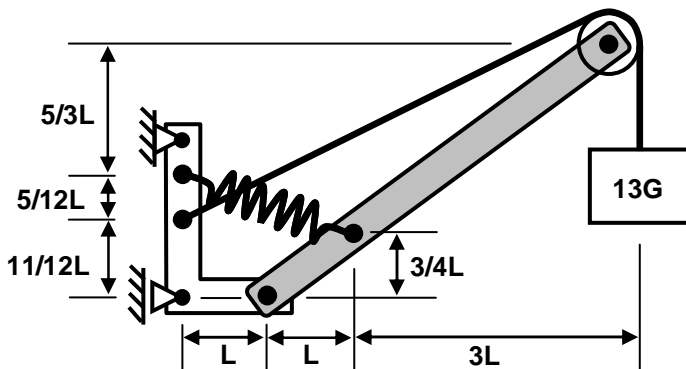
Aufgabe 4.5.12

Die Hand des Mannes überträgt nur senkrechte Kräfte. Welchen Verlauf haben die inneren Kräfte und Momente im diagonalen Balken AB (Lösung: $Q_{\max} = 0.5657LG$, $M_{\max} = 2.4LG$)?



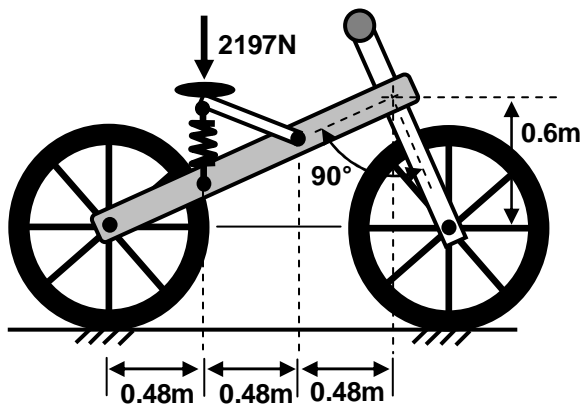
Aufgabe 4.5.13

Wie groß sind maximale Querkraft und das maximale Biegemoment im grauen Balken (Lösung: $|M_{\max}| = 27LG$)?



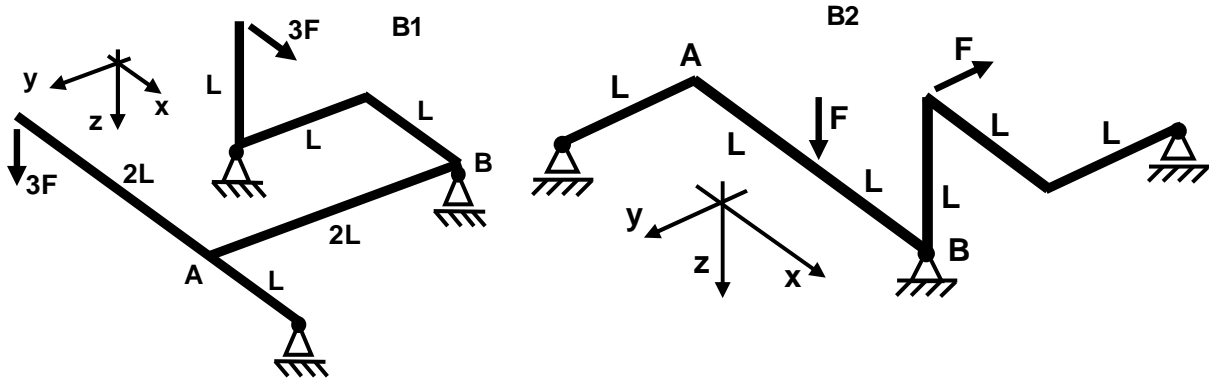
Aufgabe 4.5.14

Die inneren Kräfte und Momente im grauen Balken sind zu bestimmen (Lösung: $M_{\max} = 755.04Nm$).



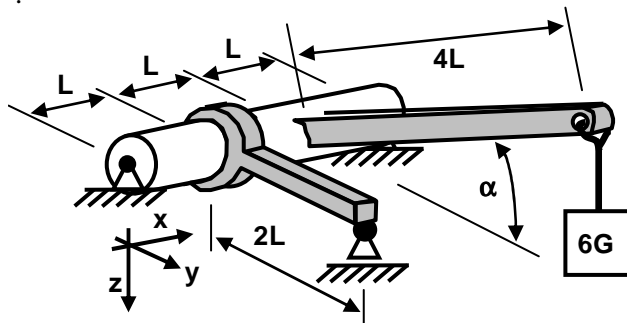
Aufgabe 4.5.15

Die inneren Kräfte und Momente in den Balken AB sind gesucht (Lösung: $|M_{\max, B1}| = 4LF$, $M_{\max, B2} = 3LF$).



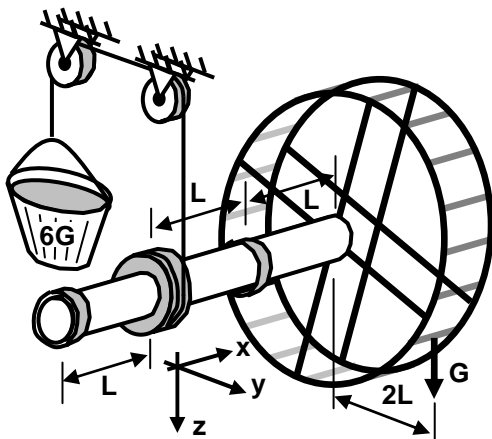
Aufgabe 4.5.16

Die inneren Kräfte und Momente in der weißen Welle sind gesucht ($\cos\alpha = 3/4$) (Lösung: $|M_{\max}| = 4LG$, $M_{t, \max} = 18LG$).



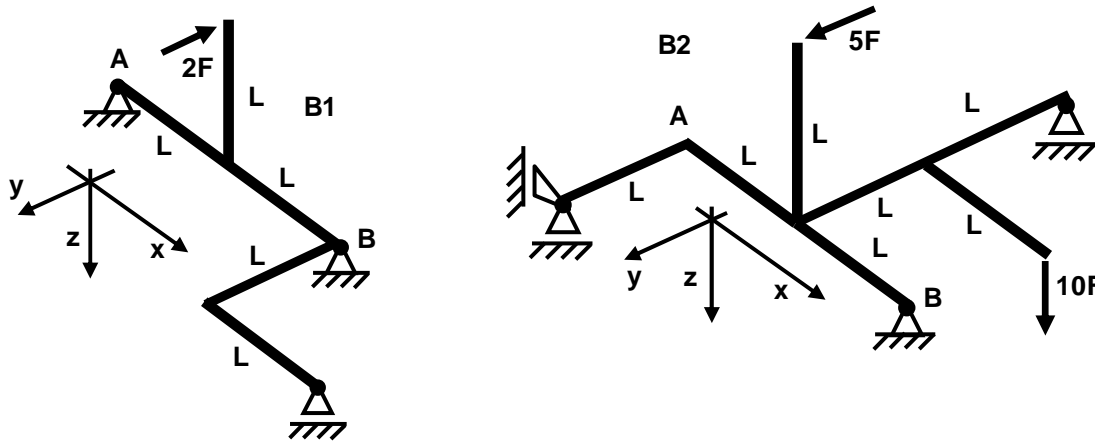
Aufgabe 4.5.17

Der Laufradkran ist im Gleichgewicht. Die Länge des Laufrades in x-Richtung ist zu vernachlässigen. Der Eimer mit der Gewichtskraft $6G$ hängt am Seil. Nur senkrechte Kräfte sind zu berücksichtigen. Zu bestimmen sind die inneren Kräfte und Momente in der Welle (Lösung: $|M_{\max}| = 4LG$).



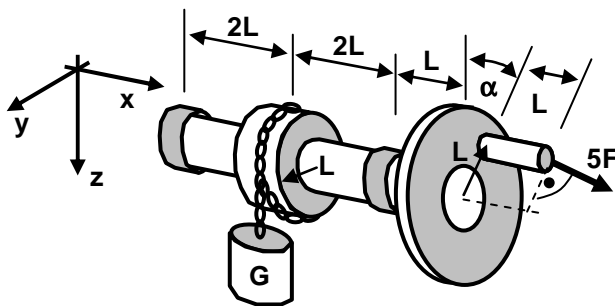
Aufgabe 4.5.18

Die inneren Kräfte und Momente in den Balken AB sind gesucht (Lösung: $|M_{y_{\max}, B1}| = 2LF$, $M_{y_{\max}, B2} = 9LF$).



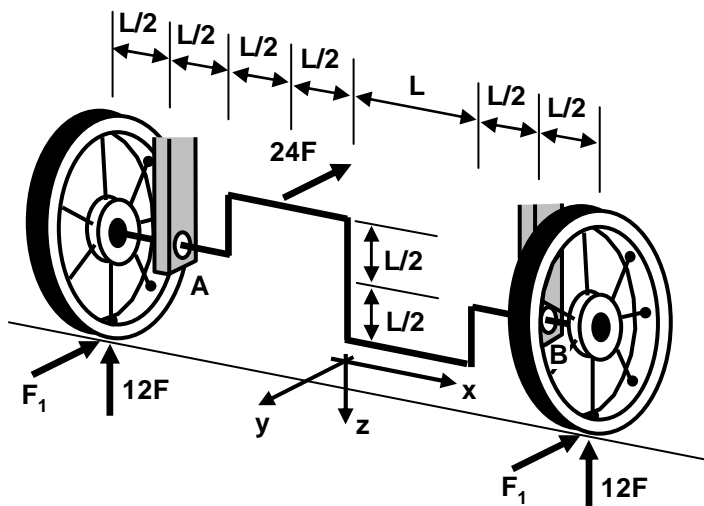
Aufgabe 4.5.19

Das Bauteil ist im Gleichgewicht. Es sei $\tan\alpha = 0.75$. Die inneren Kräfte und Momente in der weißen Welle sind zu berechnen (Lösung: $M_{y_{\max}} = 3LF$, $M_{z_{\max}} = 4LF$).



Aufgabe 4.5.20

Die Lager A und B der Vorderachse eines Tretautos können nur Kräfte in y- und z-Richtung aufnehmen. Die Räder haben die Radien L. Wie groß sind die inneren Kräfte und Momente im Teilbalken der Länge L, auf welchen die Kraft 24F wirkt (Lösung: $M_{y_{\max}} = 6LF$, $M_{z_{\max}} = 13LF$)?



5. Reibung

Ein Bauteil mit der Gewichtskraft G liegt wie in Abbildung 5.1 dargestellt auf einer rauhen Unterlage. Der Begriff „rau“ deutet vorhandene Reibung an. Alternativ spricht man von einer glatten Unterlage.

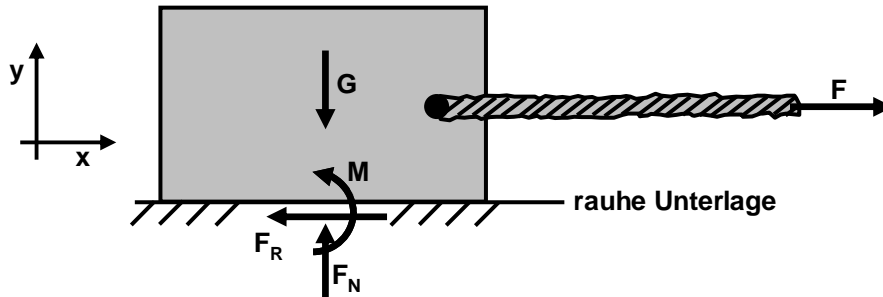


Abbildung 5.1: Kräfte an einem Bauteil auf rauher, reibungsbehafteter Unterlage

Zieht man seitlich mit einer wachsenden Kraft F , so bleibt das Bauteil so lange in Ruhe, bis die Kraft F einen Grenzwert F_0 erreicht. Solange das Bauteil in Ruhe ist, muss neben der senkrechten **Normalkraft** F_N eine waagrechte Kraft F_R wirksam sein, die **Haftreibungskraft** bezeichnet wird und die das Bauteil im Kräftegleichgewicht hält. Ebenso ist ein Moment M wirksam. Dieses muss jedoch bei der Untersuchung der Reibung nicht betrachtet werden. Das bedeutet, dass für $F \leq F_0$ ein waagrechtes und ein senkrecht Kräftegleichgewicht aufgestellt werden kann.

$$\sum F_x = 0: \quad -F_R + F = 0 \quad \Rightarrow \quad F_R = F$$

$$\sum F_y = 0: \quad -G + F_N = 0 \quad \Rightarrow \quad F_N = G$$

Für $F = F_0$ erreicht die Reibkraft F_R ihren Maximalwert F_{R0} . Die **Coulombsche Reibung** geht davon aus, dass die **maximale Haftreibungskraft** F_{R0} proportional zur Normalkraft F_N ist, die immer senkrecht zur Unterlage zeigt.

$$F_{R0} = \mu_0 F_N$$

Die Proportionalitätskonstante wird als **Haftreibungskoeffizient** μ_0 bezeichnet. Dieser hängt von der Rauheit der sich berührenden Flächen ab. Wird $F > F_0$, beginnt sich das Bauteil zu bewegen. Es wirkt dann keine Haftreibungskraft sondern nur noch eine Gleitreibungskraft F_G , die die Bewegung behindern aber nicht verhindern kann. Diese Kraft ist nach Coulomb auch proportional zur Normalkraft. Die Proportionalitätskonstante wird als Gleitreibungskoeffizient μ_G bezeichnet.

$$F_G = \mu_G F_N$$

Materialpaarung	Haftreibungskoeffizient μ_0		Gleitreibungskoeffizient μ_G	
	trocken	geschmiert	trocken	geschmiert
Stahl auf Stahl	0.15 – 0.3	0.1	0.1	0.01 – 0.07
Gummi auf Asphalt	0.8	0.2	0.5	0.1

Abbildung 5.2: Haftreibungs- und Gleitreibungskoeffizienten (Richtwerte)

Im Folgenden wird nur die Haftreibungskraft betrachtet. Besteht keine Verwechslungsgefahr, wird statt F_{R0} nur F_R und statt μ_0 nur μ verwendet.

$$F_R = \mu F_N$$

Der Haftreibungskoeffizient μ kann gemäß Abbildung 5.3 an einer schiefen Ebene bestimmt werden. Anfänglich ist das Bauteil mit der Gewichtskraft G im Gleichgewicht. Vergrößert man den Neigungswinkel α , erreicht man einen Grenzwinkel α_0 , bei welchem das Bauteil noch in Ruhe bleibt. Bei jedem größeren Winkel α würde das Bauteil die Schräge hinabrutschen. Der Tangens dieses Grenzwinkels α_0 entspricht dem Haftreibungskoeffizient μ .

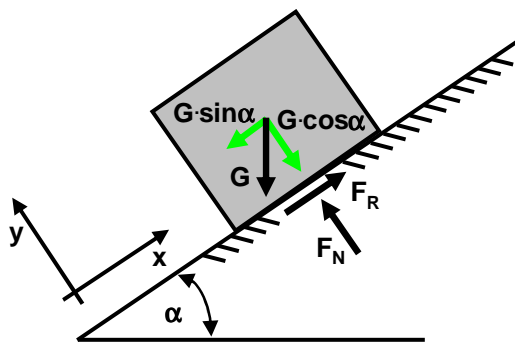


Abbildung 5.3: Bauteil auf schiefer Ebene zur Bestimmung von μ

$$\sum F_x = 0: \quad F_R - G \sin \alpha_0 = 0$$

$$\sum F_y = 0: \quad F_N - G \cos \alpha_0 = 0$$

$$\text{Haftreibung:} \quad F_R = \mu F_n \quad \Rightarrow \quad G \sin \alpha_0 = \mu G \cos \alpha_0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \tan \alpha_0$$

Eine Anwendung der Coulombschen Reibung ist die sogenannte **Seil- oder Riemenreibung**. Verläuft wie in Abbildung 5.4, links dargestellt ein Seil über eine Rolle, auf welche auch ein Moment M einwirkt, so kann man feststellen, dass die beiden Kräfte F_1 und F_2 nicht identisch sind, da durch das Moment die freie Drehbarkeit der Rolle beeinträchtigt ist. Der Winkel α beschreibt den Bereich, in welchem das Seil auf der Rolle aufliegt. Laut Definition sei $F_2 > F_1$. Bei einem gegebenen F_1 ist die maximale Kraft F_2 gesucht, ohne dass das Seil über die Rolle „rutscht“.

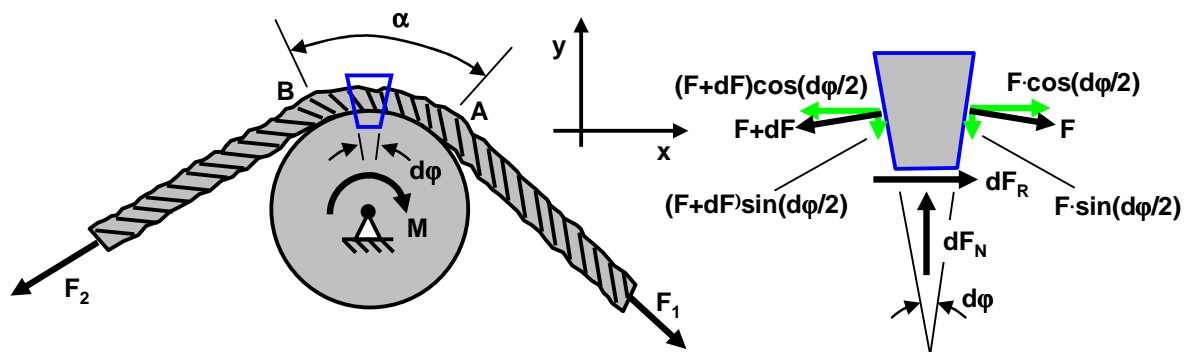


Abbildung 5.4: Geometrie zur Bestimmung der Seilreibungsgleichung

Schneidet man einen kleinen Ausschnitt des Seils, dessen Länge durch den Winkel $d\varphi$ definiert ist, frei, so müssen die in Abbildung 5.4, rechts dargestellten Schnittkräfte angebracht werden. An der rechten Schnittfläche wirkt von dem entfernten Seil die noch unbekannte Kraft F . Ebenso wirkt an der linken Schnittfläche die Kraft $F+dF$. Die Wirkung der entfernten Rolle wird durch die Normalkraft dF_N und die Haftreibungskraft dF_R beschrieben.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0: \quad & -(F + dF)\cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + F\cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + dF_R = -dF\cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + dF_R \\ & = -dF + dF_R = 0 \qquad \Rightarrow \quad dF_R = dF \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0: \quad & -(F + dF)\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - F\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + dF_N = -2F\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + dF\sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + dF_N \\ & = -2F\frac{d\varphi}{2} + dF\frac{d\varphi}{2} + dF_N = -Fd\varphi + dF_N = 0 \qquad \Rightarrow \quad dF_N = Fd\varphi \end{aligned}$$

$$\text{Haftreibung:} \quad dF_R = \mu dF_N \qquad \Rightarrow \quad dF = \mu F d\varphi \qquad \Rightarrow \quad \frac{dF}{F} = \mu d\varphi$$

Die resultierende Gleichung der Haftreibung wird vom Punkt A ($\varphi = 0, F = F_1$), wo das Seil auf die Rolle trifft, bis zum Punkt B ($\varphi = \alpha, F = F_2$), an dem das Seil die Rolle verlässt, integriert.

$$\int_{F_1}^{F_2} \frac{dF}{F} = \int_0^\alpha \mu d\varphi \qquad \Rightarrow \quad [\ln F]_{F_1}^{F_2} = [\mu\varphi]_0^\alpha \qquad \Rightarrow \quad \ln F_2 - \ln F_1 = \ln \frac{F_2}{F_1} = \mu\alpha$$

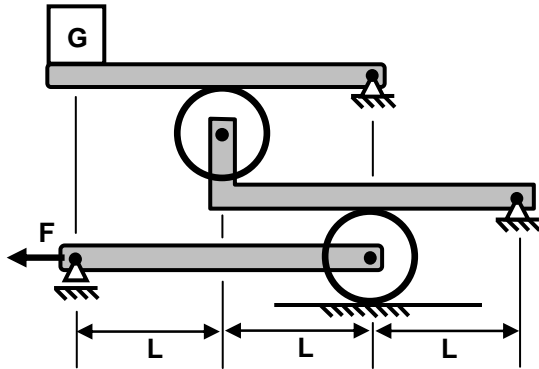
Exponiert man beide Seiten der Gleichung $\ln(F_2/F_1) = \mu\alpha$, so erhält man die gesuchte Seilreibungsgleichung.

$$\exp\left(\ln \frac{F_2}{F_1}\right) = \exp(\mu\alpha) \qquad \Rightarrow \quad \frac{F_2}{F_1} = e^{\mu\alpha} \qquad \text{bzw.} \quad \boxed{F_2 = F_1 e^{\mu\alpha}}$$

Aufgaben zu Kapitel 5

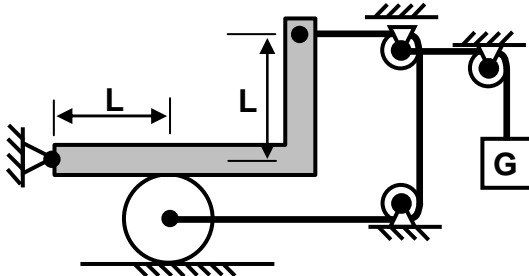
Aufgabe 5.1

Zwischen den Rollen und den Balken bzw. dem Boden wirkt der Haftreibungskoeffizient $\mu = 1$. Wie groß muss G in Abhängigkeit von F mindestens gewählt werden, damit das Bauteil in Ruhe bleibt (Lösung: $G = F/8$)?



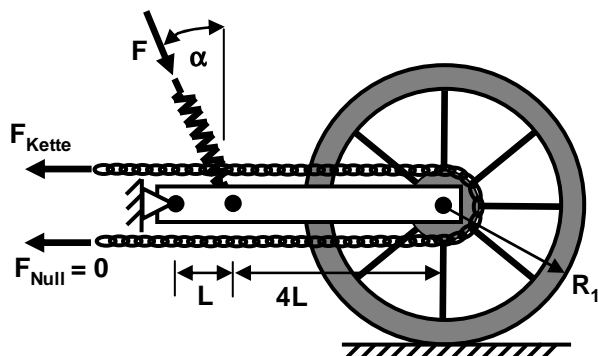
Aufgabe 5.2

Zwischen Walze und Boden bzw. grauem Hebel ist der Haftreibungskoeffizient μ wirksam. Wie groß muss μ mindestens sein, damit das Bauteil im statischen Gleichgewicht bleibt (Lösung: $\mu = 0.5$)?



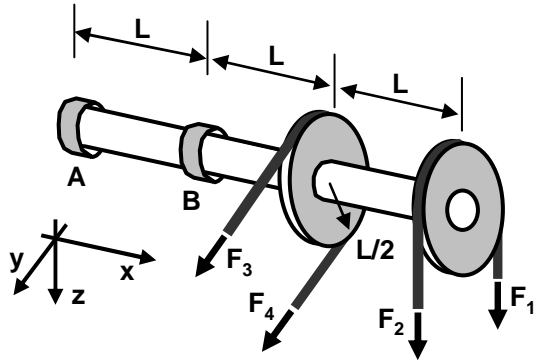
Aufgabe 5.3

Es sei $\tan \alpha = 0.75$, das Kettenrad hat den Radius R_2 mit $R_1/R_2 = 4$. Zwischen Strasse und Rad wirkt der Haftreibungskoeffizient $\mu = 1$. Wie groß darf F_{Kette} maximal werden, damit das Bauteil im Gleichgewicht bleibt? Wie groß sind dann die inneren Kräfte und Moment in der Schwinge (Lösung: $|N_{\text{max}}| = 0.8F$)?



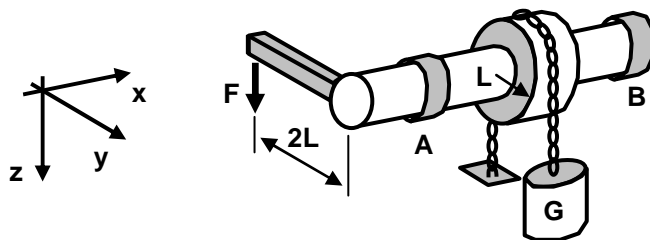
Aufgabe 5.4

Die Lager A und B können nur Kräfte in y- und z-Richtung aufnehmen. Zwischen den Riemen und den Rädern wirkt der Haftreibungskoeffizient $\mu = \ln 4/\pi$. Im letzten Drittel der Welle wird ein Torsionsmoment $M_t = 3LF$ übertragen. Gesucht sind die inneren Kräfte und Momente in der Welle (Lösung: $|M_{y\max}| = 20LF$, $M_{z\max} = 10LF$).



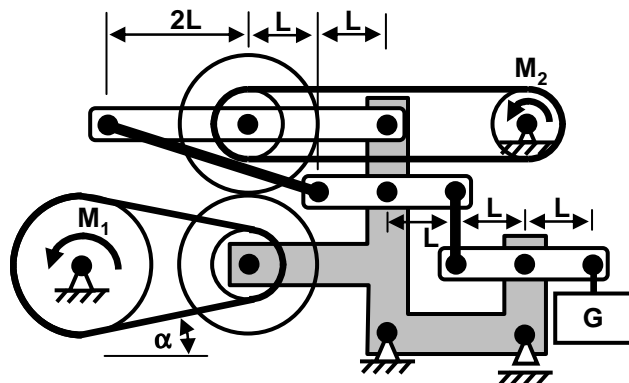
Aufgabe 5.5

Die Lager A und B können nur Kräfte in y- und z-Richtung aufnehmen. Zwischen Kette und Rolle wirkt der Haftreibungskoeffizient $\mu = \ln 9/(2\pi)$. Wie groß muss G mindestens sein, dass das Bauteil im Gleichgewicht sein kann (Lösung: $G = 3F$)?



Aufgabe 5.6

Beim dargestellten Momentbegrenzer mit $M_1 = 400LF$ haben die Räder die Radien L oder L/2. Zwischen den Rädern wirkt der Haftreibungskoeffizient $\mu_R = 1$. Für die Riemenreibung ist der Koeffizient $\mu_S = 0.6253$ zu verwenden ($\tan \alpha = 7/24$). Das Bauteil soll im Gleichgewicht bleiben. Wie groß muss G mindestens sein? Wie groß ist dann M_2 (Lösung: $G = 100F$, $M_2 = 200LF$)?



6. Spannungen und Dehnungen

Als Spannungen werden Kräfte bezeichnet, die auf die Flächen bezogen sind, an denen sie wirksam sind. Sie haben die Einheit $[N/mm^2]$. Jedes Material hat eine charakteristische Spannung, bis zu welcher es einer Belastung standhalten kann bzw. es nicht versagt. Dehnungen beschreiben das Verhältnis einer bei einer Belastung auftretenden Verformung zu einer ursprünglichen, unbelasteten Länge. Somit besitzt die Dehnung keine Dimension $[mm/mm]$. Ein Materialgesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen den Spannungen und Dehnungen und besitzt für jedes Material einen charakteristischen Verlauf.

6.1 Spannungen

Stellvertretend für alle Bauteile soll ein kreisrundes Rohr mit dem Außenradius R_a und dem Innenradius R_i betrachtet werden. Die beiden Radien können auch durch den mittleren Radius R_m und der Wandstärke s beschrieben werden. Man setzt voraus, dass die Wandstärke s viel kleiner als der mittlere Radius R_m ist und bezeichnet dadurch den Querschnitt des Bauteils als **dünnwandig**. Das Rohr unterliegt einer beliebigen Belastung, welche in Abbildung 6.1 nicht eingezeichnet ist.

$$R_m = \frac{R_a + R_i}{2} \quad \text{und} \quad s = R_a - R_i \quad \text{mit} \quad s \ll R_m$$

Die in Abbildung 6.1 gestrichelt dargestellte Linie, die den Abstand R_m vom Koordinatenursprung beschreibt, wird als **Profilmittellinie** bezeichnet. u bezeichnet die Koordinate in Umfangsrichtung.

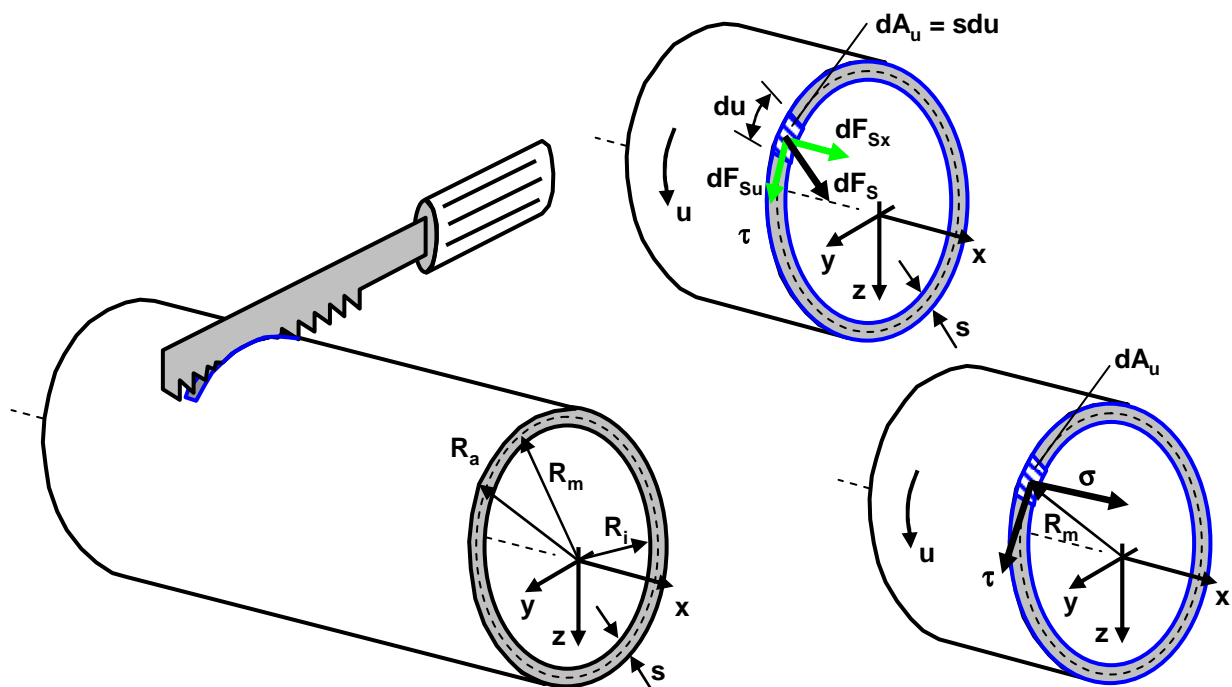


Abbildung 6.1: Dünnwandiges Rohr mit freigeschnittenem positiven Schnittufer zur Betrachtung der Spannungen

Das Rohr aus Abbildung 6.1, links wird senkrecht zur x -Achse geschnitten. Am linken Teil des Rohres entsteht, wie in Abbildung 6.1, Mitte dargestellt, ein positives Schnittufer, welches in kleine Teilflächen $dA_u = s du$ zerlegt werden kann. Der Einfluss des entfernten rechten Teils innerhalb einer Teilfläche dA_u auf den linken Teil wird durch die kleine Schnittkraft dF_S beschrieben. Aufgrund der Dünn-

wandigkeit kann angenommen werden, dass die radiale Komponente dieser Kraft vernachlässigbar klein ist. Daher wird die Kraft dF_s nur in die Komponenten dF_{sx} in x-Richtung und dF_{su} in u-Richtung zerlegt. Es entsteht ein ebener Kräftezustand in der xu-Ebene. Die beiden Kräfte werden durch den Inhalt der Fläche dA_u geteilt.

$$\sigma = \frac{dF_{sx}}{dA_u} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{dF_{su}}{dA_u}$$

Die resultierenden Größen σ und τ werden Spannungen genannt. Wie in Abbildung 6.1, rechts dargestellt wirkt σ senkrecht auf der Fläche dA_u und wird als **Normalspannung** bezeichnet. τ steht tangential zur Fläche dA_u und wird als **Schubspannung** bezeichnet. Die in der xu-Ebene liegenden Spannungen kennzeichnen einen ebenen Spannungszustand.

Die Spannungen in allen Teilflächen dA_u müssen so gewählt sein, dass das Bauteil im Gleichgewicht ist. Bildet man aus den Spannungen Teilkräfte, indem man die Spannungen mit der Fläche dA_u multipliziert, kann man die resultierenden Kräfte und resultierenden Momente bezüglich der drei Koordinatenachsen bilden. Diese resultierenden Werte müssen solche Werte annehmen, dass das Bauteil im Gleichgewicht ist. Sie erfüllen somit die gleichen Bedingungen wie die inneren Kräfte und Momente und sind daher mit diesen identisch. Da die Teilflächen dA_u unendlich klein sind und ihre Anzahl unendlich groß, haben die einzelnen Summen unendlich viele Terme, wodurch sie durch Integrale über der Querschnittsfläche A dargestellt werden.

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA_u & Q_z &= \int_A \tau_z dA_u & Q_y &= \int_A \tau_y dA_u \\ M_t &= \int_A R_m \tau dA_u & M_y &= \int_A z \sigma dA_u & M_z &= -\int_A y \sigma dA_u \end{aligned}$$

Die Schubspannungen τ_y und τ_z sind die Komponenten der Schubspannung τ in y und z-Richtung. Das negative Vorzeichen bei M_z muss eingeführt werden, damit die Vorzeichenregeln an den Schnittufern erfüllt werden.

Im weiteren Verlauf soll diese Vorgehensweise auf beliebige Querschnitte übertragen werden, deren Teilflächen mit dA bezeichnet werden. Der ebene Spannungszustand wird weiterhin vorausgesetzt.

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA & Q_z &= \int_A \tau_z dA & Q_y &= \int_A \tau_y dA \\ M_t &= \int_A r_s \tau dA & M_y &= \int_A z \sigma dA & M_z &= -\int_A y \sigma dA \end{aligned}$$

Die Schubspannung τ steht tangential zur Profilmittellinie. Der Radius r_s beschreibt gemäß Abbildung 6.2 den wirksamen Hebelarm der Kraft τdA . Bei einem dünnwandigen Kreisprofil ist er identisch zum Radius $r = R_m$, nicht aber im Allgemeinen.

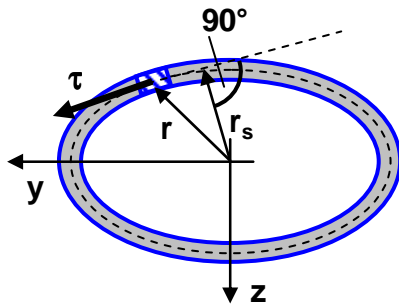


Abbildung 6.2: Definition des Hebelarms von τdA an einem beliebigen Querschnitt.

Für weitere Untersuchungen der Spannungen wird aus dem bereits betrachteten Rohr, wie in Abbildung 6.3 dargestellt, ein kleines Rechteck mit der Kantenlänge dx in x -Richtung und du in Umfangsrichtung u herausgeschnitten.

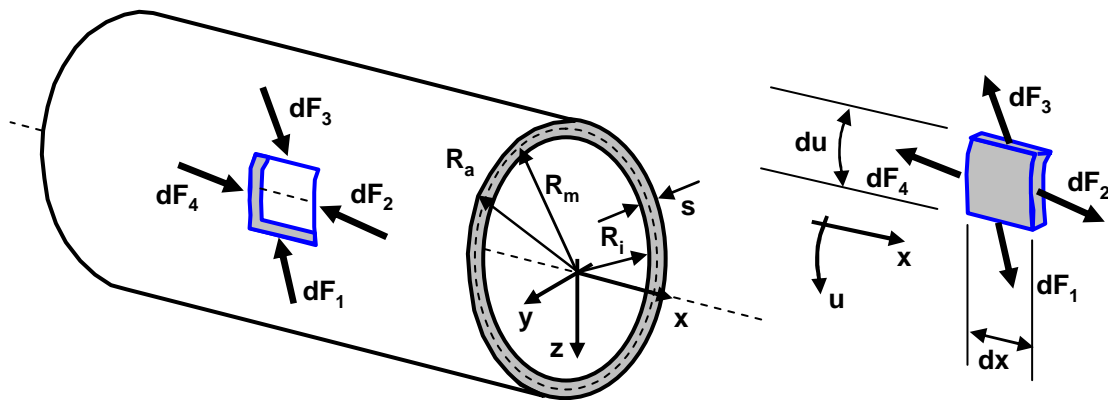


Abbildung 6.3: Dünnwandiges Rohr mit freigeschnittenem kleinen Rechteck zur Betrachtung der Spannungen

An den vier Schnittflächen werden jeweils die kleinen wirksamen Kräfte dF_1 bis dF_4 eingezeichnet. Die beiden Schnittflächen 1 und 2 sind positive Schnittufer. Daher zeigen die Schnittkräfte dF_1 und dF_2 in die positiven Koordinatenrichtungen. Entsprechend sind die Flächen 3 und 4 negative Schnittufer, weshalb die Kräfte dF_3 und dF_4 in die negativen Koordinatenrichtungen zeigen. Die Dünnwandigkeit hat wieder zur Folge, dass die radialen Komponenten der Kräfte gegenüber den anderen beiden Komponenten vernachlässigbar klein sind.

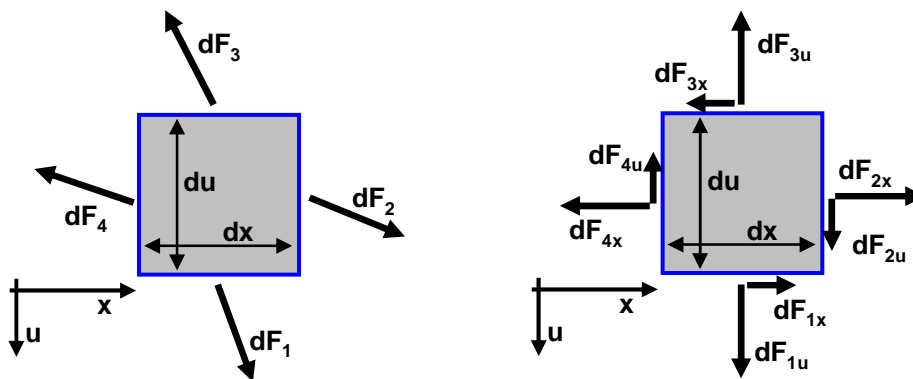


Abbildung 6.4: Freigeschnittenes in die Ebene projiziertes Rechteck mit Schnittkräften

Somit kann das zu betrachtende Rechteck wie in Abbildung 6.4, links in die xu -Ebene projiziert werden. Es entsteht ein ebener Kräftezustand. Das bedeutet auch, dass die daraus aufbauenden Betracht-

tungen auf jeden ebenen Spannungszustand übertragbar sind. Die Kräfte werden in ihre Komponenten in x- und u-Richtung zerlegt. Die Kraftkomponenten werden durch die Schnittflächen $dA_x = sdx$ und $dA_u = sdu$, an denen sie angreifen, geteilt.

$$\sigma_{1,3} = \frac{dF_{1,3u}}{dA_x} \quad \text{und} \quad \tau_{1,3} = \frac{dF_{1,3x}}{dA_x}$$

$$\sigma_{2,4} = \frac{dF_{2,4x}}{dA_u} \quad \text{und} \quad \tau_{2,4} = \frac{dF_{2,4u}}{dA_u}$$

Die dabei resultierenden Spannungen stehen senkrecht auf der Fläche oder tangential. Die senkrecht stehenden werden als **Normalspannungen** σ und die tangentialen als **Schubspannungen** τ bezeichnet.

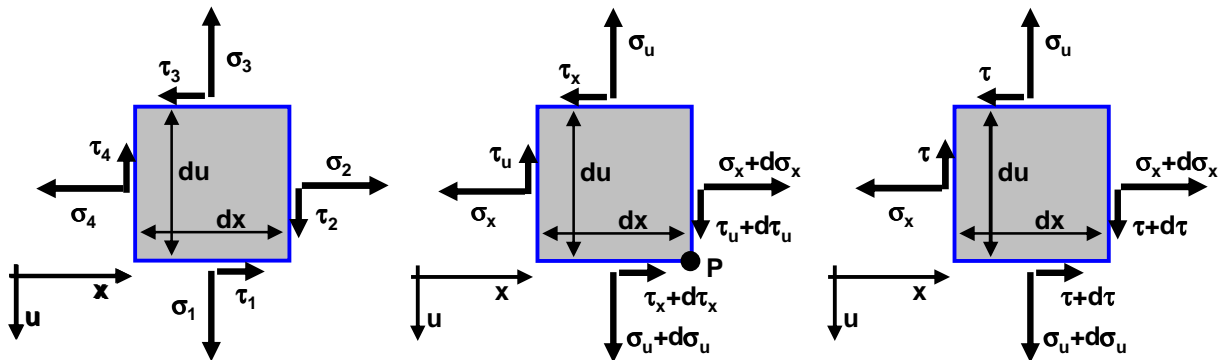


Abbildung 6.5: Freigeschnittenes in die Ebene projiziertes Rechteck mit Normal- σ und Schubspannungen τ

Die Spannungen an den negativen Schnittufern werden, wie in Abbildung 6.5 dargestellt, umbenannt.

$$\sigma_4 = \sigma_x \quad \text{und} \quad \tau_4 = \tau_u$$

$$\sigma_3 = \sigma_u \quad \text{und} \quad \tau_3 = \tau_x$$

Entlang der kleinen Kantenlängen dx und du des Rechtecks können sich die Spannungen nicht stark ändern. Daher können die Spannungen an den positiven Schnittufern durch die Spannungen an den negativen plus kleine Veränderungen beschrieben werden.

$$\sigma_1 = \sigma_u + d\sigma_u \quad \text{und} \quad \tau_1 = \tau_x + d\tau_x$$

$$\sigma_2 = \sigma_x + d\sigma_x \quad \text{und} \quad \tau_2 = \tau_u + d\tau_u$$

Bildet man das Momentengleichgewicht um die untere rechte Ecke P (vgl. Abbildung 6.5, Mitte) des Rechtecks, so kann man $\tau = \tau_x = \tau_u$ setzen.

$$\sum M|_P = 0: \quad \sigma_x s du \frac{du}{2} - (\sigma_x + d\sigma_x) s du \frac{du}{2} - \sigma_u s dx \frac{dx}{2} + (\sigma_u + d\sigma_u) s dx \frac{dx}{2}$$

$$+ \tau_x s dx du - \tau_u s du dx = 0$$

Die Terme mit σ_x und σ_u eliminieren sich gegenseitig. Die verbleibenden Normalspannungsterme sind eine Größenordnung kleiner als die Schubspannungsterme

$$-d\sigma_x s du \frac{du}{2} + d\sigma_u s dx \frac{dx}{2} + \tau_x s dx du - \tau_u s du dx = \tau_x s dx du - \tau_u s du dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \tau_x = \tau_u$$

Es resultiert wie in Abbildung 6.5, rechts eingezeichnet, die übliche Darstellung der Spannungen an einem ebenen kleinen Rechteck. Diese Spannungsverteilung und auch leicht modifiziert die folgenden beiden Bedingungen gelten auch bei variabler Wandstärke s (vgl. Anhang B8).

Bildet man die Kräftegleichgewichte in x - und u -Richtung erhält man zwei weitere Bedingungen, die die Spannungen erfüllen müssen.

$$\sum F_x = 0: \quad -\sigma_x s du + (\sigma_x + d\sigma_x) s du - \tau s dx + (\tau + d\tau) s dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma_x}{dx} = -\frac{d\tau}{du}$$

$$\sum F_u = 0: \quad -\sigma_u s dx + (\sigma_u + d\sigma_u) s dx - \tau s du + (\tau + d\tau) s du = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\sigma_u}{du} = -\frac{d\tau}{dx}$$

Die beim betrachteten Rechteck auftretende Normalspannung σ_x entspricht der Normalspannung σ , wenn man das Rohr senkrecht zur x -Achse schneidet. Die beiden Schubspannungen τ stimmen ebenso überein. Die beim Rechteck auftretende Normalspannung σ_u muss, wenn man nur einen Querschnitt senkrecht zur x -Achse betrachten möchte, vernachlässigbar klein sein.

6.2 Dehnungen

Infolge der Spannungen die an einem Rechteck aus den Abbildungen 6.3 bis 6.5 wirksam sind, kann man beobachten, dass das Rechteck sich, wie in Abbildung 6.6 dargestellt, zu einem Parallelogramm verformt. Das bedeutet, die Positionen der Punkte $ABCD$ werden zu den Lagen $A'B'C'D'$ verschoben. Dabei ändern sich die beiden Kantenlängen und der ursprüngliche rechte Winkel geht verloren.

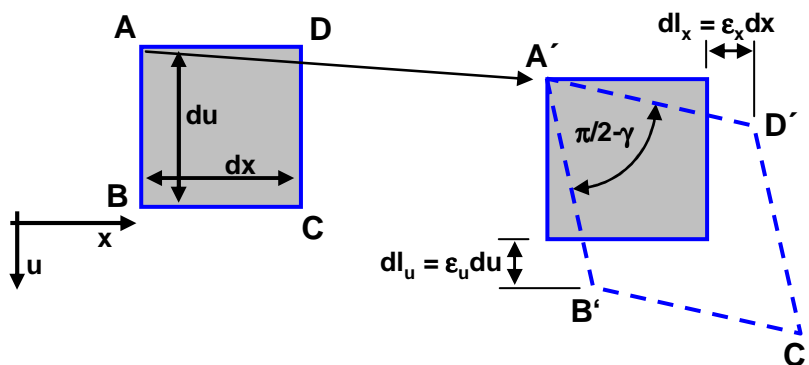


Abbildung 6.6: Infolge der Spannungen verformtes Rechteck

Die Dehnungen ϵ_x und ϵ_u geben an, um welchen Faktor sich die beiden Kanten dx und du in x - und u -Richtung verlängern. Wird vorausgesetzt, dass die Längenänderungen dl_x und dl_u klein gegenüber den Ausgangslängen dx und du sind, können die Dehnungen mit ausreichender Genauigkeit als Quotient der Verlängerung und der Ausgangslängen definiert werden.

$$\epsilon_x = \frac{dl_x}{dx} \quad \text{und} \quad \epsilon_u = \frac{dl_u}{du}$$

Die Winkelverzerrung γ gibt an, wie stark sich der ursprüngliche rechte Winkel $\pi/2$ des Rechtecks verformt. Kann man voraussetzen, dass die Dehnung ϵ_u zu vernachlässigen ist, kann man $\epsilon_x = \epsilon$ schreiben. Die Dehnung in der dritten Raumrichtung ist nicht gleich null, wird aber vernachlässigt.

6.3 Materialgesetz / Hookesches Gesetz

Wie am Anfang von Kapitel 6.1 werden häufig Bauteile betrachtet, bei denen die Normalspannung σ_u zu vernachlässigen und die Dehnung ϵ_u nicht von Interesse ist. Somit müssen nur die beiden Spannungen $\sigma = \sigma_x$ und τ und die Dehnungen $\epsilon = \epsilon_x$ und γ betrachtet werden. Sind die Spannungen unterhalb eines Grenzwertes, so besteht ein linearer Zusammenhang zwischen den Spannungen und Dehnungen. Dieser wird als das **Hookesches Gesetz** bezeichnet.

$$\sigma = E \epsilon$$

und

$$\tau = G \gamma$$

Die beiden Proportionalitätsfaktoren E und G sind Materialparameter und werden **Elastizitätsmodul** bzw. **E-Modul** und **Schubmodul** genannt. Sie haben die Einheit einer Spannung [N/mm²].

Das Hookesche Gesetz ist bis zur sogenannten Fließgrenze (Streckgrenze) gültig. Oberhalb dieser besteht ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung. Mit dem in Abbildung 6.7 dargestellten Spannungs-, Dehnungsdiagramm lässt sich dieser Zusammenhang gut beschreiben. Der Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes ist auch der Bereich, in welchem sich das Material elastisch verhält. Das bedeutet, nach Rücknahme der Belastung geht das Bauteil in seine ursprüngliche Form zurück. Waren Spannungen wirksam, die oberhalb der Fließgrenze liegen, bleibt auch nach Entfernung der Bauteilbelastung eine bleibende plastische Verformung vorhanden.

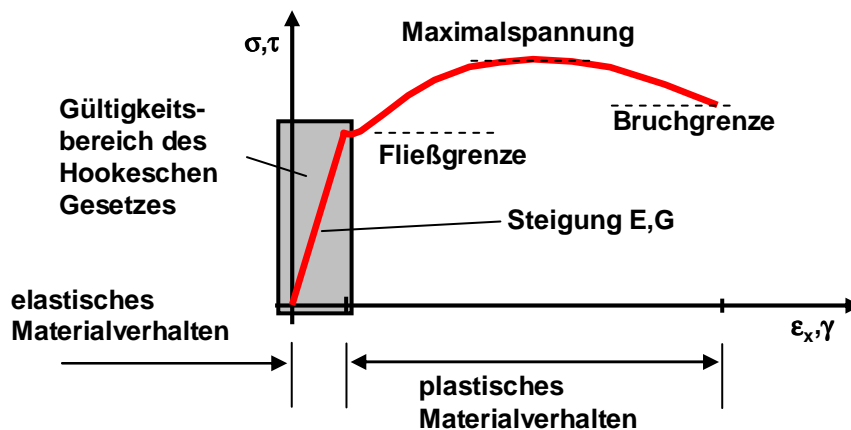


Abbildung 6.7: Spannungs-, Dehnungsdiagramm

Beim Aufzeichnen des Diagramms für σ und ϵ wird eine Zugprobe vermessen, bei der die Querdehnung ϵ_u und die Dehnung in der dritten Raumrichtung vernachlässigt wird. Somit wird die Spannung immer mit dem Ausgangsquerschnitt der Zugprobe bestimmt. Dadurch kann die Bruchspannung, bei welcher die Zugprobe bricht bzw. das zu betrachtende Material vollständig versagt, kleiner wie die Maximalspannung sein. Der Zugversuch ergibt häufig keine eindeutige Fließgrenze. Ersatzweise wird die Grenze bei einer Dehnung $\epsilon = 0.2\%$ angenommen.

	E-Modul	G-Modul	Fließgrenze	Bruchgrenze
Stahl	21000N/mm ²	80000N/mm ²	120-300N/mm ²	300-1800N/mm ²
Aluminium	70000N/mm ²	25000N/mm ²	50-250N/mm ²	150-500N/mm ²

Abbildung 6.8: E-Modul, Schubmodul, Fließgrenze und Bruchspannung (Richtwerte)

Das Hookesche Gesetz kann unter der Voraussetzung, dass in allen Raumrichtungen die gleichen Materialeigenschaften vorhanden sind (isotropes Material), auf einen allgemeinen ebenen Spannungszustand erweitert werden.

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_u) \qquad \epsilon_u = \frac{1}{E}(\sigma_u - \nu\sigma_x) \qquad \gamma = \frac{\tau}{G}$$

Der Parameter ν ist wie E und G ein Materialkoeffizient. Er wird als **Querkontraktionszahl** bezeichnet. Wird ein Stab in einer Raumrichtung auseinandergezogen, wird die Querschnittsfläche eingeschnürt. Die Querkontraktionszahl beschreibt das Verhältnis dieser Längenänderungen quer zum Stab und in Stabrichtung. Sie kann Werte zwischen $-1 < \nu \leq 0.5$ annehmen. Für Stahl und Aluminium kann man näherungsweise 0.3 verwenden. Die Parameter E, G und ν sind nicht voneinander unabhängig.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

6.4 Mohrscher Spannungskreis

Belastet man das Rohr aus Abbildung 6.1 lediglich mit einem Torsionsmoment und markiert wie in Abbildung 6.9, links zwei Rechtecke, so kann man beobachten, dass diese sich unterschiedlich verformen. Beim ursprünglich zur x-Achse parallelen Rechteck bleiben die Kantenlängen unverändert, der rechte Winkel geht verloren. Das bedeutet, an diesem Rechteck können nur Schubspannungen wirksam sein. Das um 45° gedrehte Rechteck behält seinen rechten Winkel. Allerdings ändern sich die Kantenlängen. Daher wirken an diesem Rechteck nur Normalspannungen. Die Spannungen werden immer an den unverformten Rechtecken eingezeichnet.

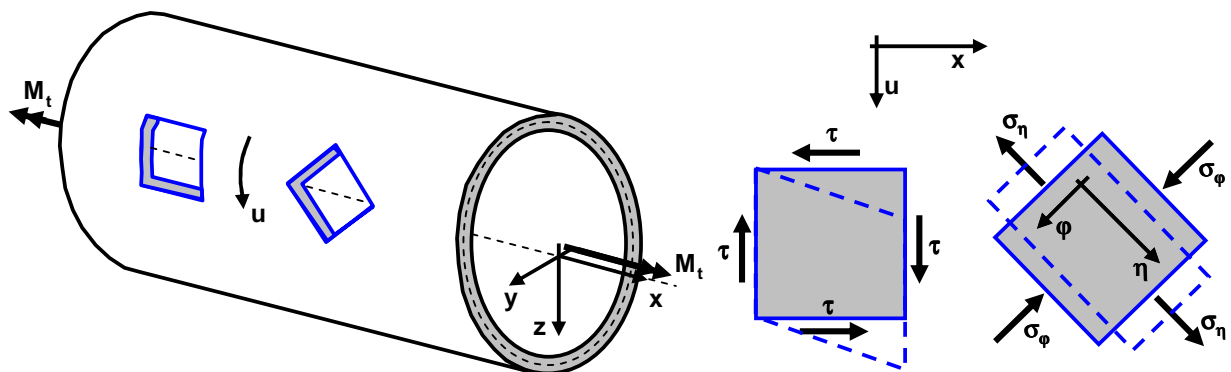


Abbildung 6.9: Spannungsverteilung und Verformungen an freigeschnittenen Rechtecken

Da bei jeder Position des Rechtecks das Torsionsmoment identisch ist und das Materialverhalten unabhängig von der Orientierung des Rechtecks sein muss, bedeutet dies, dass beide Spannungszustände

gleichwertig sein müssen. Der eine kann mit Hilfe des Mohrschen Spannungskreis aus dem anderen ermittelt werden. Die Herleitung dieses Zusammenhangs wird im Anhang A2 vorgestellt.

Ausgehend wird das in Abbildung 6.10, links dargestellte Rechteck, dessen Kanten parallel zur x - und u -Achse sind, betrachtet. Die am Rechteck wirksamen Spannungen σ_x , σ_u und τ seien bekannt. Gesucht sind dann die Spannungen σ_η , σ_φ und $\tau_{\eta\varphi}$, die am Rechteck wirksam sind, wenn dieses um den Winkel α gedreht wird. Im Vergleich zu Abbildung 6.3, rechts können die mit $d\sigma_x$ und $d\sigma_u$ und $d\tau$ gekennzeichneten kleinen Spannungsänderungen unabhängig davon, ob sie gleich null sind, unberücksichtigt bleiben, da sie bei der Herleitung des Mohrschen Spannungskreis vernachlässigt werden können.

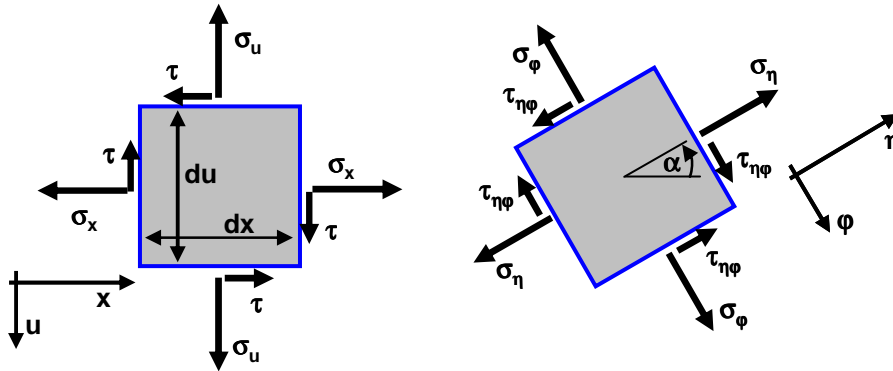


Abbildung 6.10: Spannungsverteilung am Ausgangsrechteck und am um α -gedrehten Rechteck

Zur Bestimmung von σ_η , σ_φ und $\tau_{\eta\varphi}$ zeichnet man den in Abbildung 6.11 dargestellten Mohrschen Spannungskreis. Sein Mittelpunkt hat in der σ_α , τ_α -Ebene den Mittelpunkt $((\sigma_x + \sigma_u)/2, 0)$ und den Radius $\sqrt{((\sigma_x - \sigma_u)/2)^2 + \tau^2}$. Dieser Spannungszustand ist im xu -Koordinatensystem ($\alpha = 0$) durch den Punkt P gekennzeichnet, der die Koordinaten $\sigma_\alpha = \sigma_x$ und $\tau_\alpha = \tau$ annimmt. Möchte man die Spannungen σ_η und $\tau_{\eta\varphi}$ im um den Winkel α gedrehten Rechteck bestimmen, muss der Punkt P im Mohrschen Spannungskreis um den Winkel 2α gedreht werden. Man erhält den Punkt P', für dessen beide Koordinaten $\sigma_\eta = \sigma_\alpha$ und $\tau_{\eta\varphi} = \tau_\alpha$ gilt. Zur Bestimmung der noch unbekannt Normalspannung σ_φ dreht man den Punkt P' um 180° und erhält den Punkt P''. Dieser hat die Koordinate $\sigma_\varphi = \sigma_\alpha$.

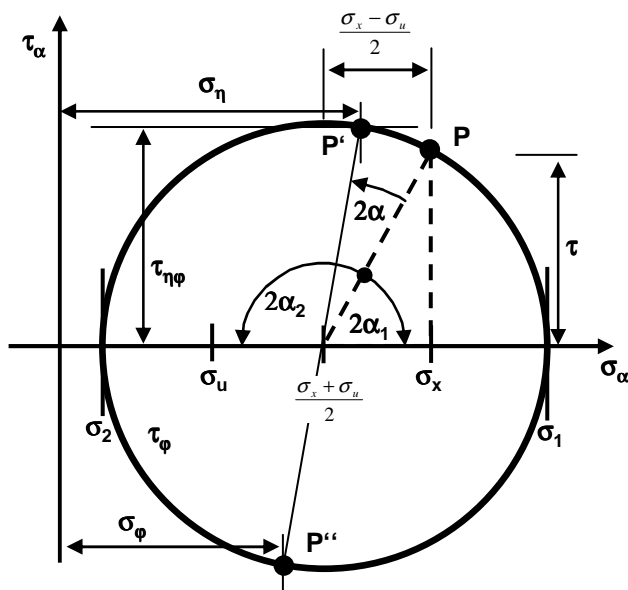


Abbildung 6.11: Mohrscher Spannungskreis

Dreht man das Rechteck um den Winkel α_1 oder α_2 erhält man $\tau_{\eta\varphi} = 0$. Das bedeutet, bei dieser Orientierung des Rechtecks wirken nur Normalspannungen am Rechteck. Diese werden mit σ_1 und σ_2 bezeichnet und **Hauptspannungen** genannt, wobei immer $\sigma_1 > \sigma_2$ gewählt wird. Sie können auch rechnerisch aus den ursprünglich gegebenen Spannungen σ_x , σ_u und τ bestimmt werden.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_u}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_u}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_x + \sigma_u) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_u)^2 + 4\tau^2} \right]$$

Die dabei resultierenden Koordinatenrichtungen η und φ werden Hauptachsen genannt. Dreht man das Rechteck nochmals um 45° besitzt man die Orientierung des Rechtecks, bei welcher die maximale Schubspannung τ_{\max} auftritt.

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_u}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_u)^2 + 4\tau^2}$$

Betrachtet man das zur x-Achse parallele Rechteck aus Abbildung 6.9 und geht davon aus, dass das Torsionsmoment M_t am Rechteck eine Schubspannung $\tau = \sigma_0$ erzeugt, ergibt der Mohrsche Spannungskreis, dass am 45° gedrehten Rechteck die beiden Hauptspannungen $\sigma_1 = \sigma_0$ und $\sigma_2 = -\sigma_0$ wirksam sind. Greifen am Ausgangsrechteck (Abbildung 6.12, links) nur Schubspannungen an, gilt für die Normalspannungen $\sigma_x = \sigma_u = 0$. Somit hat der in Abbildung 6.12, Mitte dargestellte Mohrsche Spannungskreis den Mittelpunkt $((\sigma_x + \sigma_u)/2, 0) = (0, 0)$. Für den Radius gilt $\sqrt{((\sigma_x - \sigma_u)/2)^2 + \tau^2} = \sigma_0$. Der Punkt P, der den Spannungszustand am Ausgangsrechteck beschreibt, hat die Spannungskoordinaten $(\sigma_x, \tau) = (0, \sigma_0)$. Man muss im Kreis den Punkt P um den Winkel $-2\alpha_1 = -2 \cdot 45^\circ$ drehen, dass der Punkt P' auf der σ_x -Achse liegt. Somit muss das Ausgangsrechteck wie in Abbildung 6.12, rechts dargestellt um $-\alpha_1 = -45^\circ$ gedreht werden, dass am resultierenden Rechteck nur die Hauptspannungen wirksam sind.

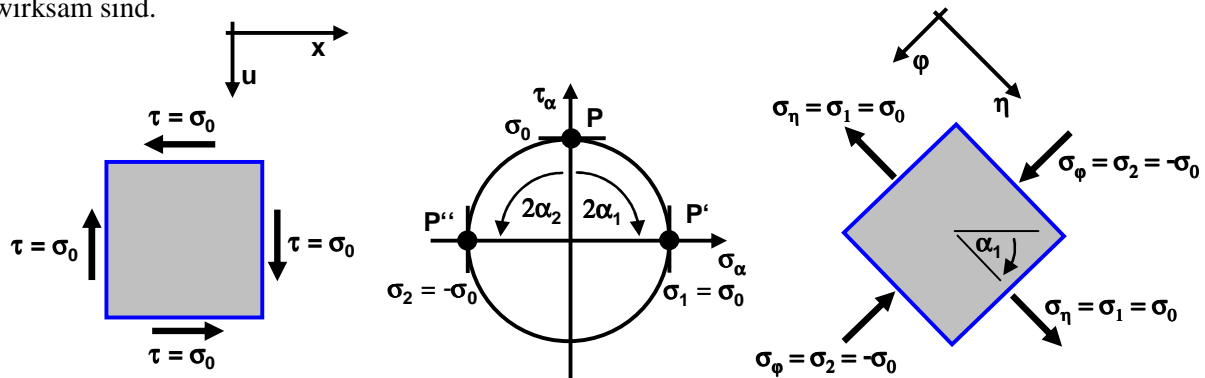


Abbildung 6.12: Spannungsbetrachtung an einem dünnwandigen Rohr unter dem Einfluss eines Torsionsmomentes

6.5 Festigkeitshypothesen und Vergleichsspannungen

Um die im eindimensionalen Zugversuch bestimmten Grenzspannungen (Fließgrenze, Maximalspannung, Bruchgrenze) auf den mehrdimensionalen Spannungszustand übertragen zu können, oder um verschiedene Spannungszustände miteinander vergleichen zu können, werden empirische Festigkeitshypothesen verwendet, die aus dem mehrdimensionalen Spannungszustand eine eindimensionale Vergleichsspannung σ_v erzeugen. Die am häufigsten verwendete Vergleichsspannung ist die **Mises-**

Vergleichsspannung, die auch Spannung gemäß der Gestaltänderungshypothese heißt. Die Herleitung erfolgt in Anhang A3.

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_u^2 - \sigma_x \sigma_u + 3\tau^2}$$

Kann man davon ausgehen, dass $\sigma_u = 0$ ist und setzt man $\sigma_x = \sigma$, so vereinfacht sich die Formel zur Bestimmung der Mises-Vergleichsspannung.

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Eine weitere Festigkeitshypothese ist die **Normalspannungshypothese**.

$$\sigma_V = \sigma_1 = \frac{1}{2} \left[\sigma_x + \sigma_u + \sqrt{(\sigma_x - \sigma_u)^2 + 4\tau^2} \right]$$

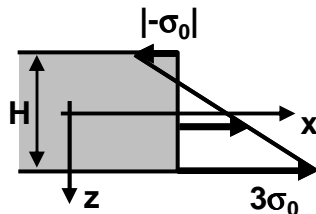
Sie verwendet als Vergleichsspannung die erste Hauptspannung. Entsprechend wertet die **Schubspannungshypothese** die maximale Schubspannung τ_{\max} aus dem Mohrschen Spannungskreis aus.

$$\sigma_V = 2\tau_{\max} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_u)^2 + 4\tau^2}$$

Aufgaben zu Kapitel 6

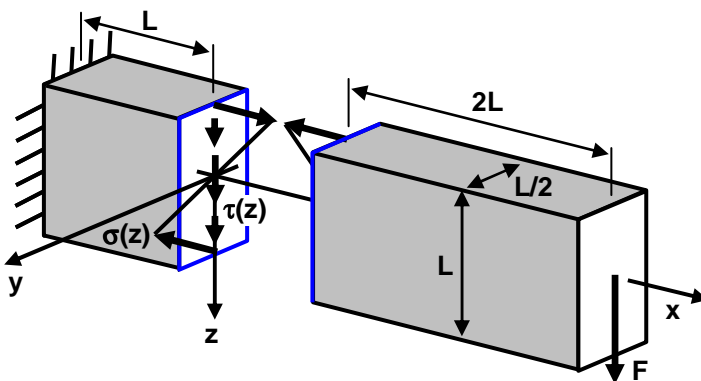
Aufgabe 6.1

In einem Rechteckprofil mit der Höhe H und der Wandstärke s wirkt der eingezeichnete Normalspannungsverlauf ($\sigma_0 H s = 10\text{N}$, $H = 30\text{mm}$). Wie groß sind Normalkraft und Biegemoment (Lösung: $N = 10\text{N}$, $M = 100\text{Nmm}$)?



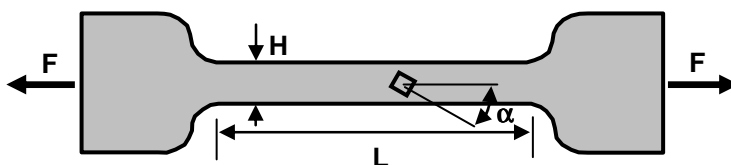
Aufgabe 6.2

Der Balken der Länge $3L$ wird bei $x = L$ geschnitten. Im positiven Schnittufer wird die Normalspannung durch $\sigma(z) = -48\sigma_0 z/L$ und die Schubspannung durch $\tau(z) = a(1 - (2z/L)^2)$ beschrieben. Wie groß ist die Kraft F und das Verhältnis $\sigma_{\max}/\tau_{\max}$ im Schnittufer (Lösung: $\sigma_{\max}/\tau_{\max} = 8$)?



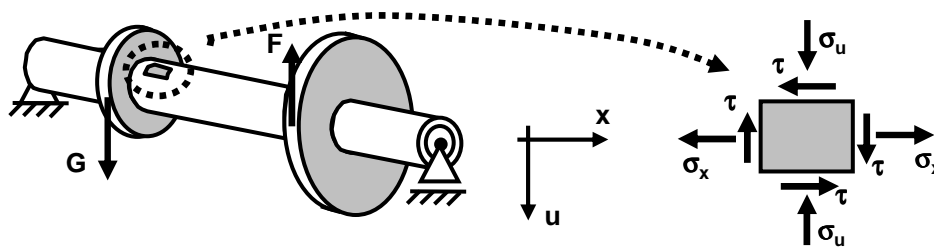
Aufgabe 6.3

Bei der Zugprobe ist nur der Bereich mit der Länge L elastisch. Der Rest kann infolge der Materialanhäufung als starr bezeichnet werden. Die Probe verformt sich nur in der Ebene (unveränderliche Bauteiltiefe) ($L = 100\text{mm}$, $H = 10\text{mm}$, $s = 2\text{mm}$, $E = 10000\text{N/mm}^2$). Infolge der Kraft F verlängert sich die Probe um 1% und wird um 0.25% eingeschnürt.



Welchen Betrag hat F ? Um welchen Winkel ist das kleine markierte Rechteck aus der Waagrechten gedreht, wenn die an ihm wirkenden Schubspannungen den Betrag 30N/mm^2 besitzen? Wie groß sind die Normalspannungen am gedrehten Rechteck und welche Vergleichsspannung nach Mises resultiert (Lösung: $F = 2000\text{N}$, $\alpha = 18.4^\circ$, $\sigma_x = 90\text{N/mm}^2$, $\sigma_u = 10\text{N/mm}^2$, $\sigma_v = 100\text{N/mm}^2$)?

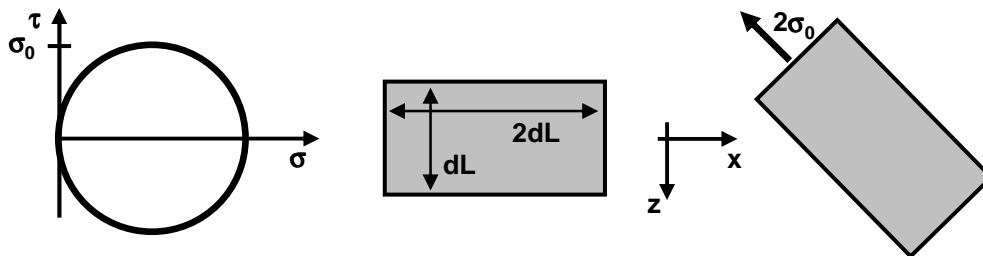
Aufgabe 6.4



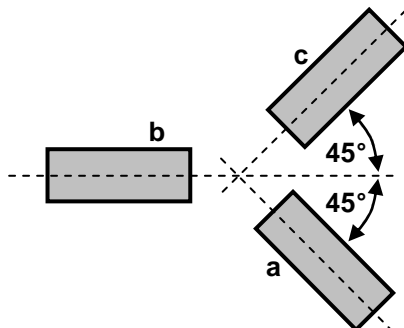
Die dargestellte dünnwandige Getriebewelle wird im Labor zu Prüfzwecken mit den Kräften F und G belastet. Am markierten Rechteck werden die angreifenden Spannungen $\sigma_x = 12\text{N/mm}^2$, $\sigma_u = 4\text{N/mm}^2$ und $\tau = 6\text{N/mm}^2$ bestimmt. Die Dehnungen lauten $\epsilon_x = 20/3 \cdot 10^{-3}$ und $\epsilon_u = -10/3 \cdot 10^{-3}$. Wie groß ist die Querkontraktionszahl ν ? Wie lautet die erste Hauptspannung? Um welchen Winkel α muss das Rechteck gedreht werden, dass an ihm die maximalen Schubspannungen wirken (Lösung: $\nu = 0.2$, $\sigma_1 = 100\text{N/mm}^2$, $\alpha = 26.6^\circ$)?

Aufgabe 6.5

Der ebene Spannungszustand an einem Punkt ist durch den links dargestellten Mohrschen Spannungskreis gekennzeichnet. Die beiden identischen Rechtecke sollen an diesem Punkt markiert werden. Das rechte ist um 45° aus der Waagrechten gedreht ($E = 50\sigma_0$, Querkontraktionszahl $\nu = 0.5$). An den Seiten der beiden Rechtecke sind die wirksamen Spannungen zu vervollständigen. Um wie viel Grad muss das rechte Rechteck gedreht werden, dass der Betrag der maximalen Normalspannung doppelt so groß wie der Betrag der Schubspannungen ist (Lösung: $\alpha = 26.6^\circ$)?



Aufgabe 6.6



Mit den der Dehnmessstreifen a , b und c wrden die Dehnungen $\epsilon_a = 12 \cdot 10^{-4}$, $\epsilon_b = 2 \cdot 10^{-4}$ und $\epsilon_c = -2 \cdot 10^{-4}$ gemessen. Der E-Modul beträgt $E = 210000\text{N/mm}^2$ und die Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$. Wie groß sind die Hauptspannungen und die Vergleichsspannung nach Mises (Lösung $\sigma_v = 260.6\text{N/mm}^2$)?

7. Spannungs- und Verformungsberechnung am Balken

Die am Balken wirksamen Spannungen sollen bestimmt werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Normalspannung σ_u und die Dehnung ε_u vernachlässigt werden können. Somit kann $\sigma = \sigma_x$ und $\varepsilon = \varepsilon_x$ verwendet werden. Das Hookesche Gesetz $\sigma = E\varepsilon$ und $\tau = G\gamma$ sei gültig. Die Spannungen sind so zu bestimmen, dass sie die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen.

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA & Q_z &= \int_A \tau_z dA & Q_y &= \int_A \tau_y dA \\ M_t &= \int_A r_s \tau dA & M_y &= \int_A z \sigma dA & M_z &= - \int_A y \sigma dA \end{aligned}$$

Rechnerisch können die Spannungen und Verformungen infolge der inneren Kräfte und Momente unabhängig voneinander betrachtet und abschließend überlagert werden. Dazu werden die Größen an einem Zugstab, an Balken unter dem Einfluss der Biegemomente und an Torsionsstäben betrachtet.

7.1 Spannungen und Verformungen am Zugstab

Beim Zugstab in Abbildung 7.1 ist nur die Normalkraft ungleich null.

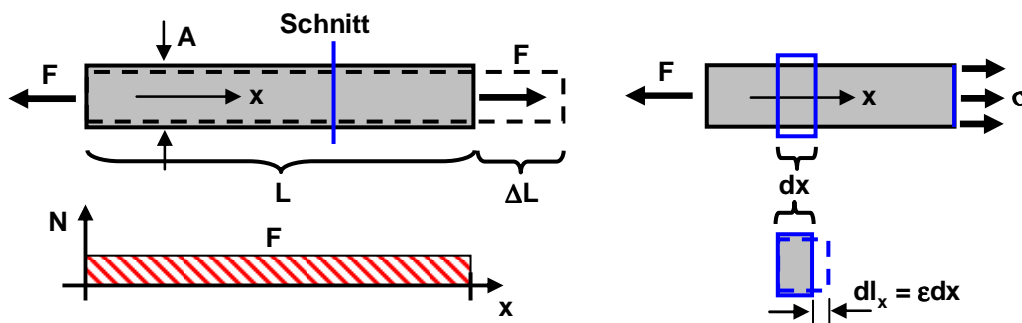


Abbildung 7.1: Spannungsbetrachtung am Zugstab

Man kann beobachten, dass der Querschnitt A gleichmäßig gedehnt wird. Somit existiert über dem Querschnitt eine konstante Dehnung ε . Da diese über das Hookesche Gesetz mit der Normalspannung σ gekoppelt ist, ist die Spannung ebenfalls über dem Querschnitt konstant. Die Einschnürung des Querschnittes A wird vernachlässigt.

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma \int_A dA = \sigma A \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = \frac{N}{A}}$$

Ist die Normalkraft größer null, wird der Stab auseinandergezogen und es resultieren positive Normalspannungen die **Zugspannungen** ($\sigma > 0$) genannt werden. Andernfalls wird der Stab zusammengedrückt. Die resultierenden Spannungen sind kleiner null und werden **Druckspannungen** ($\sigma < 0$) bezeichnet. Wählt man den Koordinatenursprung im Flächenmittelpunkt, sind auch die weiteren Gleichgewichtsbedingungen erfüllt.

Die Gesamtlängenänderung des Stabes setzt sich gemäß Abbildung 7.1, rechts aus den Längenänderungen $dl_x = \varepsilon dx$ der einzelnen Abschnitte der Länge dx zusammen. Da die Normalspannung über der Stablänge konstant ist, muss auch die Dehnung über der Stablänge konstant sein.

$$\Delta L = \int_L dl_x = \int_L \epsilon dx = \epsilon \int_L dx = \epsilon L \quad \Rightarrow \quad \boxed{\epsilon = \frac{\Delta L}{L}}$$

7.2 Symmetrischer Biegebalken unter dem Einfluss eines Biegemoments (Symmetrische Biegung)

Ein symmetrischer Balken ist gemäß Abbildung 7.2 dadurch gekennzeichnet dass er zur xz-Ebene symmetrisch ist. Es soll die Normalkraft gleich null und nur das Biegemoment $M = M_y$ ungleich null sein. Betrachtet man einen zur x-Achse senkrechten Querschnitt mit den Punkten O, M und U, so wird vorausgesetzt, dass deren Absenkung w in z-Richtung identisch ist.

$$w_o = w_m = w_u \quad \Rightarrow \quad w = w(x)$$

Dadurch ist die Absenkung unabhängig von der z-Koordinate und nur eine Funktion von x.

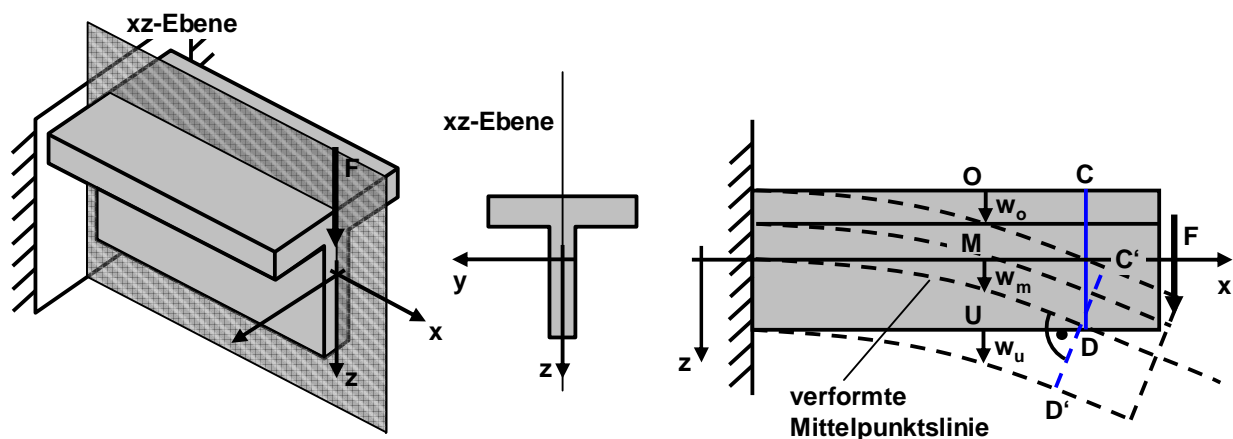


Abbildung 7.2: Annahmen für symmetrischer Balken unter dem Einfluss eines Momentes

Außerdem wird angenommen, dass ein Querschnitt CD senkrecht zur x-Achse bei der Verformung ($C'D'$) eben bleibt und weiterhin senkrecht zur verformten Mittelpunktslinie steht. Dies setzt voraus, dass die Verformung infolge der Querkraft vernachlässigt wird (vgl. Kapitel 7.7).

Betrachtet man gemäß Abbildung 7.3 einen kleinen Balkenabschnitt der Länge dx , wird dieser an der Oberseite verlängert und an der Unterseite verkürzt. Auf Höhe der Mittelpunktslinie behält er seine Länge.

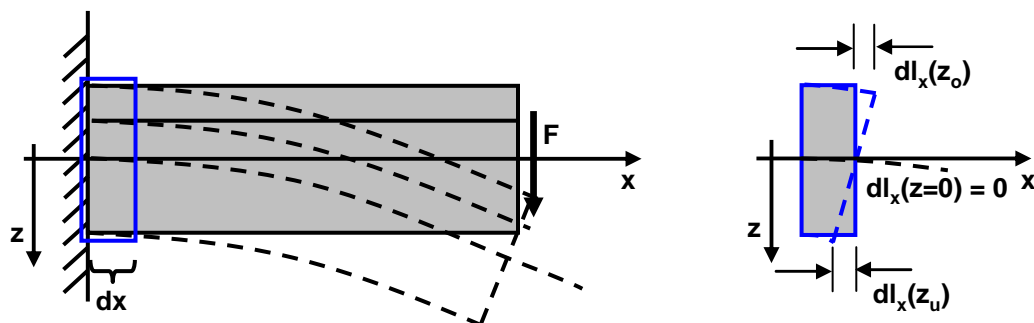


Abbildung 7.3: Längenänderung eines kleinen Balkenabschnitts mit der Länge dx

Da der Querschnitt eben bleibt, kann die Längenänderung $dl_x(z)$ durch eine lineare Funktion mit der Konstanten a_1 beschrieben werden.

$$dl_x(z) = a_1 z$$

Die Verlängerung entspricht einer positiven Längenänderung, die Verkürzung einer negativen. Für die lokale Dehnung $\varepsilon(z)$ folgt mit der Konstanten $a_2 = a_1/dx$ ebenso eine lineare Funktion.

$$\varepsilon(z) = \frac{dl_x(z)}{dx} = \frac{a_1 z}{dx} = a_2 z$$

Die Dehnung ist wiederum über das Hookesche Gesetz mit der Spannung $\sigma(z)$ verknüpft, die somit auch durch eine lineare Funktion zu beschreiben ist, die die Konstante a_3 beinhaltet.

$$\sigma(z) = E\varepsilon(z) = E a_2 z = a_3 z$$

Das bedeutet, die Bestimmung des Spannungsverlaufes reduziert sich auf die Berechnung der Konstanten a_3 . Der Spannungsansatz muss die Gleichgewichtsbedingungen für N und $M = M_y$ erfüllen.

$$0 = N = \int_A \sigma dA = \int_A a_3 z dA = a_3 \int_A z dA = a_3 S_y$$

Die Konstante a_3 ist ungleich null. Die Normalkraft N kann nur gleich null sein, wenn das statische Moment S_y gleich null ist. In Kapitel 3 wurde dargestellt, dass das statische Moment genau dann gleich null ist, wenn der Koordinatenursprung ($z = 0$) im Flächenmittelpunkt liegt. Das bedeutet auch, dass im Flächenmittelpunkt die Normalspannung $\sigma(z = 0) = 0$ ist. Daher wird beim hier betrachteten Balken die xy -Ebene als **neutrale Faser** bezeichnet. Setzt man den Spannungsansatz in die Gleichgewichtsbedingung für $M = M_y$ ein, kann die Konstante $a_3 = M/I_y$ ermittelt werden. Dabei wird I_y wie in Kapitel 3 **Flächenträgheitsmoment** bzw. Flächenträgheitsmoment um die y -Achse bezeichnet.

$$M = \int_A z \sigma dA = \int_A z a_3 z dA = a_3 \int_A z^2 dA = a_3 I_y$$

Setzt man I_y als bekannt voraus, erhält man die gesuchte Spannungsfunktion $\sigma(z)$.

$$\sigma(z) = a_3 z = \frac{M}{I_y} z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma(z) = \frac{M}{I_y} z}$$

Die Gleichgewichtsbedingung für M_z ergibt, wie verlangt, null. Bei symmetrischen Balken ist dies immer der Fall. Allgemein gilt die Spannungsfunktion für alle Belastungsfälle, bei denen die Gleichgewichtsbedingung für M_z null ergibt. In Kapitel 3 wurde gezeigt, dass das Flächenträgheitsmoment eines Rechtecks mit der Breite B und der Höhe H gleich $I_y = BH^3/12$ beträgt. Betrachtet man einen beliebigen Querschnitt A , der in n Rechtecke A_i mit der Breite B_i und der Höhe H_i zerlegt werden kann, so muss für jedes Rechteck das Flächenträgheitsmoment I_{yi} bestimmt werden. Die Summe aller Teilflächenträgheitsmomente ergibt das Gesamtflächenträgheitsmoment I_y des Querschnittes A . Bei der Bestimmung der Teilflächenträgheitsmomente I_{yi} muss der **Steinersche Anteil** $z_i^2 A_i$ berücksichtigt werden, wobei z_i die z -Koordinate des Flächenmittelpunktes der Teilfläche $A_i = B_i H_i$ ist.

$$\boxed{I_y = \sum_{i=1}^n I_{yi} = \sum_{i=1}^n \frac{B_i H_i^3}{12} + z_i^2 A_i}$$

Gemäß Abbildung 7.4 betrachtet man für die Herleitung des Steinerschen Anteils die Teilfläche A_i mit der Breite B_i und der Höhe H_i . Auf Höhe des Flächenmittelpunktes z_i wird der Koordinatenursprung des Behelfskoordinatensystem z_i' gewählt.

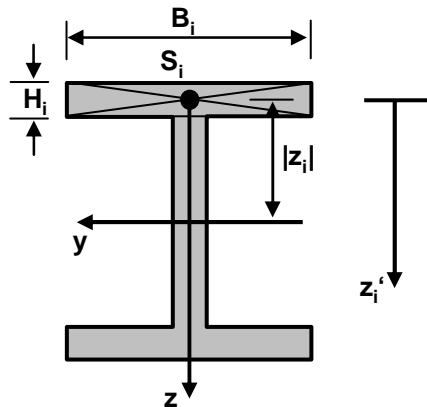


Abbildung 7.4: Größen zur Bestimmung des Flächenträgheitsmomentes am Teilrechteck A_i

$$I_{yi} = \int_{A_i} z^2 dA = \int_{A_i} (z'_i + z_i)^2 dA = \int_{A_i} (z'_i)^2 + 2z'_i z_i + z_i^2 dA = \int_{A_i} (z'_i)^2 dA + 2z_i \int_{A_i} z'_i dA + z_i^2 \int_{A_i} dA$$

$$= \frac{B_i H_i^3}{12} + S'_{yi} + z_i^2 A_i = \frac{B_i H_i^3}{12} + 0 + z_i^2 A_i$$

Das statische Moment S'_{yi} bezüglich des z' -Koordinatensystems ist gleich null, da das statische Moment gleich null ist, wenn der Koordinatenursprung im Flächenmittelpunkt liegt.

Betrachtet man das T-Profil in Abbildung 7.5, links, so ist zu Beginn die Lage des Gesamtmittelpunktes nicht bekannt. Zur dessen Bestimmung wird das Behelfskoordinatensystem z' eingeführt.

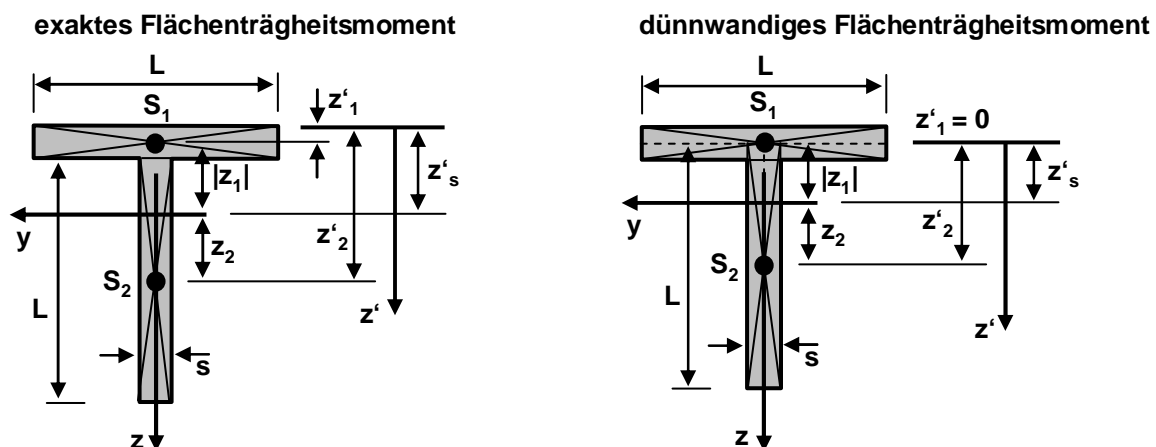


Abbildung 7.5: Exakte und dünnwandige Berechnung des Flächenträgheitsmomentes

In diesem Koordinatensystem hat der Flächenmittelpunkt der Teilfläche A_1 die z'_1 -Koordinate $s/2$ und die Teilfläche A_2 die z'_2 -Koordinate $s+L/2$. Daraus wird die Lage z'_s des Gesamtflächenmittelpunktes bestimmt.

$$z'_s = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^2 z'_i A_i = \frac{\frac{s}{2} Ls + \left(s + \frac{L}{2}\right) Ls}{2Ls} = \frac{3}{4} s + \frac{1}{4} L$$

Somit kann die Lage der Flächenmittelpunkte der beiden Teilflächen A_i bezüglich des yz -Koordinatensystems angegeben werden.

$$z_1 = z'_1 - z'_s = \frac{s}{2} - \left(\frac{3}{4} s + \frac{1}{4} L\right) = -\frac{L+s}{4}$$

$$z_2 = z'_2 - z'_s = \left(s + \frac{L}{2}\right) - \left(\frac{3}{4} s + \frac{1}{4} L\right) = \frac{L+s}{4}$$

Damit sind alle Größen zur Bestimmung des Flächenträgheitsmoments I_y bekannt.

$$I_y = \sum_{i=1}^2 I_{yi} = \sum_{i=1}^2 \frac{B_i H_i^3}{12} + z_i^2 A_i = \frac{Ls^3}{12} + \left(-\frac{L+s}{4}\right)^2 Ls + \frac{sL^3}{12} + \left(\frac{L+s}{4}\right)^2 Ls = \frac{5}{24} L^3 s + \frac{1}{4} L^2 s^2 + \frac{5}{24} Ls^3$$

Setzt man voraus, dass $s \ll L$ gilt, so können der zweite und dritte Term vernachlässigt werden und für das Flächenträgheitsmoment folgt $I_y = 5/24 L^3 s$. Diese Bedingung wird wiederum als Dünnwandigkeit bezeichnet. Setzt man diese von Beginn an voraus, kann man wie in Abbildung 7.5, rechts die gestrichelte Profilmittellinie bemaßen und dieser eine Wandstärke s zuweisen. Die Überdeckungen der Teilflächen können vernachlässigt werden. Weiter bleiben die Terme, die s in höherer Potenz beinhalten, bei der Berechnung unberücksichtigt. Für die Berechnung der Lage des Gesamtflächenmittelpunktes wird das Behelfskoordinatensystem z' so gewählt, dass der Ursprung auf Höhe der waagrechten Profilmittellinie liegt. Die z'_1 -Koordinate nimmt den Wert null, die z'_2 -Koordinate den Wert $L/2$ an. Dies ergibt ein $z'_s = L/4$.

$$z'_s = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^2 z'_i A_i = \frac{0 \cdot Ls + \frac{L}{2} Ls}{2Ls} = \frac{1}{4} L$$

$$z_1 = z'_1 - z'_s = -\frac{L}{4} \quad \text{und} \quad z_2 = z'_2 - z'_s = \frac{L}{4}$$

$$I_y = \sum_{i=1}^2 I_{yi} = \sum_{i=1}^2 \frac{B_i H_i^3}{12} + z_i^2 A_i = \frac{Ls^3}{12} + \left(-\frac{L}{4}\right)^2 Ls + \frac{sL^3}{12} + \left(\frac{L}{4}\right)^2 Ls = \frac{5}{24} L^3 s + \frac{1}{12} Ls^3 = \frac{5}{24} L^3 s$$

In Kapitel 3 wurde das Flächenträgheitsmoment eines Vollkreises zu $I_y = \pi/4 R^4$ bestimmt. Betrachtet man ein Hohlprofil (Abbildung 7.6, Mitte) mit dem Außenradius R_a und dem Innenradius R_i , ist das Flächenträgheitsmoment die Differenz beider Kreise. Ist das Hohlprofil dünnwandig (Abbildung 7.6, rechts) kann $R_a = R_m + s/2$ und $R_i = R_m - s/2$ verwendet und das Flächenträgheitsmoment durch den mittleren Radius R_m und die Wandstärke s angegeben werden, wobei alle Terme, die s in höherer Potenz beinhalten, vernachlässigt werden.

$$I_y = \frac{\pi}{4} R^4 \qquad I_y = \frac{\pi}{4} (R_a^4 - R_i^4) \qquad I_y = \pi R_m^3 s$$

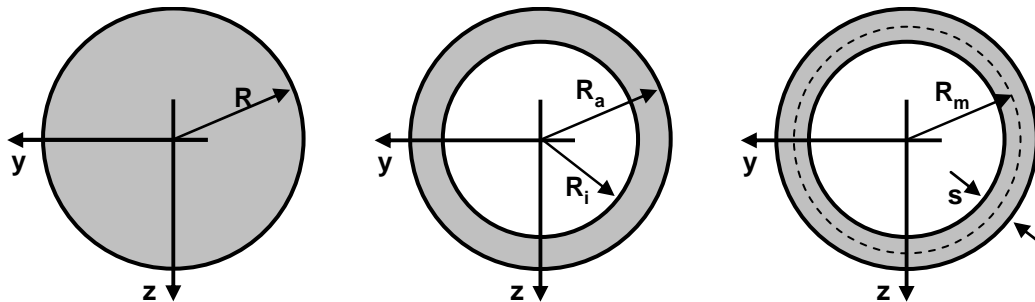


Abbildung 7.6: Kreisrunde Profile zur Berechnung des Flächenträgheitsmomentes I_y

Bei den bisherigen Spannungsbetrachtungen wurde der Einfluss der Querkraft vernachlässigt. Näherungsweise kann die Schubspannung τ infolge der Querkraft $Q = Q_z$ über dem Querschnitt als konstant vorausgesetzt und dadurch abgeschätzt werden. Die Querkraft Q_y muss gleich null sein.

$$Q = \int_A \tau dA = \tau \int_A dA = \tau A \qquad \Rightarrow \qquad \tau = \frac{Q}{A}$$

Der Vergleich der beiden Balken der Abbildung 7.7 zeigt den Einfluss des Flächenträgheitsmoments. Für das linke I-Profil erhält man eine Querschnittsfläche $A_I = 288 \text{ mm}^2$ und ein Flächenträgheitsmoment $I_{yI} = 37616 \text{ mm}^4$. Die entsprechenden Werte für das rechte Rechteckprofil lauten $A_R = 300 \text{ mm}^2$ und $I_{yR} = 22500 \text{ mm}^4$.

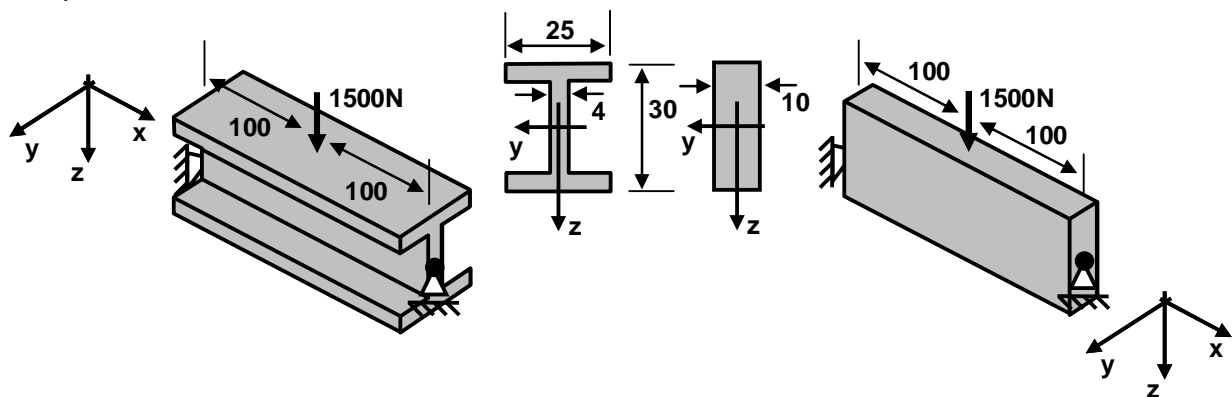


Abbildung 7.7: Geometrie zweier Balken mit I- und Rechteckprofil zur Berechnung der maximalen Spannungen

Der Querkraft- und der Biegemomentenverlauf sind unabhängig vom Querschnitt und somit für beide Balken identisch. In der linken Balkenhälfte ist $Q = 750 \text{ N}$, in der rechten $Q = -750 \text{ N}$. Dies ergibt ein Biegemoment, welches an den Enden gleich null ist und in der Balkenmitte bei $x = 100$ das Maximum $M_{\max} = 75000 \text{ Nmm}$ erreicht. Sind die maximalen Spannungen von Interesse, müssen die Normalspannungen σ in der Balkenmitte betrachtet werden. Für beide Balken erhält man eine Spannungsfunktion.

$$\sigma_I(z) = \frac{M_{\max}}{I_{yI}} z = \frac{75000 \text{ Nmm}}{37616 \text{ mm}^4} z = 2 \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} z$$

$$\sigma_R(z) = \frac{M_{\max}}{I_{yR}} z = \frac{75000 \text{ Nmm}}{22500 \text{ mm}^4} z = 3,3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^3} z$$

Setzt man bei beiden die Balken die z -Koordinate der Unterkante ($z = 15\text{mm}$) ein, so erhält man die maximalen Zugspannungen $\sigma_{I,Zug}$ und $\sigma_{R,Zug}$.

$$\sigma_{I,Zug} = \sigma_I(z = 15\text{mm}) = 2 \frac{N}{\text{mm}^3} 15\text{mm} = 30 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{R,Zug} = \sigma_R(z = 15\text{mm}) = 3.3 \frac{N}{\text{mm}^3} 15\text{mm} = 50 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Entsprechend erhält man an der Oberkante ($z = -15\text{mm}$) die maximalen Druckspannungen $\sigma_{I,Druck}$ und $\sigma_{R,Druck}$.

$$\sigma_{I,Druck} = \sigma_I(z = -15\text{mm}) = 2 \frac{N}{\text{mm}^3} (-15\text{mm}) = -30 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{R,Druck} = \sigma_R(z = -15\text{mm}) = 3.3 \frac{N}{\text{mm}^3} (-15\text{mm}) = -50 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Wie die Querkraft sind auch die Schubspannungen τ_I und τ_R in der linken Balkenhälfte positiv und in der rechten negativ.

$$\tau_I = \frac{Q}{A_I} = \frac{\pm 750\text{N}}{288\text{mm}^2} = \pm 2.6 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_R = \frac{Q}{A_R} = \frac{\pm 750\text{N}}{300\text{mm}^2} = \pm 2.5 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

In Abbildung 7.8 sind die resultierenden Normalspannungsverläufe in der Balkenmitte und die Verläufe der Querkraft in der rechten Balkenhälfte für beide Balken angegeben.

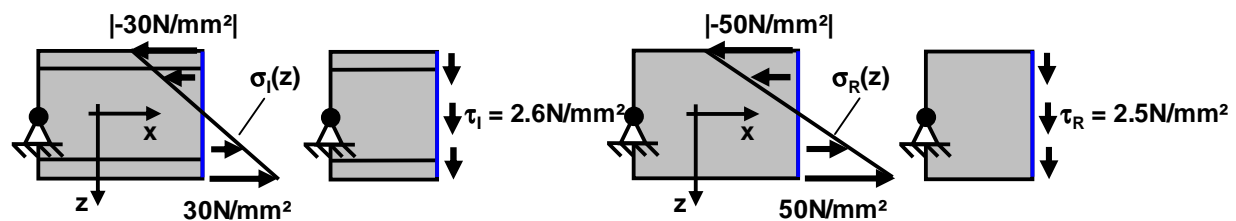


Abbildung 7.8: Spannungsverläufe an den Balken aus Abbildung 7.7

Betrachtet man die beiden maximalen Vergleichsspannungen nach Mises, zeigt sich, dass die Schubspannungen vernachlässigt werden können.

$$\sigma_{V,I} = \sqrt{\sigma_{I,Zug}^2 + 3\tau_I^2} = 30.3 \frac{N}{\text{mm}^2} \quad \text{und} \quad \sigma_{V,R} = \sqrt{\sigma_{R,Zug}^2 + 3\tau_R^2} = 50.0 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Neben den Spannungen ist auch wie in Abbildung 7.9 dargestellt, die Absenkung $w(x)$ des Balkens in z -Richtung von Interesse. Die Funktion $w(x)$ wird als **Biegelinie** bezeichnet.

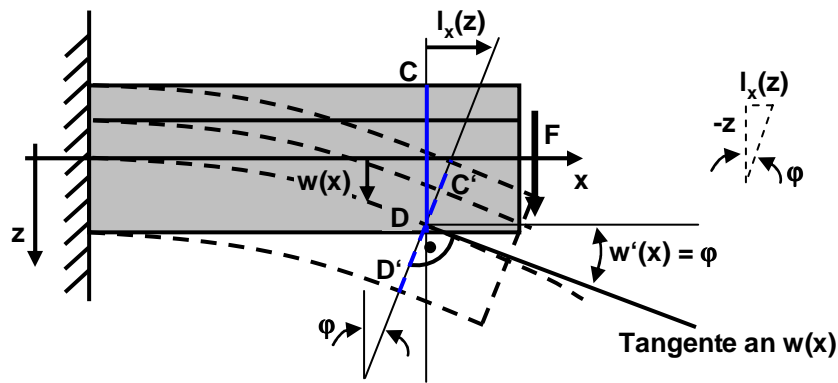


Abbildung 7.9: Geometrie zur Herleitung der Biegelinie $w(x)$

Es wird vorausgesetzt, dass die Steigung der Biegelinie $w'(x)$ klein ist. Der Querschnitt CD steht nach der Verformung ($C'D'$) weiterhin senkrecht auf der Mittelpunktslinie bzw. auf der Biegelinie $w(x)$ und schließt somit mit der Tangente an $w(x)$ einen rechten Winkel ein. Dadurch ist die Steigung der Tangente $w'(x)$ identisch mit dem Winkel φ , der die Neigung des Querschnitts CD im verformten Zustand beschreibt. Der Winkel φ ist im Dreieck enthalten, welches auch die Längenänderung $l_x(z)$ und die negative z -Koordinate als Katheten beinhaltet. Die negative z -Koordinate muss verwendet werden, da bei der dargestellten Geometrie ein negativer Wert für z eine positive Längenänderung ergibt. Da $w'(x)$ klein ist, gilt dies auch für φ .

$$\frac{l_x(z)}{-z} = \tan \varphi = \varphi = w'(x) \quad \Rightarrow \quad l_x(z) = -zw'(x)$$

Mit der Bestimmungsgleichung für die Normalspannungen $\sigma(z)$ und dem Hookeschen Gesetz kann die Funktion $w(x)$ bzw. deren zweite Ableitung $w''(x)$ mit dem Biegemoment M in Relation gebracht werden.

$$\sigma(z) = \frac{M}{I_y} z = E\varepsilon(z) = E \frac{dl_x(z)}{dx} = E \frac{d}{dx} l_x(z) = E \frac{d}{dx} (-zw'(x)) = -Ez \frac{dw'(x)}{dx} = -Ezw''(x)$$

Aufgelöst nach $w''(x)$ erhält man die gesuchte Differentialgleichung für die Biegelinie.

$$\Rightarrow \quad w''(x) = -\frac{M}{EI_y}$$

Unter Berücksichtigung der jeweiligen Randbedingungen ergibt zweimaliges Integrieren die gesuchte Biegelinie $w(x)$. Das Produkt EI_y wird als **Biegesteifigkeit** bezeichnet.

Betrachtet man den Balken mit Rechteckprofil aus Abbildung 7.7 muss für die Integration der Momentenverlauf durch eine Funktion dargestellt werden. Da der Verlauf in der Mitte einen Knick hat, muss das Integrationsgebiet in zwei Hälften zerlegt werden. Da die Absenkung $w(x)$ symmetrisch ist, muss nur die Biegelinie $w_L(x)$ der linken Hälfte berechnet werden.

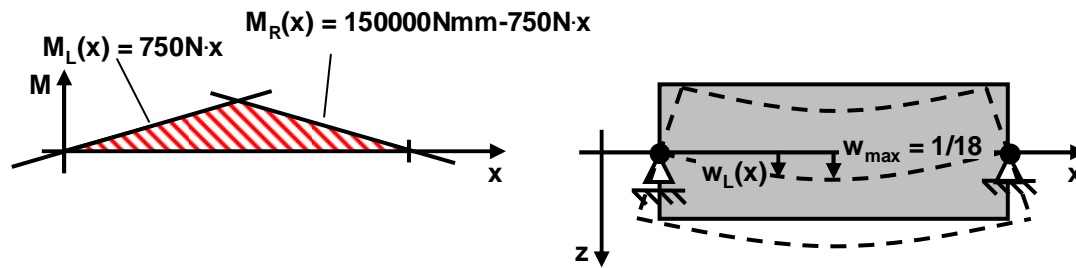


Abbildung 7.10: Funktionsverlauf des Biegemoments und verformter Rechteckbalken

$$w_L''(x) = -\frac{M}{EI_{yR}} = -\frac{M_L(x)}{EI_{yR}} = -\frac{1}{EI_{yR}} 750N \cdot x$$

$$w_L'(x) = -\frac{1}{EI_{yR}} 375N \cdot x^2 + c_1$$

$$w_L(x) = -\frac{1}{EI_{yR}} 125N \cdot x^3 + c_1 x + c_2$$

Für die Bestimmung der beiden Integrationskonstanten können die Randbedingungen $w_L(x=0) = 0$ und $w_L'(x=100) = 0$ verwendet werden.

$$w_L(x=0) = 0: \quad 0 = -\frac{1}{EI_{yR}} 125N \cdot 0^3 + c_1 \cdot 0 + c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$w_L'(x=100) = 0: \quad 0 = -\frac{1}{EI_{yR}} 375N \cdot (100\text{mm})^2 + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{EI_{yR}} 3750000\text{Nmm}^2$$

Mit der resultierenden Funktion der Biegelinie $w_L(x)$ kann die maximale Durchbiegung w_{\max} in der Balkenmitte bestimmt werden. Für den Elastizitätsmodul des Balkens wird $E = 200000\text{N/mm}^2$ verwendet.

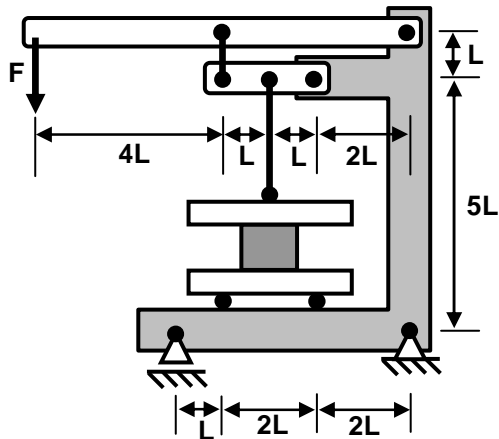
$$w_L(x) = \frac{1}{4.5 \cdot 10^9} (3750000\text{Nmm}^2 x - 125N \cdot x^3) = 8.3 \cdot 10^{-4} x - 2.7 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{mm}^2} x^3$$

$$w_{\max} = w_L(x=100) = 8.3 \cdot 10^{-4} \cdot 100\text{mm} - 2.7 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{mm}^2} (100\text{mm})^3 = \frac{1}{18} \text{mm}$$

Aufgaben zu Kapitel 7.1 und 7.2

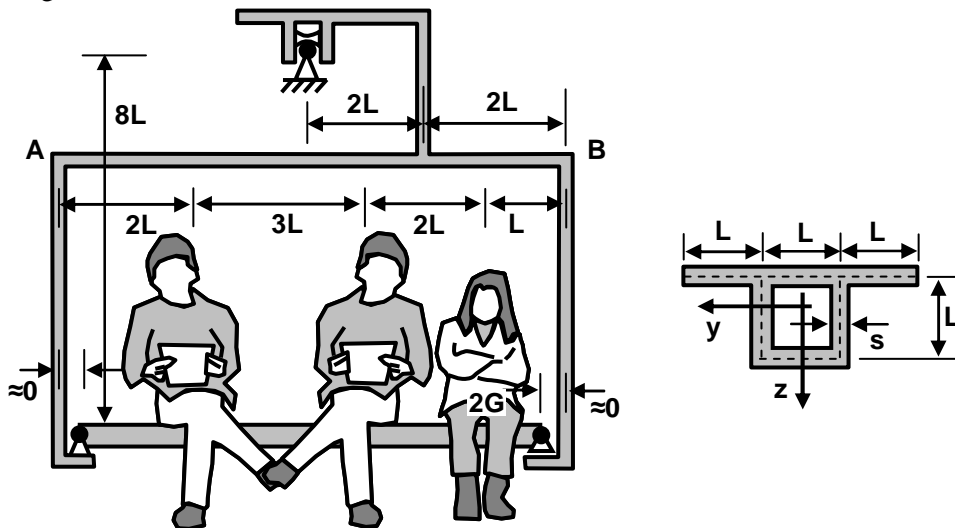
Aufgabe 7.2.1

In der Presse wirken nur Kräfte in senkrechter Richtung. Der Querschnitt des Rahmens besteht aus einem quadratischen Profil mit der äußeren Kantenlänge $H = 50\text{mm}$ und der Wandstärke $s = 2\text{mm}$. Wie groß sind die Beträge der maximalen Normalspannungen infolge Normalkraft und Biegemoment im senkrechten Balken der Länge $6L$ ($L = 100\text{mm}$, $F = 250\text{N}$). (Lösung: $\sigma_N = 1.95\text{N/mm}^2$, $\sigma_B = 16.92\text{N/mm}^2$)?



Aufgabe 7.2.2

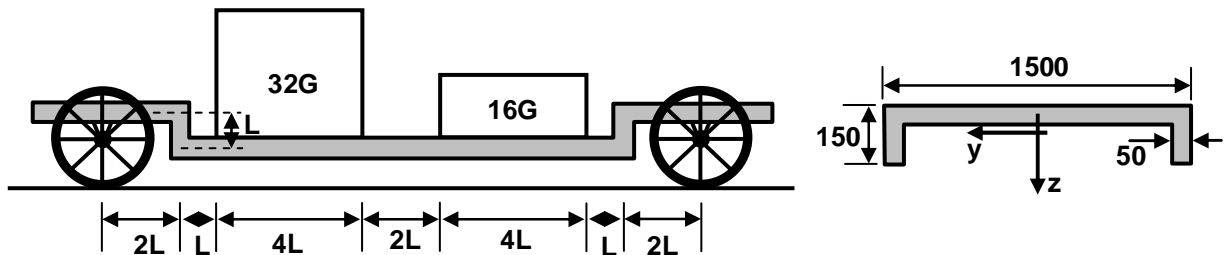
Die Gondel eines Schleppliftes ist oben gelenkig gelagert. In der Gondel sitzen ein identisches Zwillingpaar und ein Mädchen mit der Gewichtskraft $2G$. Die Gewichtskraft der Gondel ist zu vernachlässigen.



- Wie groß muss die Gewichtskraft der Zwillinge in Abhängigkeit von G sein, damit das Bauteil im Gleichgewicht ist?
- Der waagrechte Balken AB hat den rechts dargestellten Querschnitt. Gesucht sind die maximalen Zug- und Druckspannungen in diesem Balken? Welchen maximalen Betrag nimmt die Schubspannung an (Lösung: $\sigma_Z = 14G/(Ls)$, $\sigma_D = -28G/(Ls)$, $\tau_Q = 7/6G/(Ls)$)?

Aufgabe 7.2.3

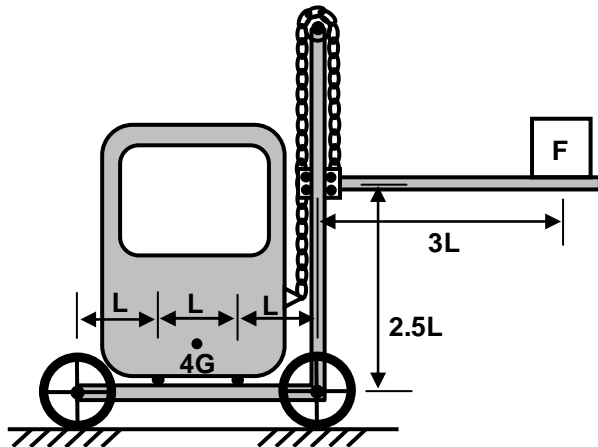
Ein Eisenbahnwagen ist mit zwei Kisten, die einen mittigen Schwerpunkt besitzen, beladen. Die Einflüsse der Kisten auf den Rahmen des Wagens sind durch **konstante Streckenlasten** zu berücksichtigen ($L = 500\text{mm}$, $G = 1000\text{N}$).



- a.) Wie groß sind die maximalen Zug- und Druckspannungen infolge des Biegemoments im grauen Rahmen (Lösung: $\sigma_Z = 99.9\text{N/mm}^2$, $\sigma_D = -29.1\text{N/mm}^2$)?
- b.) Wie viel Prozent ändert sich die maximale Normalspannung, wenn die Kisten nicht durch die Streckenlasten, sondern durch zwei Einzelkräfte auf Höhe der jeweiligen Schwerpunkte berücksichtigt werden (Lösung: $\Delta\sigma = 6.7\%$)?

Aufgabe 7.2.4

Die Kabine des Gabelstaplers hat die Gewichtskraft $4G$, die in der Mitte der beiden Auflagepunkte angreift. Am rechten Ende der Gabel liegt das Transportgut mit der Gewichtskraft F . Der Rest hat keine Gewichtskraft. Zwischen Gabel und Rahmen kann nur ein Moment übertragen werden



- a.) Wie groß darf F maximal werden, ohne dass der Gabelstapler kippt (Lösung: $F = 2G$)?

Es gelte $F = G = 2000\text{N}$ und $L = 500\text{mm}$. Der graue L-förmige Rahmen besteht aus einem dünnwandigen, rechteckigen Profil mit der Höhe $2H = 100\text{mm}$ und der Breite $H = 50\text{mm}$.

- b.) Wie groß muss die Wandstärke s gewählt werden, damit der Betrag der maximalen Normalspannung infolge des Biegemoments nicht größer als 40N/mm^2 wird? Welchen Wert hat dann die maximale Normalspannung infolge Normalkraft (Lösung: $s = 9\text{mm}$, $\sigma_N = 40/27\text{N/mm}^2$)?
- c.) Um wie viel Prozent steigt die maximale Normalspannung infolge des Biegemoments an, wenn die Last um $1.5L$ senkrecht nach oben gehoben wird?

Aufgabe 7.2.5

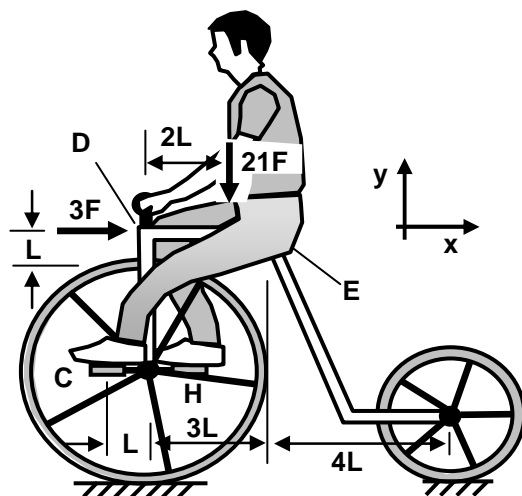
Auf jedem Balkon stehen n Personen mit der Gesamtgewichtskraft nF . Die Gewichtskraft der Personen ist als **konstante Streckenlast**, verteilt über den ganzen Balkon, zu berücksichtigen. Weitere Gewichtskräfte sind zu vernachlässigen.



- a.) Wie groß kann n maximal werden, wenn im oberen Balken die Querkraft maximal den Betrag 5000N besitzen darf (Lösung: $n = 15$)?
- b.) Es sei $n = 15$ und $F = 800\text{N}$. Der Querschnitt des Balkons ist ein Rechteck mit der Höhe H und der Tiefe $3L$. Wie groß muss H gewählt werden, wenn der Betrag der maximalen Normalspannung infolge des Biegemomentes im unteren Balken 85N/mm^2 betragen soll (Lösung: $H = 20\text{mm}$)?

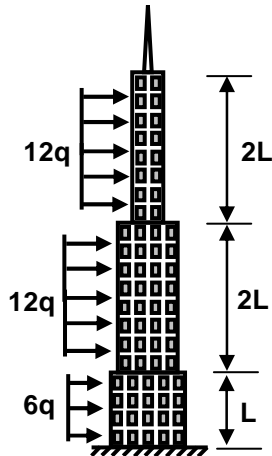
Aufgabe 7.2.6

An den Kontaktstellen (C, D und E) Rad Mensch (Gewichtskraft $21F$) werden nur senkrechte Kräfte übertragen. Die rechte Fußkraft am Punkt H ist gleich null. Der Rahmen besteht aus einem dünnwandigen kreisrunden Profil mit dem mittleren Radius R_m und der Wandstärke s ($L^3/(\pi R_m^2 s) = 1\text{N/mm}^2$). Wie groß sind die maximalen Normalspannung im Balken DE (Lösung: $\sigma_{\max} = 36\text{N/mm}^2$)?

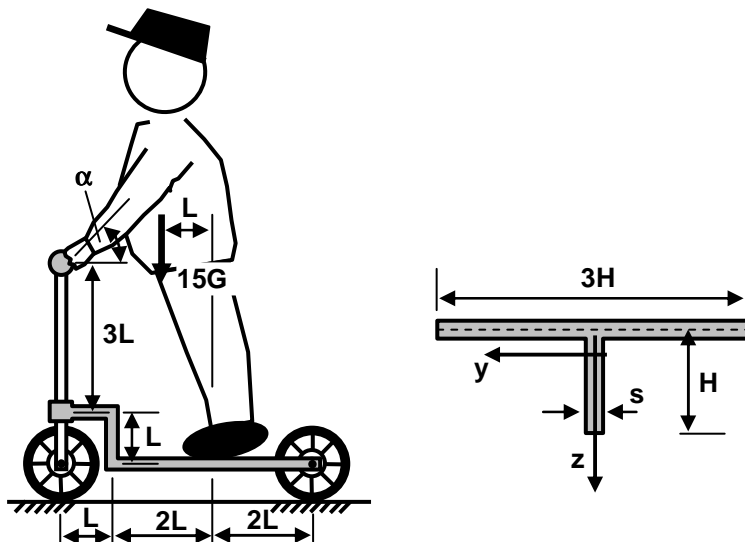


Aufgabe 7.2.7

Auf den Wolkenkratzer wirkt infolge des Windes eine bereichsweise konstante Streckenlast. Die Grundrisse der einzelnen Sektoren sind dünnwandig und quadratisch und haben die Wandstärke s und die Kantenlängen c_1H , c_2H und c_3H ($c_3 < c_2 < c_1 = 1$). Die Konstanten c_2 und c_3 sind so zu wählen, dass in jedem Sektor die gleiche maximale Normalspannung wirksam ist (Lösung: $c_2 = 0.81$, $c_3 = 0.40$).

**Aufgabe 7.2.8**

Zwischen Roller und Fahrer können nur **senkrechte** Kräfte übertragen werden. Der graue Rahmen hat das dargestellte dünnwandige Profil ($L = 6H$, $H = 4s$, $G/H^2 = 13/432\text{N/mm}^2$).



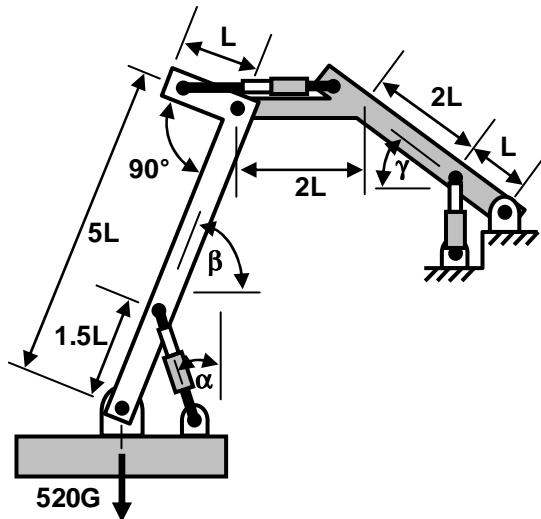
a.) Gesucht sind die maximalen Zug- und Druckspannungen infolge Biegemoment im waagrechten Balken der Länge $4L$ (Lösung: $\sigma_Z = 28\text{N/mm}^2$, $\sigma_D = -4\text{N/mm}^2$).

Zwischen Roller und Fahrer können nur Kräfte übertragen werden. Die Handkraft soll in Armrichtung zeigen, bzw. sie ist um den Winkel α aus der Waagrechten ausgelenkt ($\tan\alpha = 0.75$). Das bedeutet, dass an der Schulter keine Momente übertragen werden.

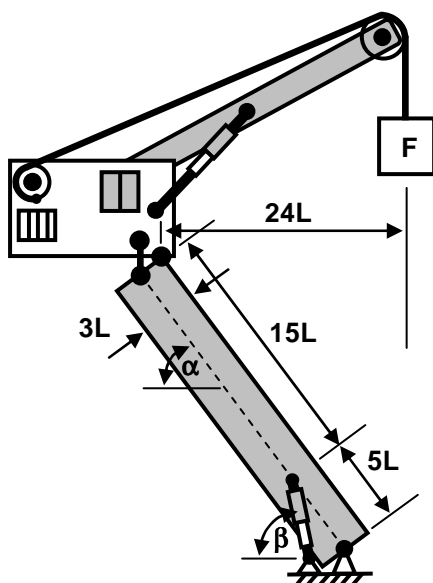
b.) Wie groß sind die maximalen Zugspannungen infolge des Biegemoments und der Normalkraft im waagrechten Balken aus a.) (Lösung: $\sigma_B = 28\text{N/mm}^2$, $\sigma_N = 39/540\text{N/mm}^2$)?

Aufgabe 7.2.9

Ein Aufsatz zum Mähen der Straßenränder soll untersucht werden. Der graue Schnittkopf hat die Gewichtskraft $520G$, alle anderen Gewichtskräfte sind zu vernachlässigen. Der dünnwandige Querschnitt des grauen diagonalen Balkens hat die Höhe $2H$, die Breite H und die Wandstärke s . Wie muss H gewählt werden, dass die maximale Normalspannung infolge des Biegemoments $\sigma_B = 86.16 \text{ N/mm}^2$ in diesem Balken beträgt? Wie groß ist dann am entsprechenden Querschnitt die Normalspannung infolge Normalkraft ($\tan\alpha = 1/5$, $\tan\beta = 12/5$, $\tan\gamma = 0.75$, $G = 10 \text{ N}$, $L = 500 \text{ mm}$, $s = 5 \text{ mm}$) (Lösung: $H = 100 \text{ mm}$, $\sigma_N = 9.6 \text{ N/mm}^2$)?

**Aufgabe 7.2.10**

Der nicht maßstabsgetreu dargestellte Kran soll untersucht werden. Der schräge Balken mit der Länge $20L$ hat einen quadratischen, dünnwandigen Querschnitt mit der Kantenlänge $3L$ und der Wandstärke s . Gesucht ist die Wandstärke s , wenn der Betrag der maximalen Normalspannung infolge des Biegemoments $\sigma_B = 21 \text{ N/mm}^2$ beträgt. Wie groß ist dann die maximale Normalspannung infolge Normalkraft ($\tan\alpha = 4/3$, $\tan\beta = 24/7$, $F/L = 60 \text{ N/mm}$) (Lösung: $s = 6 \text{ mm}$, $\sigma_N = -6.5 \text{ N/mm}^2$)?



7.3 Torsionsstab

Bei der Torsion hat die Querschnittsform einen entscheidenden Einfluss. Daher betrachtet man die drei Querschnittsformen kreisrund, dünnwandig geschlossen und dünnwandig offen getrennt.

7.3.1 Torsion kreisrunder Stäbe

Betrachtet wird der in Abbildung 7.11, links dargestellte Stab mit kreisrundem Querschnitt. Er hat die Länge L und den Außenradius R und wird durch das über der Stablänge konstante Torsionsmoment M_t belastet. Es wird vorausgesetzt, dass der kreisrunde Querschnitt bei der Verformung erhalten bleibt. Gesucht sind die in Umfangsrichtung zeigenden Schubspannungen τ und der Verdrehwinkel φ , um welchen sich der Querschnitt mit dem Punkt B relativ zum Querschnitt mit dem Punkt A um die x -Achse verdreht. Dazu wird am unverformten Gesamtstab ein Rechteck markiert, welches die Kante AB beinhaltet und den Abstand r vom Kreismittelpunkt ($y = z = 0$) besitzt. Markiert man das Rechteck an der Oberfläche, gilt $r = R$. Infolge des Torsionsmoment M_t wird die Lage von B zu B' verschoben.

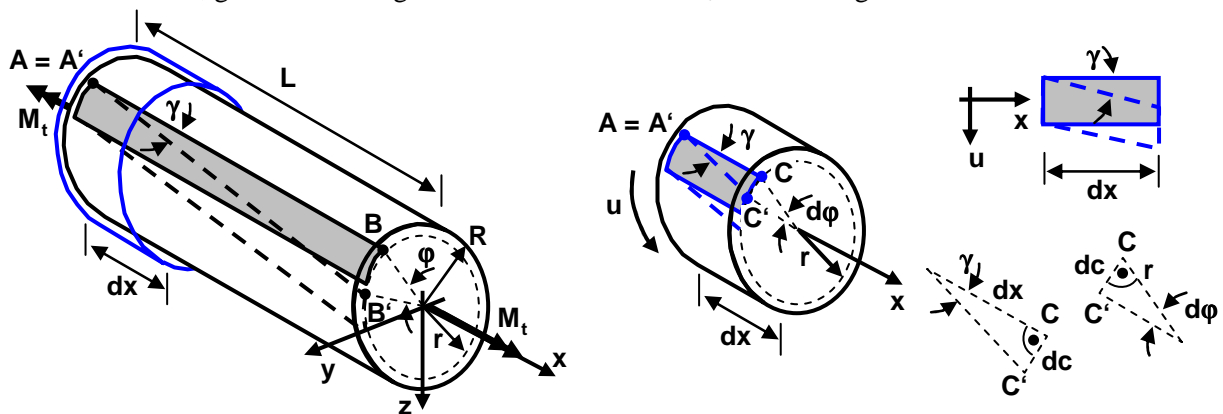


Abbildung 7.11: Kreisrundes Rohr unter dem Einfluss eines Torsionsmomentes

Von Gesamtstab und dem markierten Rechteck wird ein kleiner Abschnitt mit der Länge dx betrachtet. Auf der Länge dx verdreht sich der Punkt C um den Winkel $d\varphi$. Projiziert man den Rechtecksabschnitt in die xu -Ebene (Abbildung 7.11, rechts oben), erkennt man, dass der Winkel γ eine Änderung eines ursprünglichen rechten Winkels beschreibt und somit mit der in Kapitel 6.2 eingeführten Dehnung oder Winkelverzerrung γ übereinstimmt.

Am kleinen Stababschnitt können zwei rechtwinklige Dreiecke (Abbildung 7.11, rechts unten), mit den Winkeln γ und $d\varphi$ betrachtet werden, die jeweils als Gegenkathete die Verbindungslinie CC' besitzen, die die Länge dc hat.

$$\frac{dc}{dx} = \tan \gamma = \gamma \qquad \frac{dc}{r} = \tan d\varphi = d\varphi$$

Mit Hilfe der beiden Beziehungen kann γ in Abhängigkeit von $d\varphi$ dargestellt werden.

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dx}$$

Die gesuchten Schubspannungen τ und der Winkelverzerrung γ müssen die Gleichgewichtsbedingungen und das Hookesche Gesetz erfüllen. Da der Querschnitt kreisförmig ist, kann $r_s = r$ gesetzt werden.

$$M_t = \int_A r \tau dA = \int_A r G \gamma dA = \int_A r G r \frac{d\varphi}{dx} dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A r^2 dA = G \frac{d\varphi}{dx} I_t \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{GI_t}$$

Dabei wird berücksichtigt, dass der Kreisquerschnitt bei der Verformung erhalten bleiben soll. Dadurch wird jeder beliebige Punkt C um den gleichen Winkel $d\varphi$ verdreht, wodurch dieser bei der Integration über der Querschnittsfläche A konstant ist. Das verbleibende Integral wird als **Torsionsflächenträgheitsmoment I_t** bezeichnet.

$$I_t = \int_A r^2 dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 r d\alpha dr = \int_0^R r^3 \left(\int_0^{2\pi} d\alpha \right) dr = \int_0^R r^3 [2\pi]_0^{2\pi} dr$$

$$= \int_0^R r^3 [2\pi] dr = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi}{2} R^4$$

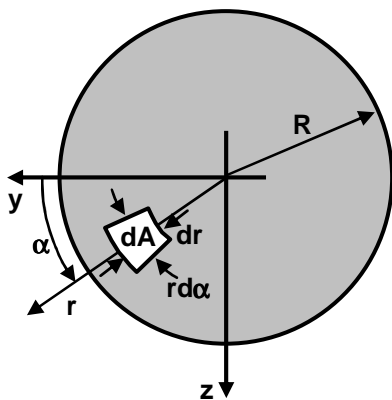


Abbildung 7.12: Kreisrundes Vollprofil zur Bestimmung des Torsionsflächenträgheitsmoments

Mit dem Quotient $d\varphi/dx$ können die Schubspannungen bestimmt werden.

$$\tau = G\gamma = Gr \frac{d\varphi}{dx} = Gr \frac{M_t}{GI_t} = \frac{M_t}{I_t} r \quad \Rightarrow \quad \tau(r) = \frac{M_t}{I_t} r$$

Die Tangentialen Schubspannungen $\tau(r)$ sind wie in Abbildung 7.13 dargestellt im Flächenmittelpunkt gleich null und erreichen am Außenradius R ihr Maximum τ_{\max} .

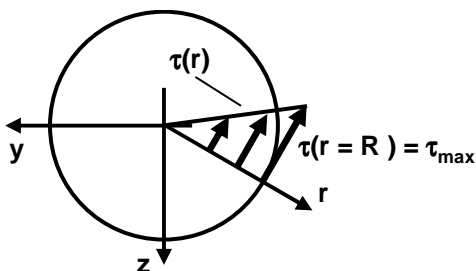


Abbildung 7.13: Schubspannungen infolge Torsionsmoment am kreisrunden Vollprofil

Für die Bestimmung der maximalen Schubspannung τ_{\max} kann auch das **Torsionswiderstandsmoment $W_t = I_t/R$** eingeführt werden.

$$\tau_{\max} = \tau(r=R) = \frac{M_t}{I_t} R = \frac{M_t}{I_t/R} = \frac{M_t}{W_t} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \quad \text{mit} \quad W_t = \frac{I_t}{R}$$

Der Gesamtverdrehwinkel φ ist die Summe aller Teilverdrehwinkel $d\varphi$ und kann durch ein Integral über der Stablänge L bestimmt werden.

$$\varphi = \int_L d\varphi = \int_L \frac{d\varphi}{dx} dx = \int_L \frac{M_t}{GI_t} dx = \frac{M_t}{GI_t} \int_L dx = \frac{M_t}{GI_t} L \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = \frac{M_t L}{GI_t}}$$

Das Produkt GI_t wird als **Torsionssteifigkeit** bezeichnet.

Für das Torsionsflächenträgheitsmoment eines Vollkreises gilt $I_t = \pi/2 R^4$. Betrachtet man ein Hohlprofil (Abbildung 7.14, Mitte) mit dem Außenradius R_a und dem Innenradius R_i , ist das Torsionsflächenträgheitsmoment die Differenz beider Kreise. Ist das Hohlprofil dünnwandig (Abbildung 7.14, rechts) kann $R_a = R_m + s/2$ und $R_i = R_m - s/2$ verwendet werden und das Torsionsflächenträgheitsmoment durch den mittleren Radius R_m und die Wandstärke s angeben werden, wobei alle Terme, die s in höherer Potenz beinhalten, vernachlässigt werden.

$$I_t = \frac{\pi}{2} R^4$$

$$I_t = \frac{\pi}{2} (R_a^4 - R_i^4)$$

$$I_t = 2\pi R_m^3 s$$

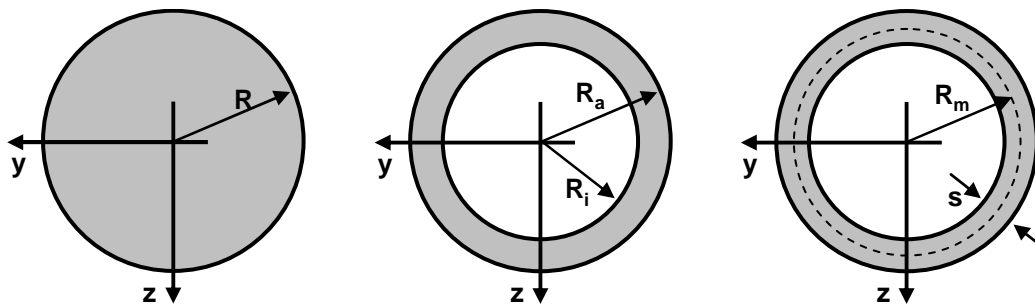


Abbildung 7.14: Kreisrunde Profile zur Berechnung des Torsionsflächenträgheitsmomentes I_t

Betrachtet man den in Abbildung 7.15 dargestellten kreisrunden Torsionsstab, der mit dem Torsionsmoment $M_t = 100\text{Nm}$ belastet wird, so erhält man die maximale Schubspannung $\tau_{\max} = 108\text{N/mm}^2$ und den Verdrehwinkel $\varphi = 0.067$. Dies entspricht 3.8° . Das Stabmaterial besitzt hierfür den Schubmodul $G = 80000\text{N/mm}^2$.

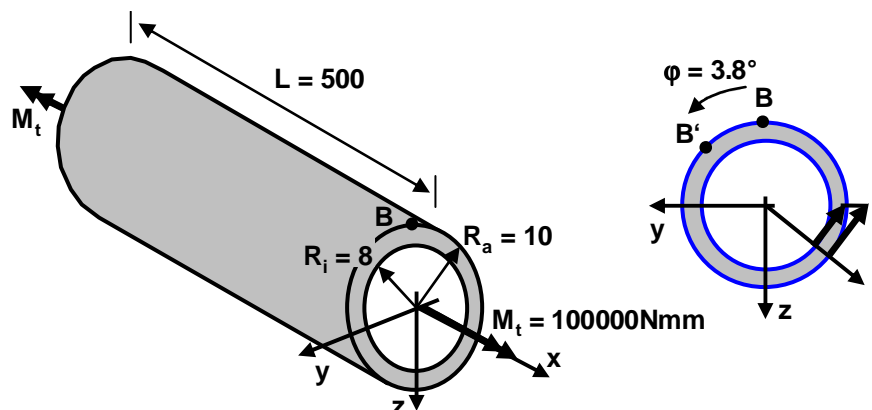


Abbildung 7.15: Kreisrunder Hohlstab zur Bestimmung der Torsionsspannungen und des Verdrehwinkels

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{I_t/R_a} = \frac{M_t}{\frac{\pi}{2} (R_a^4 - R_i^4)} R_a = \frac{100000\text{Nmm}}{\frac{\pi}{2} ((10\text{mm})^4 - (8\text{mm})^4)} 10\text{mm} = 108 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\varphi_{\max} = \frac{M_t L}{G I_t} = \frac{M_t L}{G \frac{\pi}{2} (R_a^4 - R_i^4)} = \frac{100000 \text{ Nmm} \cdot 500 \text{ mm}}{80000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \frac{\pi}{2} ((10 \text{ mm})^4 - (8 \text{ mm})^4)} = 0.067$$

7.3.2 Torsion dünnwandiger geschlossener Stäbe

Der in Abbildung 7.16, links dargestellte dünnwandige geschlossene Torsionsstab (geschlossene Profilmittellinie) mit der Länge L und der variablen Wandstärke s unter dem Einfluss des konstanten Torsionsmomentes M_t soll untersucht werden. Wird der Stab geschnitten, werden an den Schnittflächen die Schubspannungen τ sichtbar. Diese haben den wirksamen Hebelarm r_s .

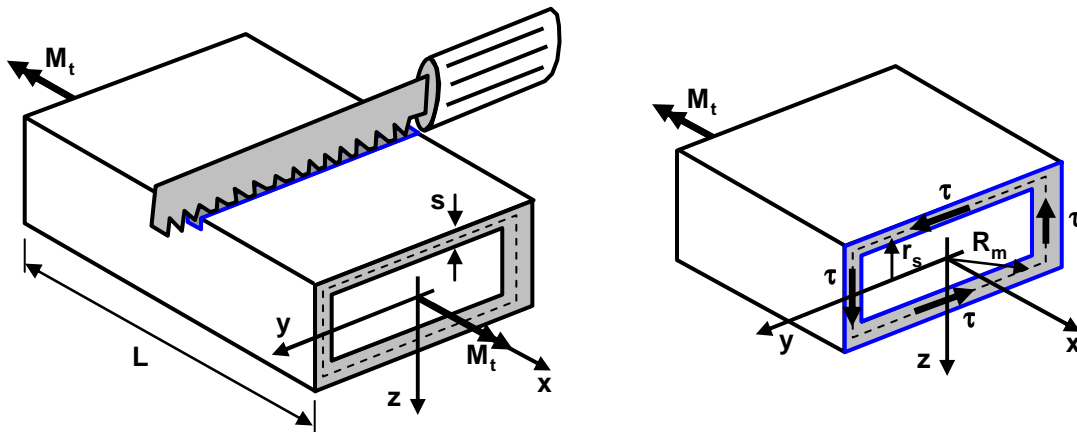


Abbildung 7.16: Dünwandiger geschlossener Stab unter dem Einfluss eines Torsionsmoments

Zu ihrer Bestimmung wird angenommen, dass die Schubspannungen tangential zur Profilmittellinie zeigen und über der Wandstärke konstant sind. Die Querschnitte können sich in x -Richtung frei verwölben. Dies bedeutet, dass in x -Richtung keine Normalspannungen wirksam sind. Werden sie aber in die yz -Ebene projiziert, bleiben die Querschnitte erhalten.

Unter Berücksichtigung dieser Annahmen können Formeln (vgl. Anhang A4) zur Bestimmung der Schubspannungen τ und des Verdrehwinkels φ angegeben werden.

$$\tau = \frac{M_t}{2A_m s}$$

Für die Bestimmung der lokalen Schubspannung τ muss die lokale Wandstärke s verwendet werden. A_m stellt den Inhalt der von der Profilmittellinie eingeschlossenen Fläche dar.

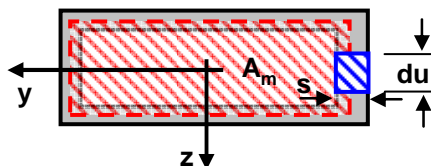


Abbildung 7.17: Definition der Fläche A_m und Längen zur Bestimmung des Quotienten du/s

Am Ort der minimalen Wandstärke s_{\min} erhält man die maximale Schubspannung τ_{\max} .

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{2A_m s_{\min}} = \frac{M_t}{W_t} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \quad \text{mit} \quad W_t = 2A_m s_{\min}$$

Für das Torsionsflächenträgheitsmoment I_t muss ein Ringintegral ausgewertet werden. Dies bedeutet, dass einmal entlang der Profilmittellinie integriert wird, wobei Startpunkt und Endpunkt identisch sind.

$$\varphi = \frac{M_t L}{G I_t}$$

$$I_t = \frac{4A_m^2}{\oint_s \frac{du}{s}}$$

Ist die Wandstärke über der ganzen Länge der Profilmittellinie konstant (vgl. Abbildung 7.18), kann die Bestimmung des Torsionsflächenträgheitsmoment I_t vereinfacht werden. U_m ist die Länge der Profilmittellinie bzw. der Umfang von A_m .

$$I_t = \frac{4A_m^2}{\oint_s \frac{du}{s}} = \frac{4A_m^2}{\frac{1}{s} \oint du} = \frac{4A_m^2 s}{\oint du} = \frac{4A_m^2 s}{U_m} \Rightarrow I_t = \frac{4A_m^2 s}{U_m}$$

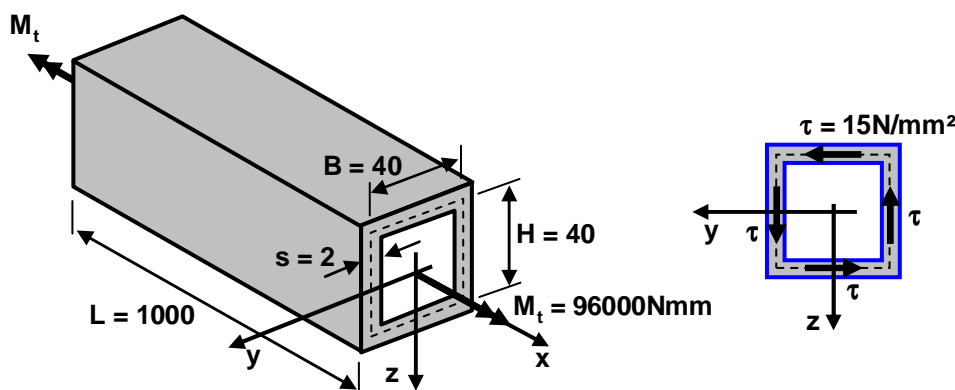


Abbildung 7.18: Dünnwandiger geschlossener Torsionsstab mit konstanter Wandstärke

An dem in Abbildung 7.18 dargestellten dünnwandigen geschlossenen Torsionsstab wirkt die Schubspannung $\tau = \tau_{\max} = 15 \text{ N/mm}^2$. Bei einem Schubmodul von $G = 80000 \text{ N/mm}^2$ resultiert ein Verdrehwinkel $\varphi = 0.009375$. Dies entspricht 0.54° .

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{2A_m s} = \frac{M_t}{2BHs} = \frac{96000 \text{ Nmm}}{2(40 \text{ mm})(40 \text{ mm})(2 \text{ mm})} = 15 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\varphi = \frac{M_t L}{G I_t} = \frac{M_t L}{G \frac{4A_m^2 s}{U_m}} = \frac{M_t L}{G \frac{4(BH)^2 s}{(2B+2H)}} = \frac{96000 \text{ Nmm} \cdot 1000 \text{ mm}}{80000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \frac{4((40 \text{ mm})(40 \text{ mm}))^2 (2 \text{ mm})}{(2(40 \text{ mm}) + 2(40 \text{ mm}))}} = 0.009375$$

7.3.3 Torsion dünnwandiger offener Stäbe

Die Querschnitte dünnwandiger offener Stäbe (Profilmittellinie nicht geschlossen) können aus n Rechtecken mit konstanter Wandstärke s_i und der Länge U_i in Profilmittelinienrichtung zusammengesetzt werden. Die einzelnen Rechtecke kann man als ineinandergeschachtelte dünnwandige geschlossene Profile beschreiben. Basierend auf diesen Annahmen können die im Folgenden vorgestellten Berechnungsformeln (vgl. Anhang A5) hergeleitet werden. Da sie auf den Formeln für dünnwandige ge-

geschlossene Profile aufbauen, müssen die Annahmen von Kapitel 7.3.2 übernommen werden. Stellvertretend wird das in Abbildung 7.19 dargestellte U-Profil mit der Länge L unter dem Einfluss des konstanten Torsionsmomentes M_t betrachtet.

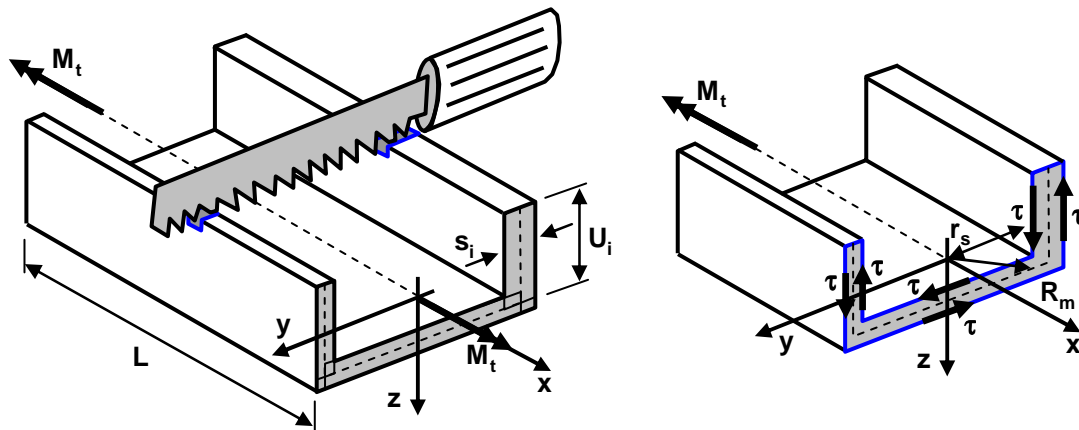


Abbildung 7.19: Dünwandiger offener Stab unter dem Einfluss eines Torsionsmomentes

Die Berechnungsformel für die maximale Schubspannung τ_{\max} und den Verdrehwinkel φ sind identisch wie beim geschlossenen Profil.

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t}$$

$$\varphi = \frac{M_t L}{G I_t}$$

Beim Torsionsflächenträgheitsmoment I_t und dem Torsionswiderstandsmoment W_t unterscheiden sich beide Profile.

$$I_t = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n s_i^3 U_i$$

$$W_t = \frac{I_t}{s_{\max}}$$

Auf der Profilmittellinie ist die Schubspannung gleich null. Nach außen nimmt sie linear zu und wirkt auf beiden Seiten der Profilmittellinie gegenläufig. Im Rechteck mit der maximalen Wandstärke s_{\max} nimmt sie den maximalen Wert τ_{\max} an.

Der in Abbildung 7.20 dargestellte dünnwandige offene Torsionsstab unterscheidet sich vom Stab aus Abbildung 7.18 dadurch, dass er an einer Seite parallel zur x-Achse aufgeschnitten ist. Die Höhe des Schlitzes sei näherungsweise gleich null.

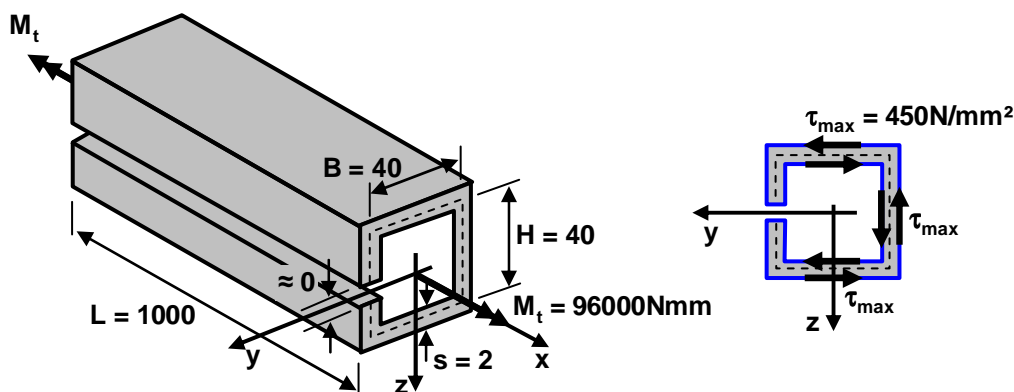


Abbildung 7.20: Dünnwandiger offener Torsionsstab

Die maximale Schubspannung beträgt $\tau_{\max} = 450 \text{ N/mm}^2$. Der Schubmodul sei $G = 80000 \text{ N/mm}^2$. Es resultiert ein Verdrehwinkel $\varphi = 2.8125$. Dies entspricht 161.14° .

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{I_t} = \frac{M_t}{\frac{1}{3} \cdot (2B + 2H)s^3} = \frac{M_t}{(2B + 2H)s^2} = \frac{96000 \text{ Nmm}}{\frac{(2(40 \text{ mm}) + 2(40 \text{ mm}))(2 \text{ mm})^2}{3}} = 450 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\varphi = \frac{M_t L}{GI_t} = \frac{M_t L}{G \frac{(2B + 2H)s^3}{3}} = \frac{96000 \text{ Nmm} \cdot 1000 \text{ mm}}{80000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \frac{(2(40 \text{ mm}) + 2(40 \text{ mm}))(2 \text{ mm})^3}{3}} = 2.8125$$

7.4 Spannungsüberlagerung bei Zug-, Biege- und Torsionsstab bzw. Balken

Häufig treten in einem Bauteil gleichzeitig Normalspannungen infolge der Normalkraft σ_N und infolge des Biegemoments σ_B auf. Sie werden unabhängig voneinander berechnet und abschließend überlagert. Gleiches gilt für die Schubspannungen infolge Querkraft τ_Q und der Schubspannung infolge des Torsionsmomentes τ_T . Meistens überwiegen die Spannungen σ_B und τ_T . Daher können die beiden anderen oft vernachlässigt werden. Im Folgenden soll τ_Q immer unberücksichtigt bleiben. Diese Überlagerung wird als **Superpositionierung** bezeichnet. Sie ist bei linearer Rechnung immer möglich. Dies ist bei den in diesem Manuscript gewählten Annahmen sowohl bei der Spannungs- als auch bei der Verformungsberechnung immer erfüllt.

Für das in Abbildung 7.21 dargestellte Bauteil sind die maximalen Zug- und Druckspannungen, die maximalen Schubspannung und die maximale Vergleichsspannung nach Mises gesucht. Das Bauteil hat einen dünnwandigen quadratischen Querschnitt. Es gelte $F/(Ls) = 1 \text{ N/mm}^2$.

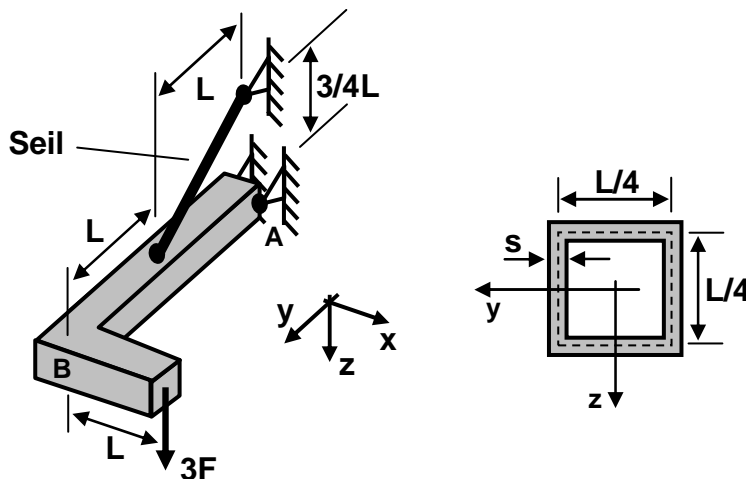


Abbildung 7.21: Bauteil zur Betrachtung der Überlagerung von Spannungen infolge Normalkraft, Biegemoment und Torsionsmoment

In Abbildung 7.22 sind die resultierenden Lager- und Schnittgrößen dargestellt. Ebenso die resultierenden inneren Kräfte und Momente in den beiden Teilbalken des Bauteils. Die resultierende Querschnittsfläche beträgt $A = Ls$, das Flächenträgheitsmoment $I_y = L^3s/96$ und das Torsionswiderstandsmoment $W_t = L^2s/8$.

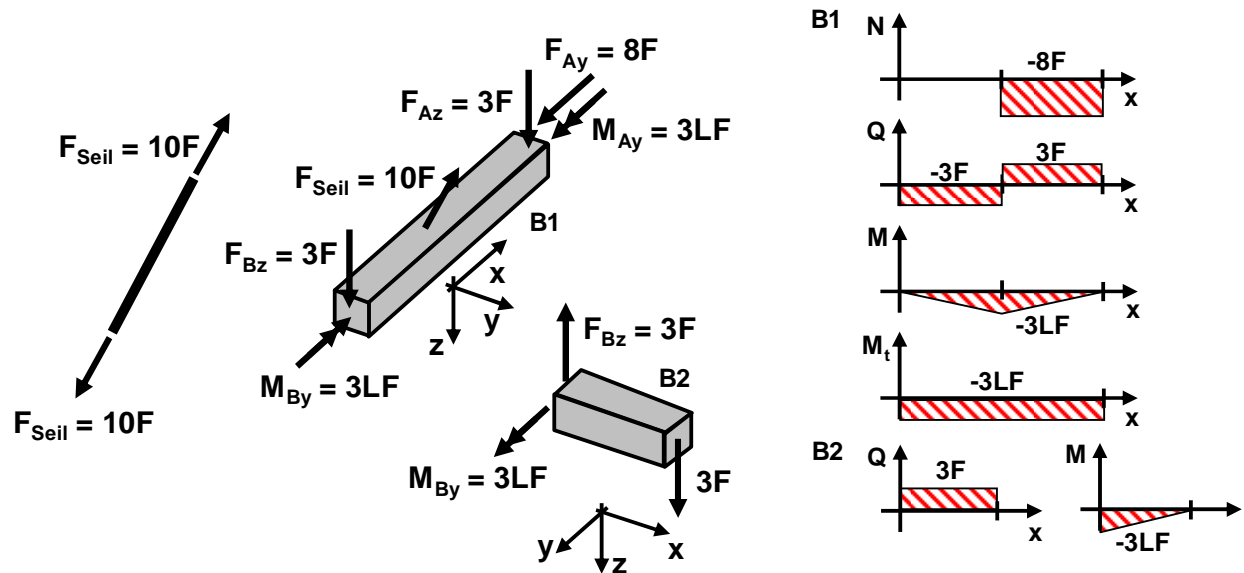


Abbildung 7.22: Lager-, Schnittgrößen und innere Kräfte und Momente im Bauteil aus Abbildung 7.21

Die maximalen Normalspannungen infolge des Biegemoments treten am Ort des maximalen Biegemoments auf. Dies ist in der Mitte von Balken B1 und am Anfang von B2.

$$\sigma_B(z) = \frac{M}{I_y} z = \frac{-3LF}{L^3/96} z = -288 \frac{F}{L^2 s} z$$

Infolge der negativen Konstanten der Spannungsfunktion sind an der Querschnittsoberseite ($z = -L/8$) die maximalen Zugspannungen $\sigma_{B,Z}$ und an der Querschnittsunterseite ($z = L/8$) die maximalen Druckspannungen $\sigma_{B,D}$ infolge des Biegemoments.

$$\sigma_{B,Z} = \sigma_B \left(z = -\frac{L}{8} \right) = -288 \frac{F}{L^2 s} \left(-\frac{L}{8} \right) = 36 \frac{F}{Ls} = 36 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{B,D} = \sigma_B \left(z = \frac{L}{8} \right) = -288 \frac{F}{L^2 s} \frac{L}{8} = -36 \frac{F}{Ls} = -36 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

In der zweiten Hälfte von B1 wirkt eine Normalkraft. Daraus resultiert in diesem Bereich eine Normalspannung σ_N .

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{-8F}{Ls} = -8 \frac{F}{Ls} = -8 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Für die maximale Druckspannung σ_{Druck} werden die beiden negativen Druckspannungen $\sigma_{B,D}$ und σ_N addiert.

$$\sigma_{\text{Druck}} = \sigma_{B,D} + \sigma_N = -36 \frac{F}{Ls} - 8 \frac{F}{Ls} = -44 \frac{F}{Ls} = -44 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

Bei der Bestimmung der maximalen Zugspannung σ_{Zug} darf nicht $\sigma_{B,Z}$ und σ_N addiert werden. Es muss berücksichtigt werden, dass es Bereiche gibt, bei welchen nur die Zugspannung $\sigma_{B,Z}$ wirksam ist, die allein den größten positiven Wert ergibt.

$$\sigma_{\text{Zug}} = \sigma_{B,Z} = 36 \frac{F}{Ls} = 36 \frac{N}{\text{mm}^2}$$

In Abbildung 7.23 ist der Normalspannungsverlauf kurz vor (7.23, links) und kurz nach der Balkenmitte (7.23, Mitte) von Balken B1 skizziert.

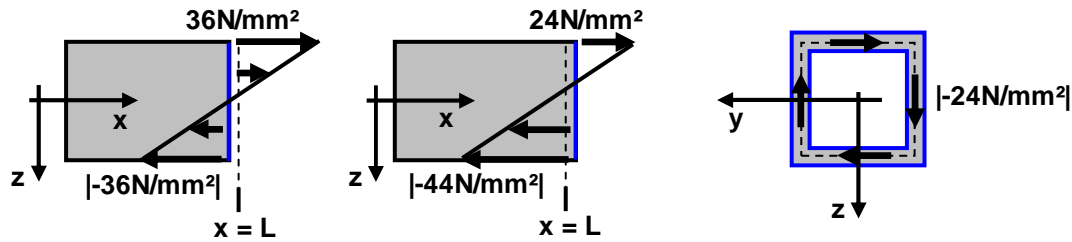


Abbildung 7.23: Normalspannungsverlauf kurz vor und nach der Balkenmitte in B1 des Bauteils aus Abbildung 7.21, Schubspannungsverlauf infolge Torsionsmoments in B1

Nur im Balken B1 ist ein Torsionsmoment vorhanden. Da das Torsionsmoment über der gesamten Balkenlänge konstant ist und ebenso die Wandstärke, erhält man im gesamten Balken, wie in Abbildung 7.23, rechts dargestellt, eine konstante Schubspannung τ_T infolge des Torsionsmoments.

$$\tau_T = \frac{M_t}{W_t} = \frac{-3LF}{L^2s/8} = -24 \frac{F}{Ls} = -24 \frac{N}{mm^2}$$

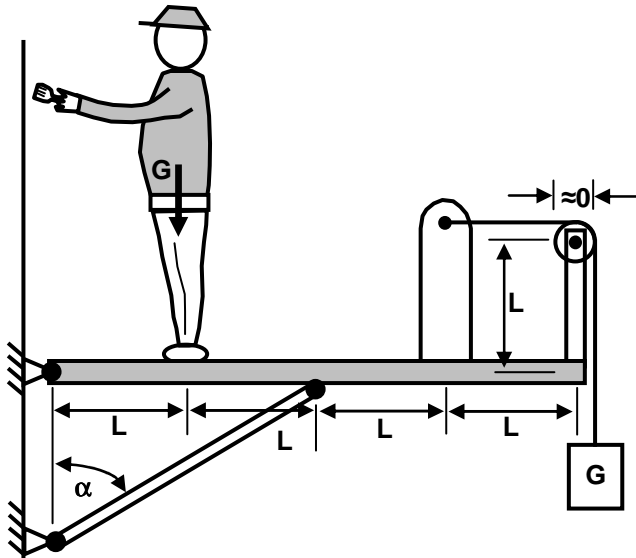
Für die maximale Vergleichsspannung σ_V nach Mises verwendet man die Normalspannung mit dem maximalen Betrag σ_{Druck} und die Schubspannung τ_T .

$$\sigma_V = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\sigma_{Druck}^2 + 3\tau_T^2} = \sqrt{\left(-44 \frac{F}{Ls}\right)^2 + 3\left(-24 \frac{F}{Ls}\right)^2} = \frac{F}{Ls} \sqrt{3664} = 60.5 \frac{N}{mm^2}$$

Aufgaben zu Kapitel 7.3 und 7.4

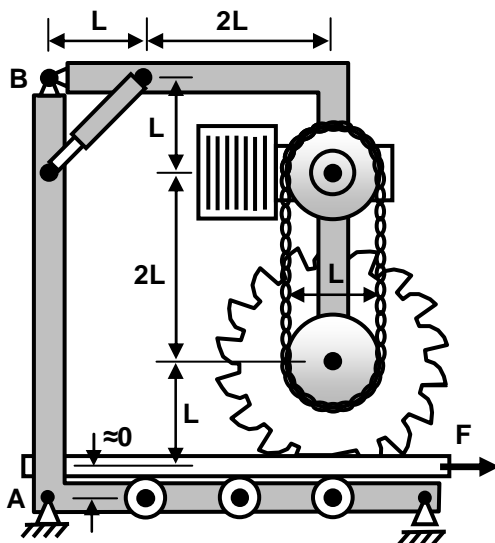
Aufgabe 7.4.1

Die graue Arbeitsplattform hat die Breite $B = 50H$ und die Höhe H ($\tan\alpha = 1.6$, $G = 1000\text{N}$, $L = 25H$). Wie groß ist H , wenn die maximale Normalspannung $\sigma = 15.2\text{N/mm}^2$ beträgt (Lösung: $H = 20\text{mm}$)?



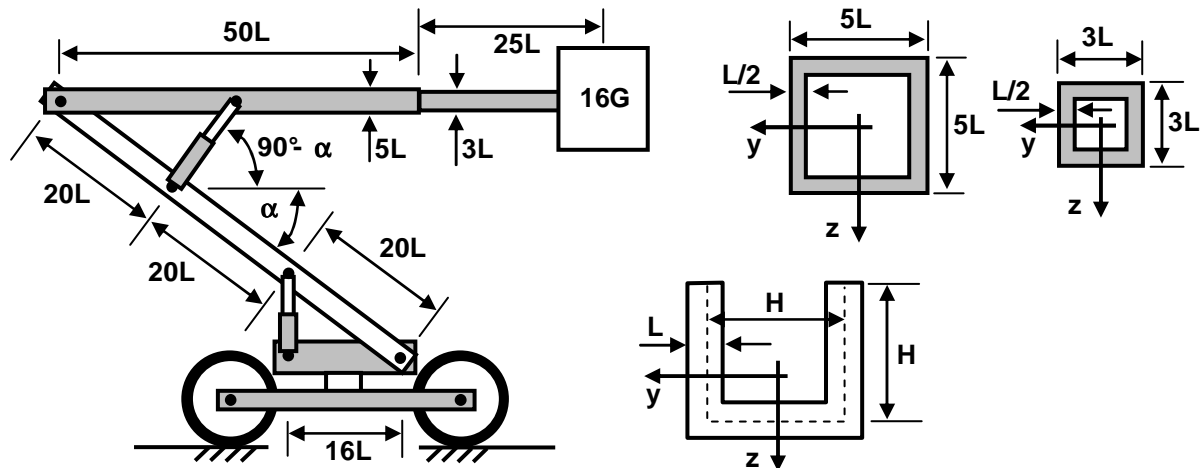
Aufgabe 7.4.2

An der Kreissäge übt das Sägeblatt nur eine waagrechte Kraft auf das Holzbrett aus. Das Blatt wird über eine Kette von einem Elektromotor angetrieben. Für das Freischneiden kann die Wirkung des Motors so berücksichtigt werden, dass das obere Zahnrad fest am Rahmen angebunden ist. Der Rahmen hat ein dünnwandiges rechteckiges Profil mit der Breite H , der Höhe $3H$ und der Wandstärke s . ($H = L/4$, $F/(Hs) = 10\text{N/mm}^2$) Gesucht sind die maximalen Zug- und Druckspannungen im Balken AB. Kurv vor und kurz nach dem Anbindungspunkt des Hydraulikzylinders ist der Verlauf der Normalspannungen über dem Querschnitt zu skizzieren ($\sigma_z = 20\text{N/mm}^2$, $\sigma_D = -25\text{N/mm}^2$).



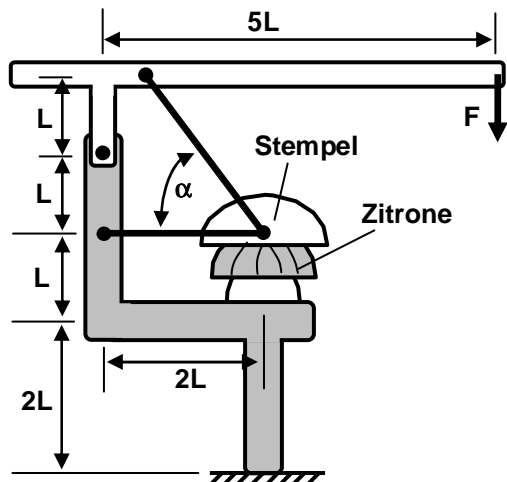
Aufgabe 7.4.3

Bei der Betrachtung einer Hebebühne ist nur die Gewichtskraft $16G$ des Korbes zu berücksichtigen ($G/L^2 = 1\text{Nmm}^2$). Der waagrechte Teleskoparm besteht aus den dargestellten quadratischen Profilen. Der Diagonalbalken hat ein dünnwandiges U-Profil. Wie groß sind die maximalen Normalspannungen im waagrechten Teleskoparm (Lösung $\sigma_{\max} = 110.8\text{N/mm}^2$)? Wie ist H gewählt, wenn im Diagonalbalken die maximale Normalspannung 76.16N/mm^2 beträgt (Lösung: $H = 5L$)?



Aufgabe 7.4.4

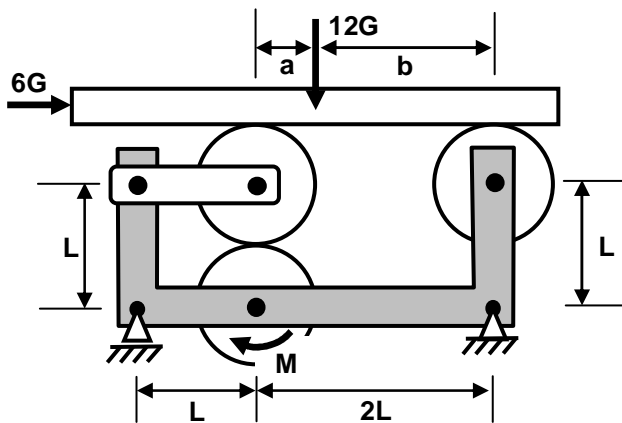
Die dargestellte Zitronenpresse ist zu untersuchen. Zwischen Stempel und Zitrone können nur senkrechte **Kräfte** übertragen werden. Der graue Rahmen besteht aus einem dünnwandigen, quadratischen Profil mit der Kantenlänge H und der Wandstärke s ($\tan\alpha = 4/3$, $L = 1.5H$, $F/(Hs) = 8\text{N/mm}^2$).



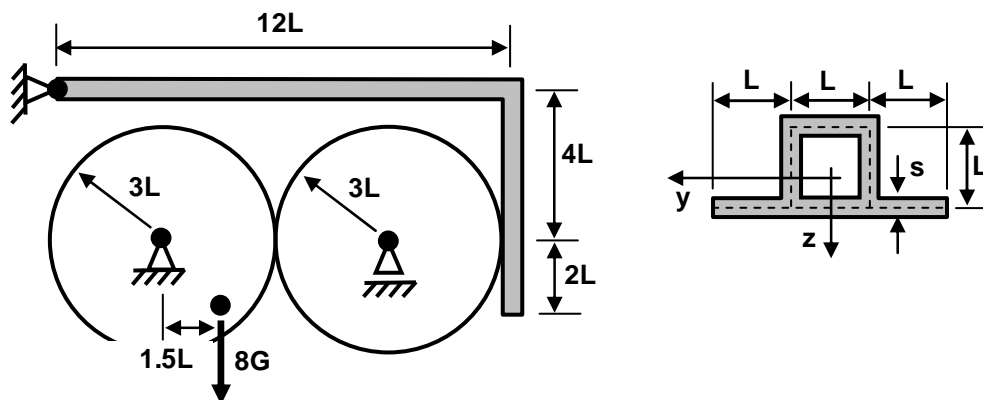
- Gesucht sind die Zug- und Druckspannungen im grauen Rahmen. In der Mitte der Balken ist der Normalspannungsverlauf zu zeichnen. (Lösung: $\sigma_Z = 33\text{N/mm}^2$, $\sigma_D = -29\text{N/mm}^2$).
- Wie groß muss die Zugsteifigkeit EA in Abhängigkeit von F des waagrechten Zugstabes sein, wenn er sich um 1% verlängert (Lösung: $EA = 300F$)?

Aufgabe 7.4.5

Auf einem Segment eines Transportsystems liegt ein Transportgut mit der Gewichtskraft $12G$. In waagrechter Richtung wirkt eine Widerstandskraft von $6G$. Das Gesamtbauteil ist im Gleichgewicht. Die Höhe des Transportgutes ist zu vernachlässigen. Die beiden Längen a und b haben das Verhältnis $b/a = 3$. Alle Rollen sind gleich groß. Der graue Rahmen besteht aus einem rechteckigen, dünnwandigen Hohlprofil mit der Breite $H = 42\text{mm}$, der Höhe $2H$ und einer Wandstärke $s = 2\text{mm}$ ($G = 84\text{N}$, $L = 80\text{mm}$). Die maximalen Zug- und Druckspannungen im waagrechten Balken des grauen Rahmens sind zu bestimmen (Lösung: $\sigma_Z = 7\text{N/mm}^2$, $\sigma_D = -10\text{N/mm}^2$). Am Ort der maximalen Normalspannung im waagrechten Balken des grauen Rahmens ist der Spannungsverlauf zu zeichnen.

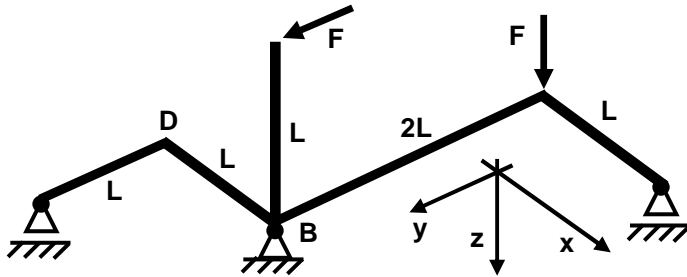
**Aufgabe 7.4.6**

Der graue L-förmige Hebel mit dem dargestellten dünnwandigen Querschnitt hat die Gewichtskraft F , die als Streckenlast zu berücksichtigen ist. An den beiden Kontaktflächen (Rad/Rad und Rad/Hebel) ist der Haftreibungskoeffizient $\mu = 2/3$ wirksam. ($G/(Ls) = 9\text{N/mm}^2$). Das Bauteil ist im Gleichgewicht. Gesucht sind im waagrechten Balken die maximalen Zug- und Druckspannungen. Am Ort der maximalen Normalspannungen ist der Verlauf über dem Querschnitt zu zeichnen (Lösung: $\sigma_Z = 84\text{N/mm}^2$, $\sigma_D = -141\text{N/mm}^2$).

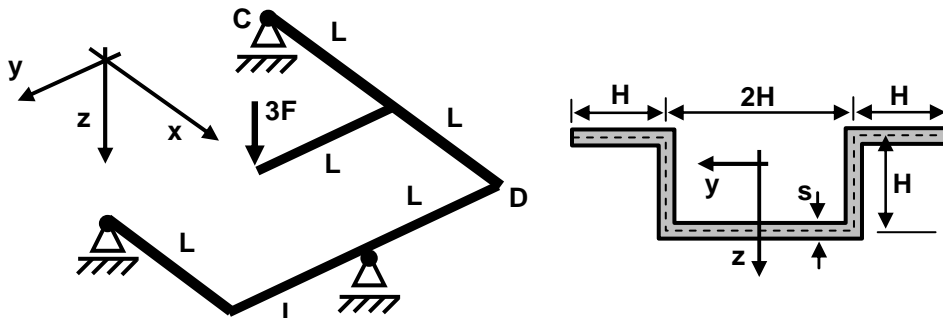


Aufgabe 7.4.7

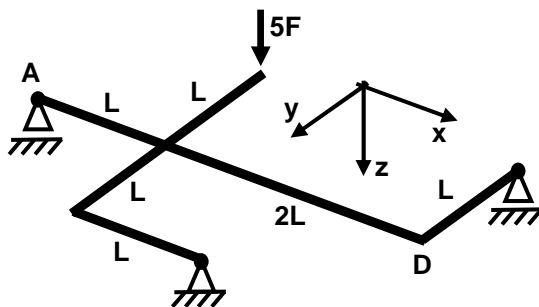
Das Bauteil besteht entweder aus einem dünnwandigen, kreisrunden Profil mit dem Radius R_m oder einem dünnwandigen quadratischen Profil mit der Kantenlänge H . Die Wandstärke beträgt jeweils s . Welches Verhältnis R_m/H muss im Balken DB gewählt werden, damit bei beiden Varianten die gleichen maximalen Vergleichsspannungen σ_V nach Mises wirksam sind? Nur die Momente sind zu berücksichtigen (Lösung: $R_m/H = 0.606$).

**Aufgabe 7.4.8**

Das Bauteil mit dem dünnwandigen offenen Profil ist zu untersuchen. Nur die Momente sind zu berücksichtigen. Es ist zu zeigen, dass im Balken CD die maximale Vergleichsspannung σ_V nach Mises ungefähr $3/2\sqrt{3}N/mm^2$ beträgt ($LF/(Hs^2) = 1N/mm^2$).

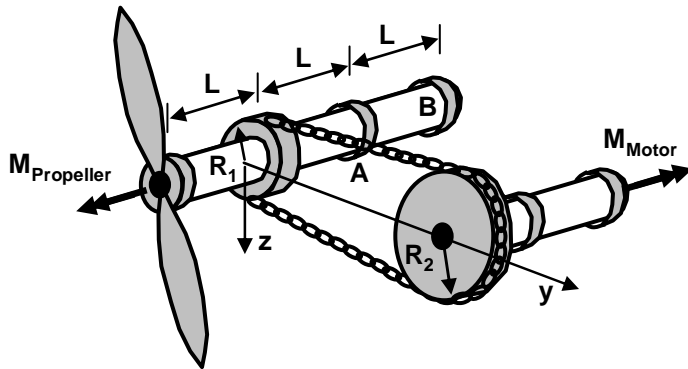
**Aufgabe 7.4.9**

Der Balken AD besteht aus einem rechteckigen, dünnwandigen Profil mit der Höhe cH der Breite H und der Wandstärke s . Der Parameter c ist so zu wählen, dass die maximale Normalspannung infolge des Biegemoments identisch mit der maximalen Schubspannung infolge des Torsionsmoments ist (Lösung: $c = 9$).



Aufgabe 7.4.10

Mit den eingezeichneten Momenten $M_{\text{Propeller}}$ und $M_{\text{Motor}} = 100\text{Nm}$ und den Lagerkräften ist das Bauteil im Gleichgewicht. Eine Kettenkraft ist gleich null, die Lager A und B erzeugen nur Kräfte in y- und z-Richtung. Nur die Momente sind zu berücksichtigen. Die linke Welle ist dünnwandig mit dem Radius $R_m = 10\text{mm}$ und der Wandstärke $s = 2\text{mm}$. Zu bestimmen ist die maximale Vergleichsspannung σ_v nach Mises in der linken Welle ($R_1 = 100\text{mm}$, $R_2 = L = 200\text{mm}$) (Lösung: $\sigma_v = 159.2\text{N/mm}^2$).



Aufgabe 7.4.11

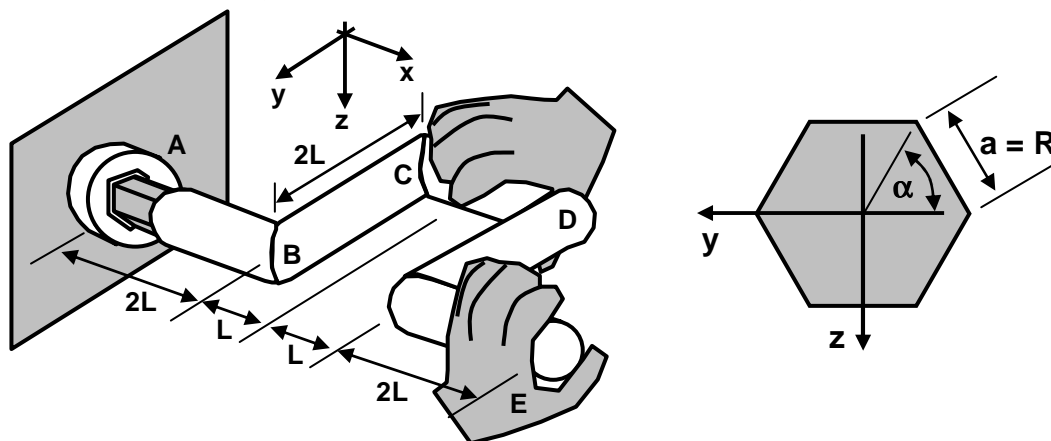
Um die Schraube zu öffnen, benötigt man an ihr ein positives Moment LF in x-Richtung. Der Schraubendreher hat ein kreisrundes Vollprofil mit dem Radius R . Es wirken nur senkrechte Kräfte, nur die Momente sind zu berücksichtigen ($LF/R^3 = 20\text{N/mm}^2$).

a.) An der Schraube ist kein weiteres Moment wirksam. Welche maximale Vergleichsspannung σ_v resultiert im Balken CD (Lösung: $\sigma_v = 22.1\text{N/mm}^2$).

Die Hand E lässt den Schraubendreher los. Näherungsweise gilt am Punkt A für das Sechseck $W_t = 2I_y / (R \cos 30^\circ)$. Für ein n-Eck gilt allgemein gemäß der Skizze für das Sechseck:

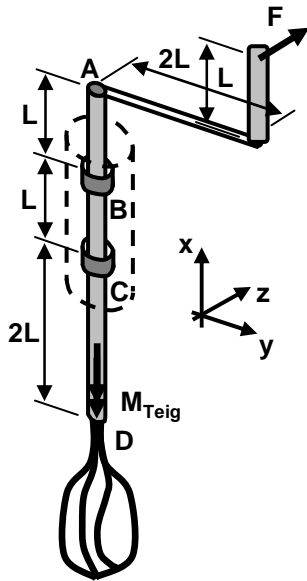
$$I_y(n) = \frac{n}{96} a^4 \frac{2 + \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2} \sin \alpha$$

b.) Welche Vergleichsspannung σ_v erhält man dann am Punkt A beim Öffnen der Schraube? Gegen welchen Wert strebt $I_y(n)$ für großes n (Lösung: $\sigma_v = 55.4\text{N/mm}^2$, $I_y(n \rightarrow \infty) = \pi/4 R^4$)?

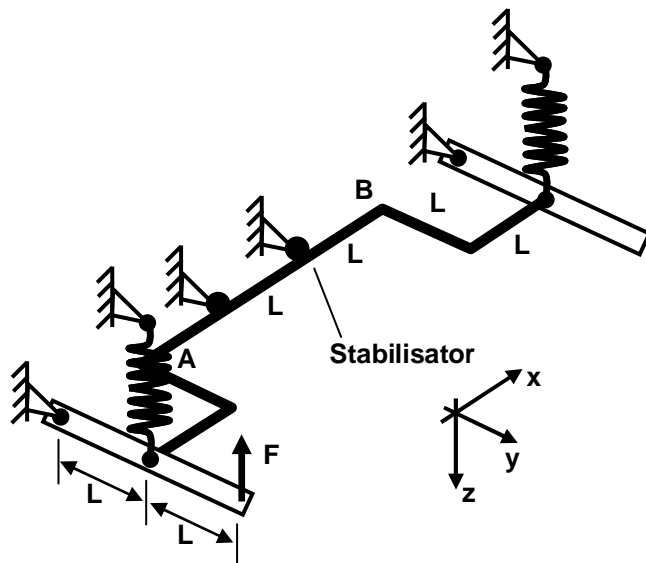


Aufgabe 7.4.12

Die kreisrunde Vollwelle des Handrührgeräts ist zwischen den Punkten A und D zu untersuchen. Sie ist an den Lagern B und C, die sich im nicht zu beachtenden, gestrichelten Griff befinden, drehbar gelagert. Infolge des Teigwiderstands wirkt am Punkt D das Moment M_{Teig} . ($L = 50\text{mm}$, $F = 10\text{N}$, $G = 25000\text{N/mm}^2$). Welchen Radius R muss die Vollwelle DA besitzen, damit die maximale Vergleichsspannung σ_V nach Mises 20N/mm^2 beträgt? Um wie viel Grad verdreht sich die Welle zwischen den Punkten A und D um die eigene Stabachse? Nur die Momente sind zu berücksichtigen (Lösung: $R = 4.4\text{mm}$, $\varphi = 0.78^\circ$)

**Aufgabe 7.4.13**

Der symmetrische Stabilisator besteht aus 7 Segmenten der Länge L . Auf ihn wirken von außen nur Kräfte. Beide Federkräfte seien näherungsweise identisch. Der Abschnitt AB mit der Länge $3L$ ist dünnwandig und kreisförmig. Welchen Wert hat R_m , wenn $LF/(\pi s \sigma_V) = 11.4708\text{mm}^2$ gilt? σ_V ist die maximale Vergleichsspannung im Balken AB (Lösung: $R_m = 5\text{mm}$).



7.5 Verschiebungsberechnung mit der Energiemethode

Ist an einem Bauteil nur die Verschiebung eines Punktes in einer Richtung gesucht, so ist die Verschiebungsberechnung mit der Energiemethode sehr geeignet. Z.B kann an dem in Abbildung 7.24 dargestellten Bauteil, welches dem aus Abbildung 7.21 entspricht, die senkrechte Verschiebung u_C am Kraftangriffspunkt C bestimmt werden.

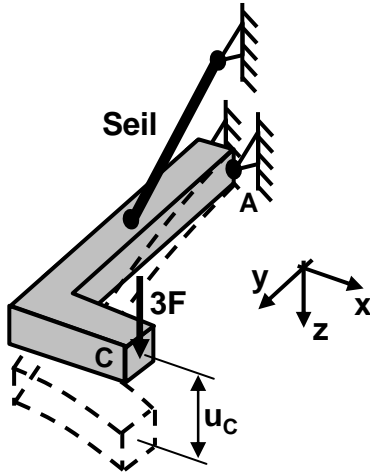


Abbildung 7.24: Geometrie aus Abbildung 7.21 zur Bestimmung der Absenkung u_C mit Hilfe der Energiemethode

Das Bauteil sei durch die Normalkraft N , die Querkraft $Q = Q_z$, das Biegemoment $M = M_y$ und das Torsionsmoment M_t belastet. Gesucht ist die Verschiebung u eines Bauteilpunktes in einer Richtung infolge der Bauteilbelastung. Dann gliedert sich die Anwendung der Energiemethode in drei Schritte, die im Folgenden (Herleitung im Anhang A6) vorgestellt werden:

- Bestimmung der inneren Kräfte und Momente (N , Q , M , M_t) infolge der gegebenen Bauteilbelastung.
- Alle gegebenen Bauteilbelastungen werden entfernt. Es resultiert ein gelagertes, unbelastetes Bauteil. Am Punkt der gesuchten Verschiebung u wird eine Kraft „eins“ (Einheitskraft) in Richtung der gesuchten Verschiebung angebracht. Die inneren Kräfte und Momente (N_E , Q_E , M_E , M_{tE}) infolge dieser Einheitskraft werden bestimmt.
- Die Teilverschiebungen u_N infolge der Normalkraft, u_Q infolge der Querkraft, u_B infolge des Biegemoments und u_T infolge des Torsionsmoments werden unabhängig mit den folgenden Formeln bestimmt:

$$u_N = \int_c \frac{NN_E}{EA} dx \quad u_Q = \int_c \frac{QQ_E}{GA} dx \quad u_B = \int_c \frac{MM_E}{EI_y} dx \quad u_T = \int_c \frac{M_t M_{tE}}{GI_t} dx$$

Die Intervalllänge c ist die Summe der Längen der Teilbalken des Bauteils. Die Gesamtverschiebung u ist die Summe dieser Teilverschiebungen.

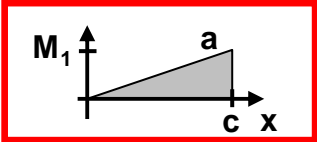
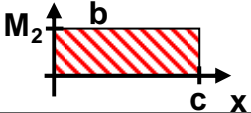
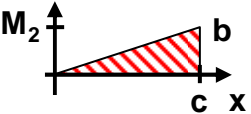
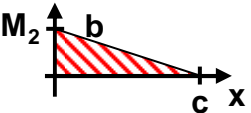

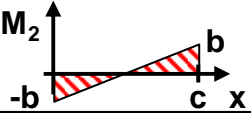
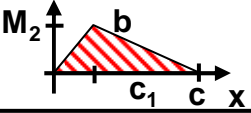
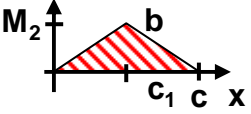
$$u = u_N + u_Q + u_B + u_T$$

Häufig sind die Verschiebungen u_N und u_Q viel kleiner als die Verschiebungen u_B und u_T . Daher wird im Folgenden u_Q immer vernachlässigt und u_N muss nur unberücksichtigt werden, wenn es explizit eingefordert wird. Das Produkt EA wird als **Zugsteifigkeit** bezeichnet. Die inneren Kräfte und Momente N_E , Q_E , M_E , M_{tE} sind keine physikalischen Kräfte und Momente, sondern Verhältnisse zweier Kräfte bzw. eines Moments und einer Kraft. Daher sind N_E und Q_E dimensionslos bzw. sie haben die

Einheit [N/N]. M_E und M_{tE} haben beide die Einheit [Nmm/N = mm]. Sind an einem Bauteil keine Verschiebungen, sondern eine Verdrehung gesucht, muss entsprechend mit einem Einheitsmoment gearbeitet werden. Für das Lösen der Integrale können die in den Abbildungen 7.25 und 7.26 aufgeführten Integrationstafeln verwendet werden. In diesen werden nur die Biege- und Torsionsmomente aufgeführt, die Vorgehensweise lässt sich aber auch Normal- und Querkraft übertragen.

Allgemeine Anmerkungen zur Anwendung der Integrationstafeln:

- Wenn M bzw. $M_t = M_1$ ist, folgt M_E bzw. $M_{tE} = M_2$. Aber es ist auch zulässig, dass M bzw. $M_t = M_2$ und M_E bzw. $M_{tE} = M_1$ ist. Z.B. ist Dreieck mit Viereck identisch zu Viereck mit Dreieck. Daher ist nur das erstgenannte aufgeführt.
- Die Integralwerte sind symmetrisch. Das bedeutet, die Schaubilder können an einer senkrechten Achse bei $c/2$ gespiegelt werden.
- Die Funktionswerte a , a_1 , a_2 , b , b_1 und b_2 können positiv und negativ sein

Dreieck mit		
1.) Rechteck		$\int_c M_1 M_2 dx = \frac{abc}{2}$
2.) Dreieck, gleiche Seite		$\int_c M_1 M_2 dx = \frac{abc}{3}$
3.) Dreieck, Gegenseite		$\int_c M_1 M_2 dx = \frac{abc}{6}$
4.) Trapez		$\int_c M_1 M_2 dx = \frac{ac(b_1 + 2b_2)}{6}$
5.) Trapez, Sonderfall von 4.), $b_1 = -b$, $b_2 = b$		$\int_c M_1 M_2 dx = \frac{abc}{6}$
6.) Dach		$\int_c M_1 M_2 dx = \frac{ab(c + c_1)}{6}$
7.) Dach, Sonderfall von 6.), $c_1 = c/2$		$\int_c M_1 M_2 dx = \frac{abc}{4}$

Anmerkung zu 4.) Dreieck mit Trapez:

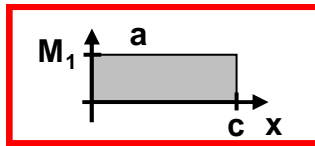
- Das Trapez hat dort den Funktionswert b_2 , wo das Dreieck den Funktionswert a besitzt.

Anmerkung zu 6.) Dreieck mit Dach:

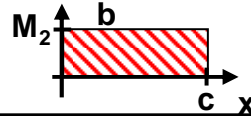
- Die Länge c_1 beschreibt den Abstand zwischen den x-Positionen, an denen das Dreieck den Wert a und das Dach den Wert b besitzt.

Abbildung 7.25: Integrationstafeln Teil 1 zur Berechnung der Integrale bei Anwendung der Energiemethode

Rechteck mit

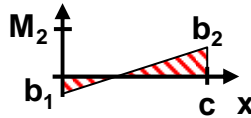


8.) Rechteck



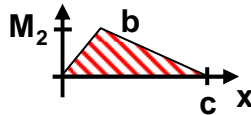
$$\int_c M_1 M_2 dx = abc$$

9.) Trapez



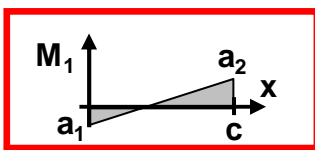
$$\int_c M_1 M_2 dx = \frac{ac(b_1 + b_2)}{2}$$

10.) Dach

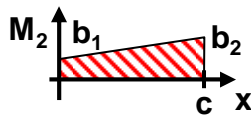


$$\int_c M_1 M_2 dx = \frac{abc}{2}$$

Trapez mit

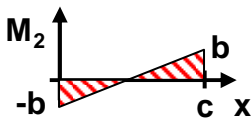


11.) Trapez



$$\int_c M_1 M_2 dx = \frac{c(a_1(2b_1 + b_2) + a_2(b_1 + 2b_2))}{6}$$

12.) Trapez, Sonderfall von 11.), $b_1 = -b$, $b_2 = b$

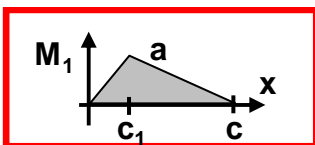


$$\int_c M_1 M_2 dx = \frac{bc(a_2 - a_1)}{6}$$

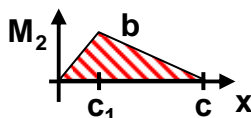
Anmerkung zu 11.) Trapez mit Trapez:

- Das zweite Trapez hat den Funktionswert b_2 an der x-Position, wo das erste Trapez den Funktionswert a_2 besitzt.
- Alle anderen Formeln sind Vereinfachungen dieser Formel

Dach mit



13.) Dach, beide Dachspitzen haben die gleiche x-Position c_1



$$\int_c M_1 M_2 dx = \frac{abc}{3}$$

Abbildung 7.26: Integrations tafeln Teil 2 zur Berechnung der Integrale bei Anwendung der Energiemethode

Betrachtet man die Aufgabenstellung aus Abbildung 7.24 muss am Punkt C eine Kraft „eins“ in positive z-Richtung am Bauteil angebracht werden. Die innere Kräfte und Momente können der Abbildung 7.22 entnommen werden, die infolge der Einheitskraft sind in Abbildung 7.27 aufgezeichnet. Zusätzlich zur Spannungsberechnung wird das Torsionsflächenträgheitsmoment $I_t = L^3s/64$ benötigt. Weiter sei $F/(Es) = 0.1\text{mm}$ und $G = E/2$. Da die Verlängerung des Seils mit berücksichtigt werden soll, gilt für seine Zugsteifigkeit $EA_{\text{Seil}} = ELs/10$.

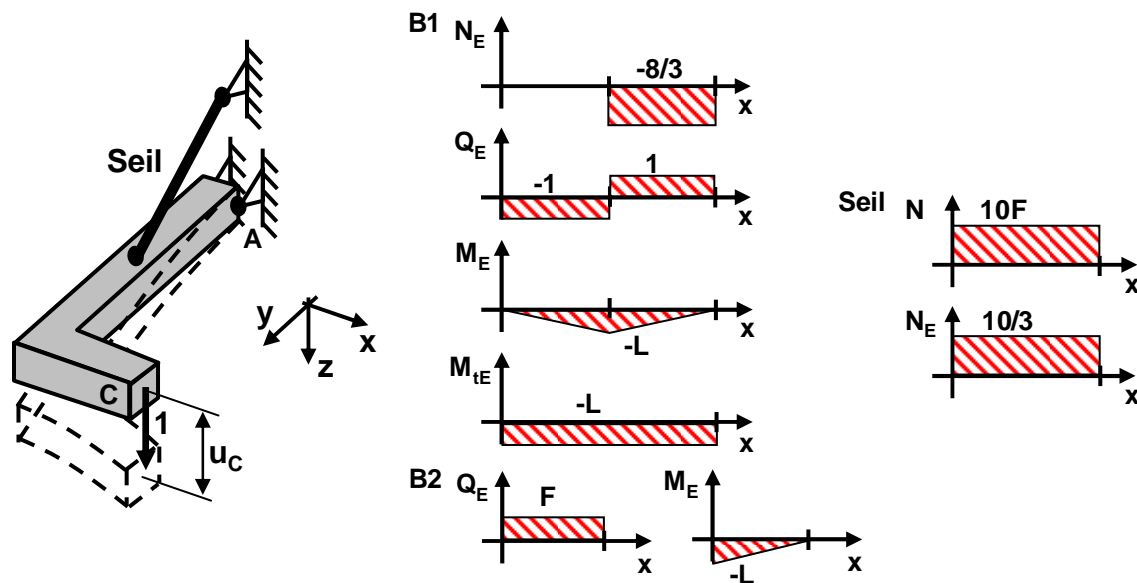


Abbildung 7.27: Innere Kräfte und Momente infolge Einheitskraft am Bauteil aus Abbildung 7.18

Für die Absenkung u_B müssen die Biegemomente im Balken B1 und B2 ausgewertet werden. Das Integral des Balkens B1 kann mit dem Integrationstafeleintrag 13 bestimmt werden. Bei Balken B2 kann der Eintrag 2 verwendet werden.

$$u_B = \int_c \frac{MM_E}{EI_y} dx = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{(-3LF)(-L)2L}{3} + \frac{(-3LF)(-L)L}{3} \right) = 3 \frac{FL^3}{EI_y} = 3 \frac{FL^3}{E \frac{L^3 s}{96}} = 288 \frac{F}{Es} = 28.8mm$$

Nur das Torsionsmoment im Balken B1 trägt zur Absenkung u_T bei. Das resultierende Integral wird mit dem Eintrag 8 der Integrationstafeln bestimmt.

$$u_T = \int_c \frac{M_t M_{tE}}{GI_t} dx = \frac{1}{GI_t} ((-3LF)(-L)2L) = 6 \frac{FL^3}{GI_t} = 6 \frac{FL^3}{E \frac{L^3 s}{2 \cdot 64}} = 768 \frac{F}{Es} = 76.8mm$$

Der Balken B1 wird in der zweiten Hälfte verkürzt. Die Absenkung $u_{N,B1}$ infolge der Normalkraft kann über den Eintrag 8 der Integrationstafeln berechnet werden.

$$u_{N,B1} = \int_c \frac{NN_E}{EA} dx = \frac{1}{EA} \left((-8F) \left(-\frac{8}{3} \right) L \right) = \frac{64 FL}{3 EA} = \frac{64 FL}{3 ELs} = \frac{64 F}{3 Es} = 2.1\bar{3}mm$$

Das Seil wird durch die Seilkraft, die einer positiven Normalkraft entspricht, verlängert. Durch diese Verlängerung senkt sich der Punkt C ab. Diese Absenkung $u_{N,Seil}$ kann wiederum mit dem Eintrag 8 bestimmt werden. Dabei wird auch die Seillänge $L_{Seil} = 5/4L$ benötigt.

$$u_{N,Seil} = \int_c \frac{NN_E}{EA_{Seil}} dx = \frac{1}{EA_{Seil}} \left((10F) \left(\frac{10}{3} \right) \left(\frac{5}{4} L \right) \right) = \frac{125 FL}{3 EA_{Seil}} = \frac{125 FL}{3 ELs} = \frac{1250 F}{3 Es} = 41.\bar{6}mm$$

Die Gesamtabenkung u_C ist die Summe der Teilverschiebungen.

$$u_C = u_B + u_T + u_{N,B1} + u_{N,Seil} = 288 \frac{F}{Es} + 768 \frac{F}{Es} + \frac{64 F}{3 Es} + \frac{1250 F}{3 Es} = 1494 \frac{F}{Es} = 149.4mm$$

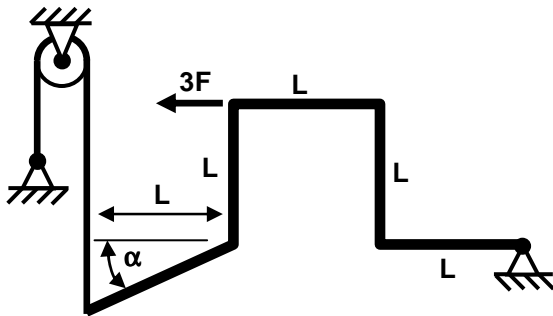
Im vorausgegangen Beispiel kann man erkennen, dass die Schaubilder für N_E , Q_E , M_E und M_{IE} nicht unabhängig von den Schaubildern N , Q , M und M_t sind. Die erstgenannten erhält man, indem man jeden Funktionswert der zweiten durch den Faktor $3F$ teilt. Allgemein gilt:

Wird ein Bauteil nur durch eine Kraft F_C belastet und sucht man die Verschiebung u_C des Kraftangriffspunktes in Richtung der Kraft, so erhält man die Schaubilder für N_E , Q_E , M_E und M_{IE} aus den Schaubildern für N , Q , M und M_t , indem dort alle Funktionswerte durch den Betrag von F_C geteilt werden.

Aufgaben zu Kapitel 7.5

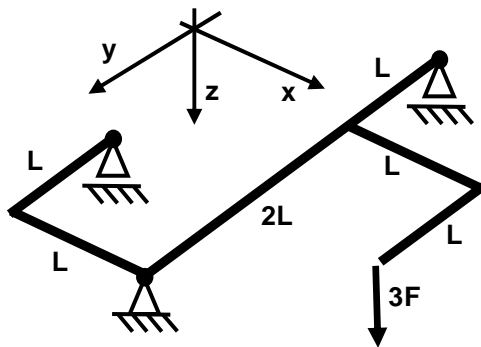
Aufgabe 7.5.1

Die waagrechte und senkrechte Verschiebung des Kraftangriffspunktes infolge der Biegemomente und der Verlängerung des Seiles, welches die Länge $3L$ und die Zugsteifigkeit $EA = 62F$ besitzt, ist gesucht. Die Balken haben die Biegesteifigkeit $EI_y = 1891/18FL^2$ (Lösung: $u = L/31$, $v = 92L/1891$).



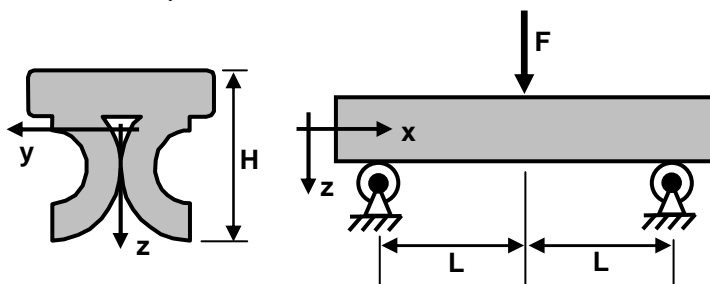
Aufgabe 7.5.2

Die senkrechte Absenkung des Kraftangriffspunktes ist zu bestimmen. Nur die Momente sind zu berücksichtigen. Die Biegesteifigkeit beträgt, $EI_y = 46FL^2$, die Torsionssteifigkeit $GI_t = 36/23EI_y$ (Lösung: $u = L/2$)



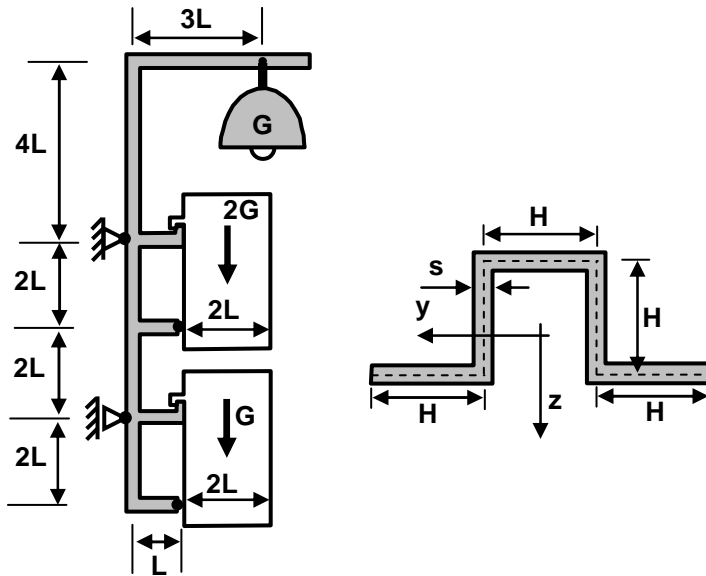
Aufgabe 7.5.3

Bei einer Kraft $F = 3000\text{N}$ biegt sich der Balken mit der Länge $2L$ in der Mitte um $u = 25\text{mm}$ durch und das Material versagt an der Unterseite. Es ist bekannt, dass das Versagen bei einer Normalspannung von $\sigma_{\max} = 180\text{N/mm}^2$ auftritt. ($L = 250\text{mm}$, $E = 10000\text{N/mm}^2$) Gesucht sind das Flächenträgheitsmoment I_y und der Abstand H des Flächenmittelpunktes von der Oberkante (Lösung: $H = 15\text{mm}$).

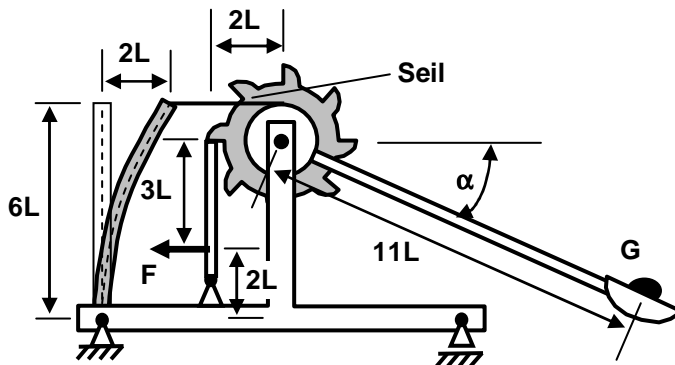


Aufgabe 7.5.4

An der grauen Halterung zur Warenpräsentation hängen zwei Schachteln, die beide einen mittigen Schwerpunkt und die Gewichtskräfte $2G$ und G besitzen. Die Schachteln haben an zwei Punkten Kontakt zur Halterung, wobei nur oben senkrechte Kräfte übertragen werden. An der Oberseite der Halterung ist eine symmetrische Lampe mit der Gewichtskraft G befestigt. Weitere Gewichtskräfte sind nicht zu berücksichtigen. Die Halterung besitzt den dargestellten dünnwandigen Querschnitt. Wie weit senkt sich der Anbindungspunkt der Lampe an die Halterung infolge des Biegemoments ab ($G = 50\text{N}$, $E = 81120\text{N/mm}^2$, $L/H = 13$, $s = 5\text{mm}$) (Lösung: $u = 20\text{mm}$)?

**Aufgabe 7.5.5**

Ein vereinfachtes Da Vinci Katapult mit einem Geschoss, welches die Gewichtskraft G besitzt, wird betrachtet. Am senkrechten grauen Balken gilt $EI_y/L^2 = 720G$. Beim Spannen verschiebt sich seine obere Spitze um $2L$ nach rechts. Das Zahnrad, die Seiltrommel und der Katapultarm sind fest miteinander verbunden und sind wie die restlichen Bauteile **unendlich steif**. Zwischen dem Zahnrad und dem senkrechten Bremsbalken wirkt der Haftreibungskoeffizient $\mu = 0.2$. Welche Kraft F ist notwendig, um das Geschoss auszulösen ($\cos\alpha = 10/11$) (Lösung: $F = 2.5G$)?



7.5.1 Superpositionierung bei der Verschiebungsberechnung

Wird ein Bauteil, wie in Abbildung 7.28, links dargestellt, mit zwei oder mehr Kräften belastet und ist die Verschiebung gesucht, so ist es sinnvoll, die Gesamtbelastung in einzelne Lastfälle zu zerlegen, diese unabhängig zu berechnen und abschließend die Ergebnisse zu überlagern. Dies nennt man wieder Superpositionierung.

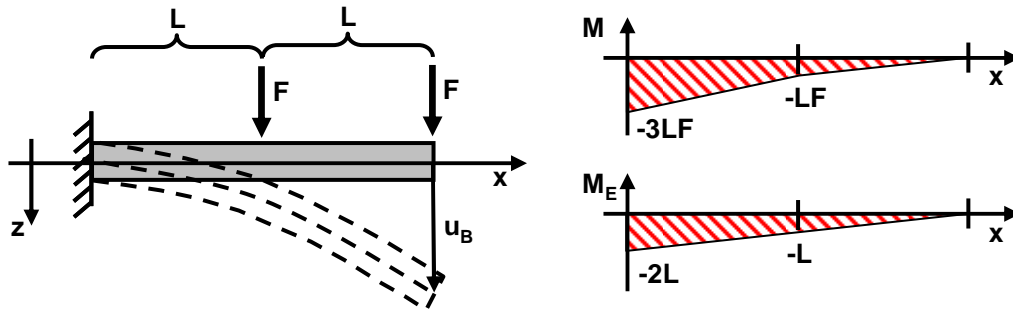


Abbildung 7.28: Verschiebungsberechnung an einem Bauteil mit 2 Kräften

Berücksichtigt man beide Kräfte F , resultiert der in Abbildung 7.285 rechts oben dargestellte Momentenverlauf. Für die Bestimmung von u_B muss am rechten Ende des Balkens eine senkrechte Einheitskraft angebracht werden. Es ergibt sich der Momentenverlauf M_E aus Abbildung 7.28, rechts unten. Mit der Biegesteifigkeit EI_y kann die gesuchte Verschiebung u_B mit den Einträgen 11 und 2 aus den Tabellen aus Abbildung 7.25 und 7.26 bestimmt werden.

$$u_B = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{L(-3LF(2(-2L)) + (-L)) - LF(-2L + 2(-L))}{6} + \frac{-LF(-L)L}{3} \right) = \frac{FL^3}{EI_y} \left(\frac{19}{6} + \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{2} \frac{FL^3}{EI_y}$$

Zur Anwendung der Superpositionierung wird die Berechnung in 2 Lastfälle zerlegt. Im ersten Lastfall, welche in Abbildung 7.29 dargestellt ist, wirkt die linke Kraft F , die zur Absenkung u_{B1} führt.

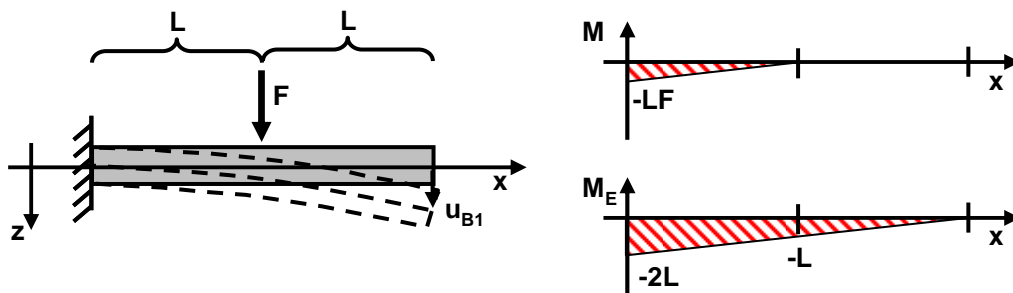


Abbildung 7.29: Verschiebungsberechnung des Lastfalles 1

$$u_{B1} = \frac{1}{EI_y} \left(+ \frac{-LFL(-L + 2(-2L))}{6} \right) = \frac{5}{6} \frac{FL^3}{EI_y}$$

Dazu wird der Eintrag 4 aus der Tabelle aus Abbildung 7.25 ausgewertet. Im zweiten Lastfall aus Abbildung 7.30 wirkt die rechte Kraft F und es resultiert die Verschiebung u_{B2} .

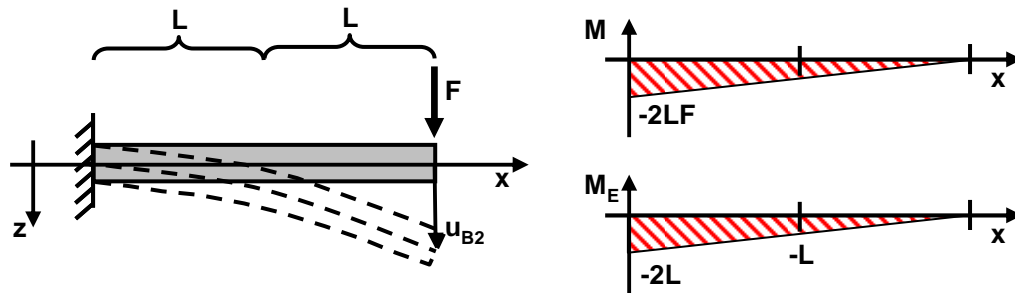


Abbildung 7.30: Verschiebungsberechnung des Lastfalles 2

$$u_{B2} = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{-2LF(-2L)2L}{3} \right) = \frac{8 FL^3}{3 EI_y}$$

Angewendet wird der Eintrag 2 aus der Tabelle aus Abbildung 7.25. Die Gesamtverschiebung u_B ist der Summe der beiden Teilverschiebungen u_{B1} und u_{B2} .

$$u_B = u_{B1} + u_{B2} = \frac{5 FL^3}{6 EI_y} + \frac{8 FL^3}{3 EI_y} = \left(\frac{5+16}{6} \right) \frac{FL^3}{EI_y} = \frac{7 FL^3}{2 EI_y}$$

7.5.2 Energiemethode zur Untersuchung statisch überbestimmter Bauteile

Im ersten Schritt soll die Energiemethode zur Bestimmung der Lagerkräfte und –momente eines statisch überbestimmt gelagerten Bauteil verwendet werden. Dazu kann die Geometrie aus Abbildung 7.31 betrachtet werden. Die Biegesteifigkeit EI_y sei gegeben. Das Produkt GA sei unendlich, wodurch der Einfluss der Querkraft zu vernachlässigt ist. Die Lagerkräfte F_{Az} und F_B und das Lagermoment M_A können nicht aus den Gleichgewichtsbedingungen bestimmt werden. Die Kräftebilanz in x -Richtung ergibt $F_{Ax} = 0$, für die anderen drei Größen sind die beiden verbleibenden Gleichgewichtsbedingungen nicht ausreichend.

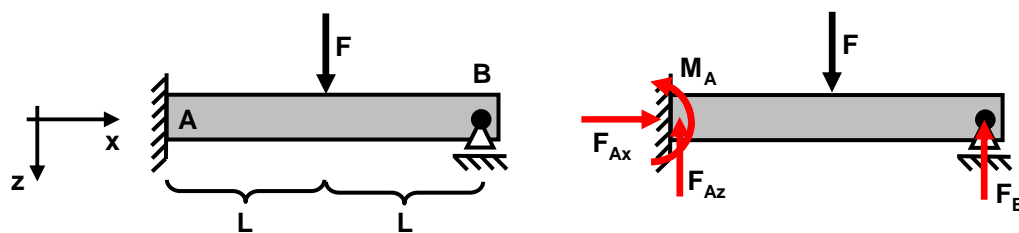


Abbildung 7.31: Statisch überbestimmt gelagertes Bauteil

Die senkrechte Verschiebung u_B des Punktes B infolge des Biegemoments wird in Abhängigkeit von F und F_B bestimmt. Da infolge des Lagers bekannt ist, dass diese Verschiebung gleich null sein muss, kann die fehlende Gleichung erzeugt werden. Dazu wird F_B neben F als bekannt vorausgesetzt. Die Lagerkraft F_{Az} und das Lagermoment M_A werden in Abhängigkeit von F und F_B bestimmt und die Schaubilder, wie in Abbildung 7.32 dargestellt, gezeichnet.

$$\begin{aligned} \sum F_z = 0: & \quad -F_{Az} + F - F_B = 0 & \Rightarrow & \quad F_{Az} = F - F_B \\ \sum M|_S = 0: & \quad M_A - LF + 2LF_B = 0 & \Rightarrow & \quad M_A = LF - 2LF_B = 0 \end{aligned}$$

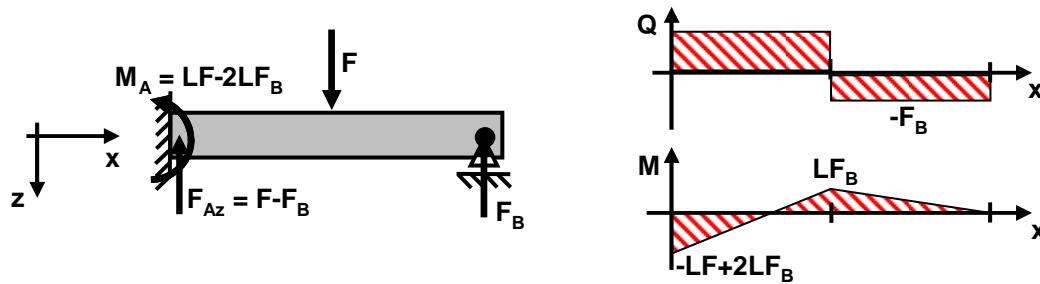


Abbildung 7.32: Lagergrößen und innere Kräfte und Momente des Bauteils aus Abbildung 7.31

Anschließend wird die senkrechte Verschiebung u_B infolge der Kräfte F und F_B bestimmt. Dazu werden die beiden Kräfte F und F_B vom Bauteil entfernt und am Punkt B eine senkrechte Einheitskraft angebracht. Es resultieren die Lagerkraft $F_{Az} = 1$, das Lagermoment $M_A = 2L$ und die in Abbildung 7.33 dargestellten inneren Kräfte und Momente infolge Einheitskraft.

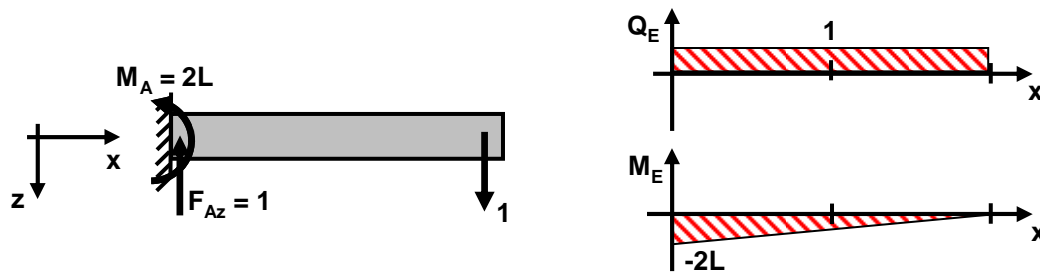


Abbildung 7.33: Lagergrößen und innere Kräfte und Momente infolge der Einheitskraft am Bauteils aus Abbildung 7.31

Zur Bestimmung des Integrals in der ersten Balkenhälfte wird der Tabelleneintrag 11 der Integrations- tafeln aus Abbildung 7.25 und 7.26 verwendet. Für die zweite Balkenhälfte verwendet man Eintrag 2. Die resultierende Verschiebung muss infolge des Lagers B gleich null sein.

$$\begin{aligned}
 u_B &= \frac{1}{EI_y} \left(\frac{L((-LF + 2LF_B)(2(-2L) - L) + LF_B(-2L - 2L))}{6} + \frac{LF_B(-L)L}{3} \right) \\
 &= \frac{L^3}{EI_y} \left(\frac{5F - 14F_B}{6} - \frac{F_B}{3} \right) = \frac{L^3}{EI_y} \left(\frac{5F - 14F_B - 2F_B}{6} \right) = \frac{L^3}{6EI_y} (5F - 16F_B) = 0
 \end{aligned}$$

Da der Vorfaktor ungleich null ist, muss der Klammerausdruck $5F - 16F_B = 0$ sein. Dies ergibt die ge- suchte Lagerkraft $F_B = 5/16F$. Die weiteren zu bestimmenden Größen am linken Lager A ergeben sich zu $F_{Az} = 11/16F$ und $M_A = 3/8LF$.

Die Berechnung kann vereinfacht werden, wenn wie in Abbildung 7.34 dargestellt, zwei Lastfälle eingeführt werden. Im ersten Lastfall wird die Verschiebung u_{B1} des Punktes B infolge der gegebenen Kraft F bestimmt. Der zweite Lastfall ermittelt die Verschiebung u_{B2} infolge der gesuchten Lagerkraft F_B .

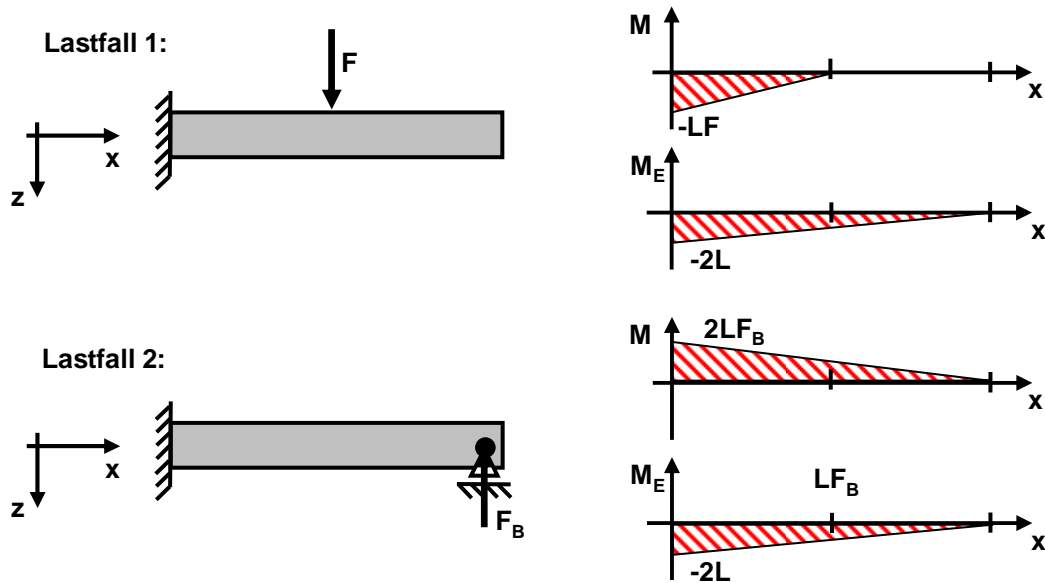


Abbildung 7.34: Zerlegung der Lagerkraftberechnung aus Abbildung 7.31 in 2 Lastfälle

$$u_{B1} = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{-LFL((2(-2L)-L))}{6} \right) = \frac{5 FL^3}{6 EI_y}$$

$$u_{B2} = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{2LF_B(-2L)2L}{3} \right) = -\frac{8 F_B L^3}{3 EI_y} = -\frac{16 F_B L^3}{6 EI_y}$$

Die Gesamtverschiebung u_B , die auf Grund des Lagers bei B gleich null sein muss, ist wieder die Summe der beiden Teilverschiebungen u_{B1} und u_{B2} .

$$u_B = u_{B1} + u_{B2} = \frac{5 FL^3}{6 EI_y} - \frac{16 F_B L^3}{6 EI_y} = \frac{L^3}{6 EI_y} (5F - 16F_B) = 0$$

Die Vorgehensweise zur Bestimmung der Lagergrößen statisch überbestimmt gelagerter Bauteile kann auf allgemeine statisch unbestimmte Bauteile übertragen werden. Dazu betrachtet man z.B. die entsprechende Geometrie aus Abbildung 7.35, links. Ohne den diagonalen Zugstab wäre das Bauteil statisch bestimmt. Mit ihm reichen die Gleichgewichtsbedingungen nicht aus, um die Schittkräfte und -momente zu bestimmen. Die Biegesteifigkeit EI_y sei gegeben, die Zugsteifigkeit EA und das Produkt GA seien unendlich, wodurch Normkraft und Querkraft keinen Einfluss haben.

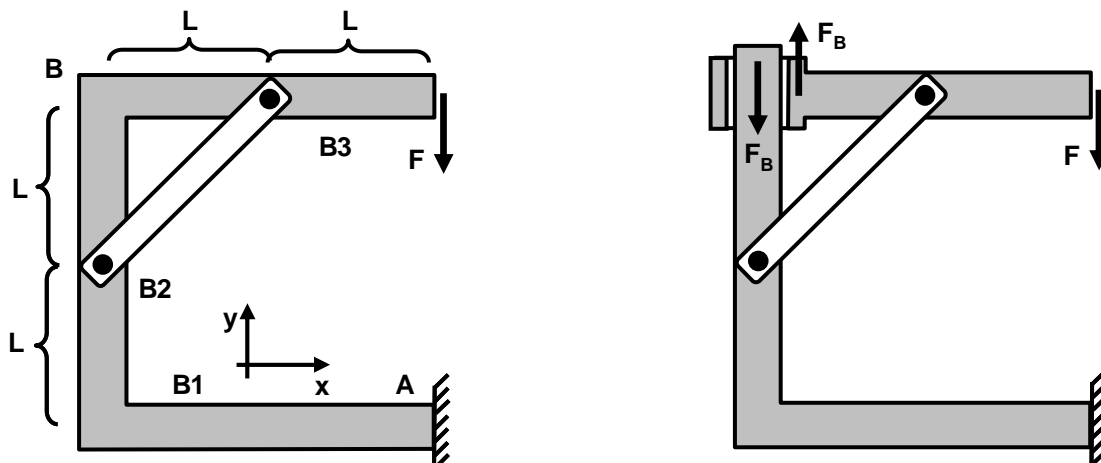


Abbildung 7.35: Statisch überbestimmte Geometrie

Man ersetzt die feste Verbindung am Punkt B durch eine Führung, die waagrechte Kräfte und ein Moment übertragen kann. Da eigentlich die feste Verbindung auch senkrechte Kräfte übertragen kann, wird dies durch die 2 senkrechten Kräfte F_B berücksichtigt, die jeweils an einem Balken wirksam sind. Es resultiert ein statisch bestimmtes Bauteil, welches durch die Kraft F und die beiden noch unbekannt Kräfte F_B belastet ist. Die Gesamtbelastung kann in zwei Lastfälle zerlegt werden, die unabhängig betrachtet werden können. Im ersten Lastfall, bei dem nur die Kraft F wirksam ist, resultieren die in Abbildung 7.36 dargestellten Biegemomente.

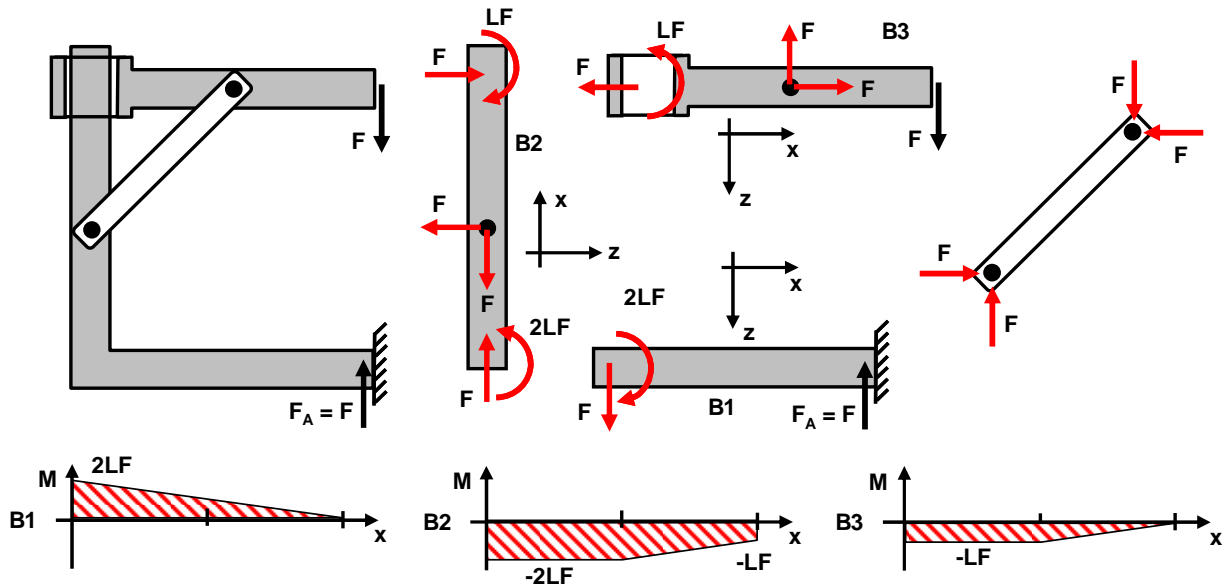


Abbildung 7.36: Lastfall 1 der Geometrie aus Abbildung 7.35

Im 2. Lastfall sind nur die beiden Kräfte F_B wirksam. Es ergeben sich die in Abbildung 7.37 dargestellten Biegemomente.

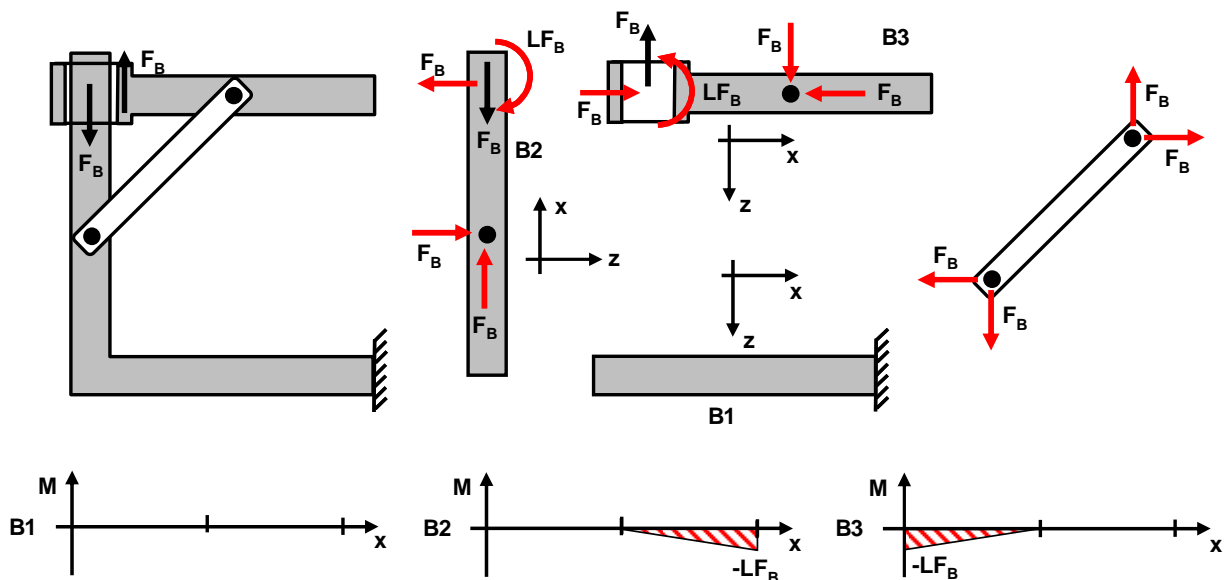


Abbildung 7.37: Lastfall 2 der Geometrie aus Abbildung 7.35

Die senkrechte Verschiebung u_{B2} des Punktes B am Balken B2 in negativer y-Richtung wird bestimmt. Sie setzt sich aus der Verschiebung $u_{B2,1}$ infolge des ersten und $u_{B2,2}$ infolge des 2. Lastfalls zusammen. Anschließend wird die Verschiebung u_{B3} des Punktes B am Balken B3 in positiver y-Richtung berechnet. Analog ist sie eine Summe der Verschiebungen $u_{B3,1}$ und $u_{B3,2}$ infolge der beiden Lastfälle.

Mit der Einheitskraft am Balken B2 folgen die in Abbildung 7.38 gezeigten Biegemomente.

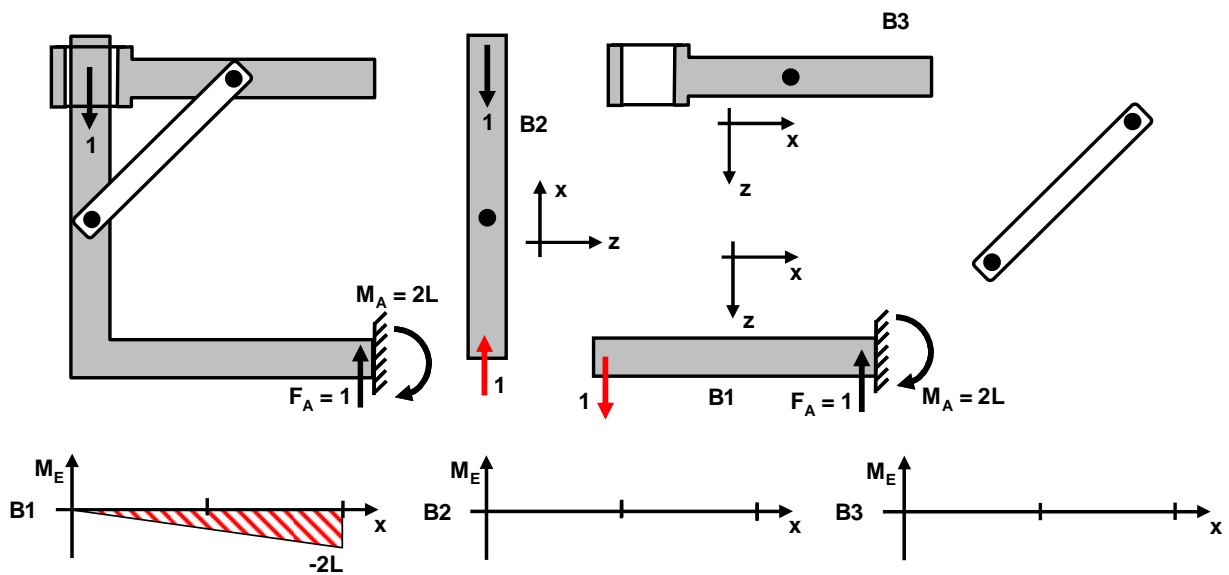


Abbildung 7.38: Biegemomente infolge der Einheitskraft am Punkt B am Balken B2

$$u_{B2,1} \frac{1}{EI_y} \left(\frac{2LF(-2L)2L}{6} + 0 + 0 \right) = -\frac{4}{3} \frac{FL^3}{EI_y}$$

$$u_{B2,2} = \frac{1}{EI_y} (0 + 0 + 0) = 0$$

$$\Rightarrow u_{B2} = u_{B2,1} + u_{B2,2} = \frac{1}{EI_y} \left(-\frac{4}{3} FL^3 + 0 \right) = \frac{1}{EI_y} \left(-\frac{4}{3} FL^3 \right)$$

Mit der Einheitskraft am Balken B3 folgen die in Abbildung 7.39 gezeigten Biegemomente.

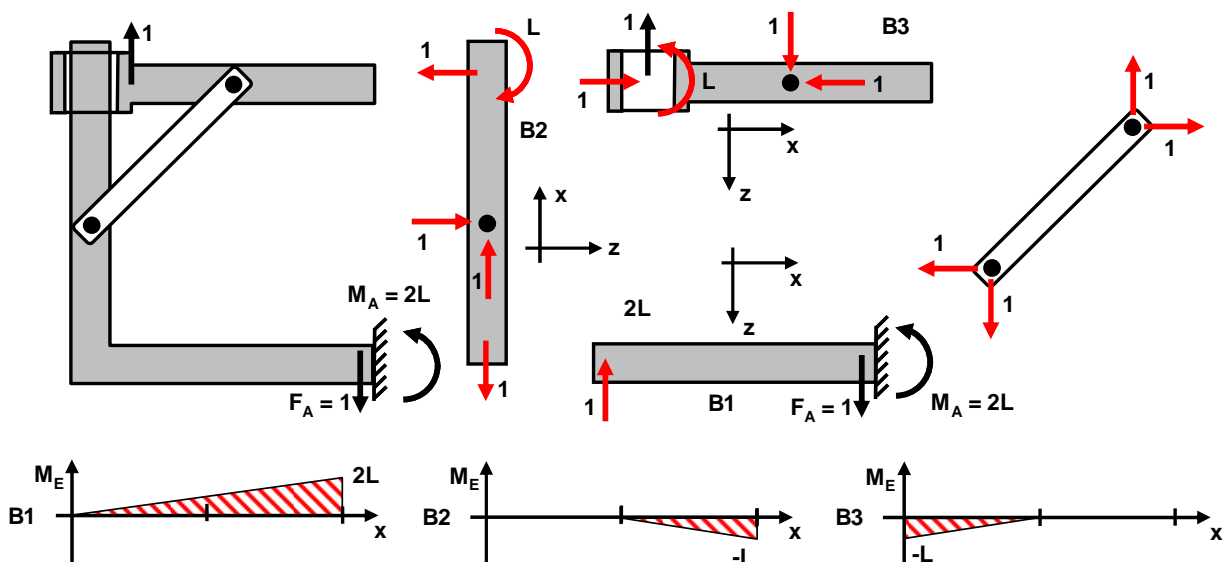


Abbildung 7.39: Biegemomente infolge der Einheitskraft am Punkt B am Balken B2

$$u_{B3,1} = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{2LF \cdot 2L \cdot 2L}{6} + \frac{-LL(-2L + 2(-L))}{6} + \frac{-L(-LF)L}{2} \right) = \frac{5}{2} \frac{FL^3}{EI_y}$$

$$u_{B3,2} = \frac{1}{EI_y} \left(0 + \frac{-LF_B(-L)L}{3} + \frac{-LF_B(-L)L}{3} \right) = \frac{2}{3} \frac{F_B L^3}{EI_y}$$

$$\Rightarrow u_{B3} = u_{B3,1} + u_{B3,2} = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{5}{2} FL^3 + \frac{2}{3} F_B L^3 \right)$$

Da am Punkt B eigentlich eine feste Verbindung vorhanden ist, müssen beide Verschiebungen betragsmäßig identisch sein. Da sie entgegengesetzt orientiert sind, muss ihre Summe gleich null sein.

Daraus resultiert die notwendige Gleichung zur Bestimmung von F_B .

$$0 = u_{B2} + u_{B3} = \frac{1}{EI_y} \left(-\frac{4}{3} FL^3 \right) + \frac{1}{EI_y} \left(\frac{5}{2} FL^3 + \frac{2}{3} F_B L^3 \right) = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{7}{6} FL^3 + \frac{2}{3} F_B L^3 \right) = \frac{L^3}{EI_y} \left(\frac{7}{6} F + \frac{2}{3} F_B \right)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{7}{6} F + \frac{2}{3} F_B \quad \Rightarrow \quad F_B = -\frac{7}{4} F$$

Der Wert für F_B kann in die Schaubilder von 7.37 des 2. Lastfalls eingesetzt werden. Die Summe der Schaubilder für beide Lastfälle ergibt den in Abbildung 7.40 dargestellten tatsächlichen Verlauf des Biegemoments.

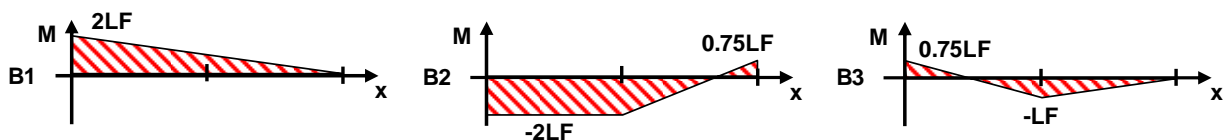


Abbildung 7.40: Biegemomente im Bauteil von Abbildung 7.35, links

Analog können alle anderen Schnittgrößen auch bestimmt werden.

Infolge der Linearität der Aufgabe müssen die Verschiebungen u_{B2} und u_{B3} nicht einzeln bestimmt werden. Die notwendigen, in Abbildung 7.41 dargestellten Schaubilder infolge der Einheitskraft erhält man auch, wenn man die Schaubilder aus Abbildung 7.37 durch den Betrag F_B teilt.

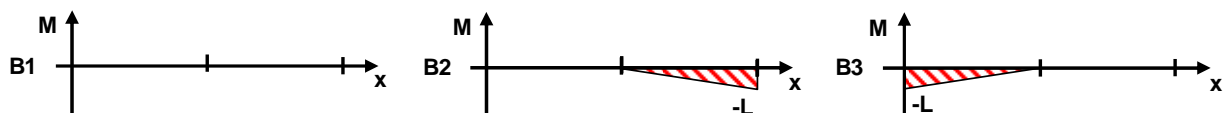


Abbildung 7.41: Biegemomente infolge der Einheitskräfte zur Bestimmung von F_B

$$u_{B2^*} = \frac{1}{EI_y} \left(0 + \frac{-LL(-2L+2(-L))}{6} + \frac{-L(-LF)L}{2} \right) = \frac{7}{6} \frac{FL^3}{EI_y}$$

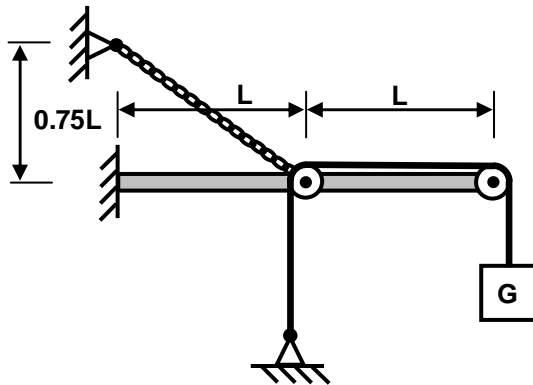
$$u_{B3^*} = \frac{1}{EI_y} \left(0 + \frac{-L(-LF_B)L}{3} + \frac{-L(-LF_B)L}{3} \right) = \frac{2}{3} \frac{F_B L^3}{EI_y}$$

$$\Rightarrow 0 = u_{B2^*} + u_{B3^*} = \frac{7}{6} \frac{FL^3}{EI_y} + \frac{2}{3} \frac{F_B L^3}{EI_y} = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{7}{6} FL^3 + \frac{2}{3} F_B L^3 \right) = \frac{L^3}{EI_y} \left(\frac{7}{6} F + \frac{2}{3} F_B \right)$$

Aufgaben zu Kapitel 7.5.2

Aufgabe 7.5.2.1

An einem Balken der Länge $2L$ sind zwei reibungsfreie Rolle angebracht. Über die beiden Rollen läuft ein Seil, an welchem das Gewicht G gehalten wird. Um die Belastung des Balkens zu reduzieren, wird der Balken in der Mitte von einer Kette gehalten. Für die Berechnung sind nur das Biegemoment im Balken und die Normalkraft in der Kette, die die Zugsteifigkeit $EA = 125/23 EI_y/L^2$ besitzt, zu berücksichtigen. Dabei ist $EI_y = 25GL^2$ die Biegesteifigkeit des Balkens. Wie stark senkt sich das rechte Ende des Balkens ab (Lösung: $u = L/10$)?



Aufgabe 7.5.2.2

Die Zugsteifigkeiten des Bauteils seien unendlich groß. Ebenso die Biegesteifigkeit in der weißen Treppe. Die Biegesteifigkeit des grauen Rahmens sei EI_y . Wie groß ist die Normalkraft im senkrechten Balken des grauen Rahmens (Lösung: $N = -3.168F$)? Wie groß ist der prozentuale Fehler, wenn man bei der linken Verbindung Rahmen/Treppe statt einer festen Verbindung ein „2-wertiges“ Gelenk verwendet (Lösung: 13.6%)?

Anmerkung: Bei der Berechnung der inneren Kräfte und Momente können die Räder auch Kräfte, die senkrecht nach unten zeigen, erzeugen!

